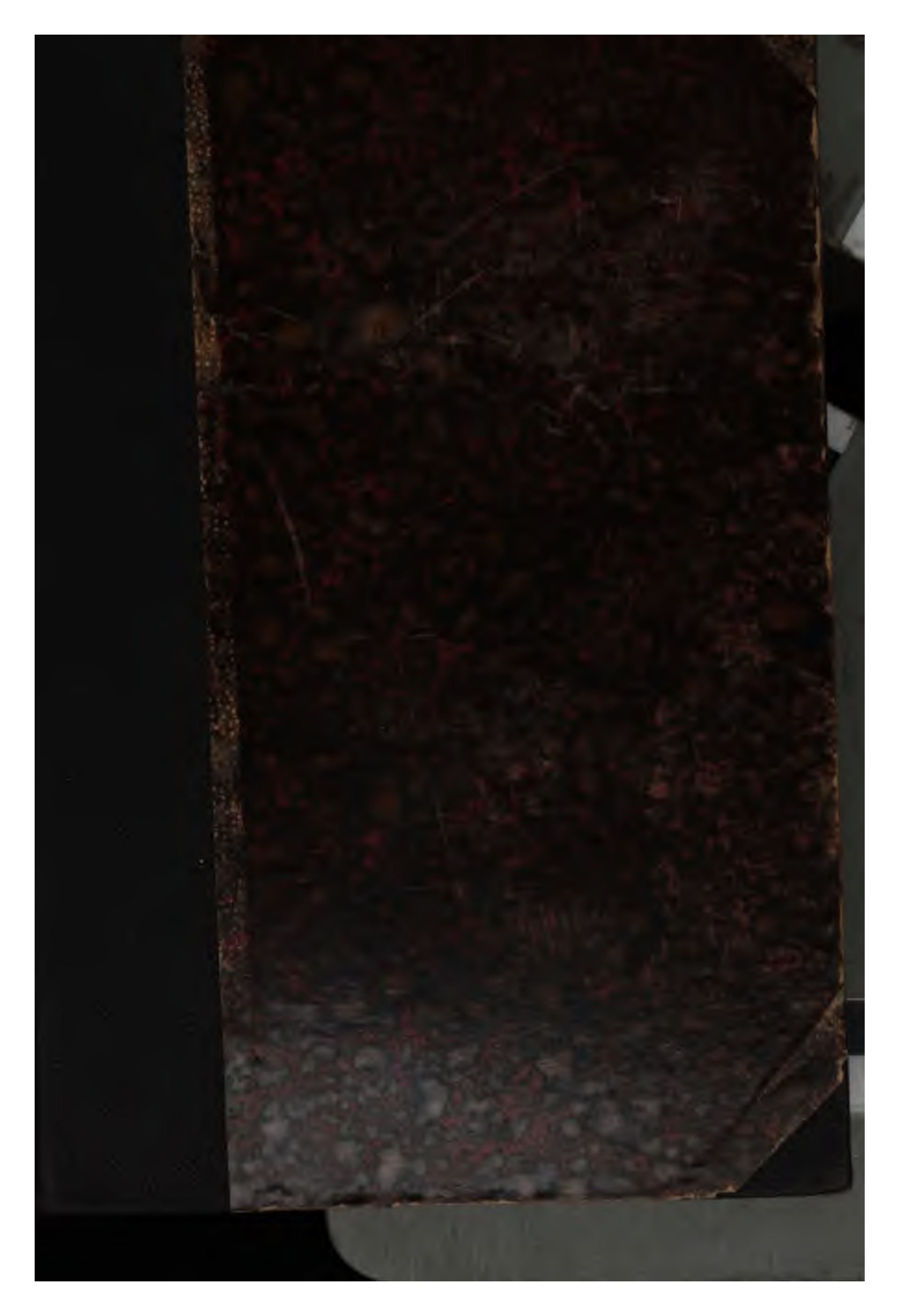


LEHRBUCH DER PHYSIK

LEHRBUCH DER PHYSIK

VON

O. D. CHWOLSON

PROF. ORD. AN DER KAISERL. UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG

ERSTER BAND

EINLEITUNG — MECHANIK — EINIGE MESSINSTRUMENTE UND MESSMETHODEN — DIE LEHRE VON DEN GASEN, FLÜSSIGKEITEN UND FESTEN KÖRPERN

ÜBERSETZT VON

H. PFLAUM

OBERLEHRER IN RIGA

MIT 412 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1902

LEHRBUCH DER PHYSIK

VON

O. D. CHWOLSON

PROF. ORD. AN DER KAISERL. UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG

ERSTER BAND

EINLEITUNG — MECHANIK — EINIGE MESSINSTRUMENTE UND MESSMETHODEN — DIE LEHRE VON DEN GASEN, FLÜSSIGKEITEN UND FESTEN KÖRPERN

ÜBERSETZT VON

H. PFLAUM

OBERLEHRER IN RIGA

MIT 412 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1902

PRINTED IN GERMANY

Durch einen befreundeten russischen Physiker wurde ich auf das vorliegende Werk von Herrn O. Chwolson hingewiesen und mir nahegelegt, einen Verleger für eine deutsche Übersetzung desselben zu gewinnen. Ich that dies um so lieber, als schon eine flüchtige Durchsicht die hervorragende Bedeutung der Arbeit nach Form und Inhalt ergab, ein Eindruck, der sich bei eingehenderem Studium noch verstärkte. Neben den vorhandenen deutschen Lehrbüchern wird es sich sicher eine Stelle erobern, da der russische Gelehrte den Stoff in wesentlich anderer Weise anordnet und darstellt, als dies meistens geschieht, und zwar, wie mir scheint, in einer den Fortschritten der Wissenschaft entsprechenden Form, die besonders für denjenigen anregend und förderlich ist, der sich mit den elementaren Thatsachen der Physik vertraut gemacht hat. Dadurch wird das Buch gewifs auch für unsere ganze Unterrichtsmethode von Wert sein.

Sein Studium sei daher nicht nur den Studierenden der Physik, sondern auch unsern Lehrern auf das Wärmste empfohlen, die zugleich in den zahlreichen Litteraturangaben Anregung zum tieferen Eindringen in die einzelnen Gebiete finden.

Erlangen, 15. September 1902.

Eilhard Wiedemann.

VORREDE ZUR ERSTEN (RUSSISCHEN) AUFLAGE [1].

Quod potui, feci...; in betreff der „meliora“ hoffe ich selbst bei der Bearbeitung der weiteren Bände Besseres liefern zu können und in einer fernen Zukunft vielleicht auch diesen Band „melior“ herauszugeben, wenn meine wissenschaftlichen Freunde und Fachgenossen so gütig sind, mir ihre wertvollen Bemerkungen, um welche ich sie dringend bitte, mitzuteilen. Für jede solche Anregung sage ich im voraus meinen aufrichtigsten und herzlichsten Dank.

Das vorliegende „Lehrbuch der Physik“ ist auf vier Bände berechnet. Der zweite Band wird die Akustik und die Lehre von der strahlenden Energie enthalten; der dritte die Wärmelehre und der vierte Magnetismus und Elektrizität. Ich hoffe, dafs der zweite Band im Frühling 1898 erscheinen wird.

Zu besonderem Danke bin ich meinem verehrten und aufrichtig geliebten Lehrer, Herrn Prof. F. F. Petruscheffsky und meinen Freunden Prof. A. J. Ssadowsky und A. L. Gerschun verpflichtet. Prof. F. F. Petruscheffsky, der es verstanden hat, so vielen die Liebe zur Wissenschaft einzuflöfsen, hat mir nach verschiedenen Richtungen sein Interesse an meiner Arbeit bewiesen. So durfte ich die Zeichnungen, von denen viele und zwar die wichtigsten sein geistiges Eigentum sind, aus seinem „Kursus der Physik“ benutzen. Bei der Verwendung derselben durfte ich seinem Werke auch die entsprechenden Beschreibungen und Erklärungen entnehmen. Die Teilnahme, welche er an meiner Arbeit zeigte, bildete für mich eine beständige geistige Unterstützung.

[1] Diese Auflage war meinem Vater, Prof. ord. emer. D. A. Chwolson gewidmet. Die Vorrede hat nur Bezug auf den ersten Band dieses Werkes.

Prof. A. J. Ssadowsky hat das ganze Manuskript des ersten Bandes durchgelesen[1]) und mir eine grofse Anzahl wertvoller Ratschläge erteilt. Sein scharfsinniges kritisches Urteil und seine grofse Erfahrung in didaktischen Fragen haben in nicht geringem Mafse meine Arbeit beeinflufst, der er beständig das gröfste Interesse entgegenbrachte. Mein Freund, Herr Dr. A. L. Gerschun, hat eine Korrektur gelesen; dank ihm konnte ich zahlreiche und verschiedenartige Verbesserungen vornehmen. Seine umfangreichen Kenntnisse und seine grofse Belesenheit gereichen diesem Buche zu grofsem Vorteil.

Meine Kollegen Prof. der Philosophie A. J. Wedensky und Prof. der Mineralogie S. F. Glinka hatten die Freundlichkeit, einige Stellen durchzusehen.

Mit dem Gefühle der tiefsten Erkenntlichkeit gedenke ich des verstorbenen Verlegers K. L. Ricker, welcher die Herausgabe dieses Werkes unternommen hatte. Er war nicht nur ein kenntnisreicher und unternehmender, er war auch ein wohlwollender Mann, der es nie unterliefs, die Interessen derjenigen im Auge zu behalten, mit denen ihn seine weitverzweigte Thätigkeit zusammenführte, und grofs ist die Anzahl derer, denen er Gutes gethan und die mit Dankbarkeit seinen Namen nennen. Ehre seinem Andenken!

Seine Witwe, Frau O. Ricker, und der gegenwärtige Leiter der Firma, Herr J. Blashek, handelten im Geiste des Verstorbenen und scheuten keine Opfer bei der Herausgabe dieses Werkes. Auch ihnen sage ich meinen herzlichsten Dank.

St. Petersburg, März 1897.

O. Chwolson.

VORREDE ZUR ZWEITEN (RUSSISCHEN) AUFLAGE.

In dieser Auflage sind in einigen Kapiteln gröfsere Änderungen vorgenommen worden, z. B. in den Kapiteln über die Wage, über die Arbeit u. a.; vieles wurde neu hinzugefügt und die nach

[1]) Dieses war bei den folgenden Bänden nicht der Fall.

dem Druck der ersten Auflage erschienenen physikalischen Arbeiten berücksichtigt.

Herzlichen Dank spreche ich auch meinen Kollegen aus, welche meine Arbeit freundlich und nachsichtig beurteilten.

St. Petersburg, März 1900.

O. Chwolson.

VORREDE ZUR DEUTSCHEN AUSGABE.

Dem ersten Bande der deutschen Ausgabe meines „Lehrbuchs der Physik" möchte ich einige Worte vorausschicken und vor allem auf einige Punkte aufmerksam machen, welche ohne Erläuterung vielleicht Bedenken hervorrufen könnten.

Ich habe bei Abfassung der ersten zwei Abschnitte (Einleitung und Mechanik) vorausgesetzt, dafs der Leser mit der höheren Mathematik noch nicht vertraut ist. Ich verwende daher in der Einleitung Ausdrücke von der Form $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, zeige an einigen Beispielen, wie dieselben berechnet werden, und benutze sie dann in der Mechanik, wo auch $\lim \Sigma$ für das Integralzeichen gesetzt ist. Bei Ausrechnung einiger Beispiele (z. B. von Trägheitsmomenten) werden aber trotzdem die gewöhnlichen Methoden der höheren Mathematik benutzt. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich folgendermafsen. Ich setze nämlich voraus, dafs der eben von der Schule kommende Anfänger gleichzeitig an das Studium der Physik und der Mathematik geht und letztere mit der analytischen Geometrie beginnt. Dies entspricht dem hiesigen Gebrauche. Im ersten, manchmal im zweiten Semester hat der Studierende die Differential- und Integralrechnung noch nicht systematisch durchzunehmen begonnen. Solchen Lesern habe ich das Studium der ersten beiden Abschnitte möglich zu machen gesucht. Die gelegentlich vorkommenden Integrale kann er bei dem ersten Studium überschlagen. Bei späteren Wiederholungen findet er die ihm nun verständlichen Rechnungen an denjenigen Stellen, wo sie hingehören.

In den Litteraturangaben ist mit Absicht kein einheitliches Prinzip durchgeführt. Wo es sich um rein physikalische Fragen handelt, sind die im Text erwähnten Arbeiten am Schlusse der betreffenden Kapitel zusammengestellt. Dafs bei vielen Fragen aus den Grenzgebieten der Physik (Astronomie, Geodäsie, Meteorologie, Instrumentenkunde, theoretische Mechanik und Chemie), deren Besprechung nur kurz gestreift wird, von einer vollständigen Angabe der Litteratur nicht die Rede sein kann, liegt auf der Hand. Bei den einschlägigen wenigen Arbeiten, die aus irgend welchen besonderen Gründen erwähnt sind, habe ich den Nachweis direkt im Text oder in Fufsnoten gegeben.

Nicht unerwähnt möchte ich die mannigfache Anregung lassen, die ich den gröfseren deutschen, englischen und französischen Lehr- und Handbüchern der Physik verdanke.

Dieser Band ist nach der zweiten russischen Auflage (1900) übersetzt worden, doch habe ich die zahlreichen Änderungen und Ergänzungen eingeführt, die ich seit Anfang 1900 mir für eine etwaige weitere Auflage vorgemerkt hatte.

Sehr verbunden bin ich Herrn Oberlehrer H. Pflaum in Riga, welcher mit bewunderungswürdiger Gewissenhaftigkeit und der gröfsten Sachkenntnis die Übersetzung ausführte.

Herr Professor E. Wiedemann hat das Manuskript der deutschen Übersetzung an zahlreichen Stellen ergänzt. Ihm und Herrn Prof. G. C. Schmidt, der sich der grofsen Mühe unterzogen hat, eine Korrektur des Werkes zu lesen, und dabei zahlreiche Verbesserungen angebracht hat, sage ich an dieser Stelle meinen besten Dank.

Die Verlagsbuchhandlung von Friedr. Vieweg & Sohn hat treu ihren Traditionen auch bei Herausgabe dieses Werkes keine Mühen und Kosten gescheut, um demselben eine angemessene Ausstattung zu geben.

Möge ein günstiger Stern über diesem Buche walten!

St. Petersburg, Juni 1902.

Prof. O. Chwolson.

INHALTSVERZEICHNIS DES ERSTEN BANDES.

Sechstes Kapitel. Von der allgemeinen Gravitation.

Siebentes Kapitel. Elemente der Potentialtheorie.

Achtes Kapitel. Von der Schwerkraft.

Neuntes Kapitel. Von den Dimensionen physikalischer Gröfsen.

Dritter Abschnitt.

Mefsapparate und Mefsmethoden.

Erstes Kapitel. Allgemeine Bemerkungen über physikalische Messungen.

Zweites Kapitel. Einige Hülfsapparate.

Drittes Kapitel. Messung von Längen und Flächen.

Viertes Kapitel. Messung von Winkeln.

Fünftes Kapitel. Messung des Volumens.

Sechstes Kapitel. Messung von Kräften und Massen.

Drittes Kapitel. Barometer, Manometer und Pumpen.

Viertes Kapitel. Berührung von Gasen mit Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern.

Fünftes Kapitel. Grundlagen der kinetischen Gastheorie.

Viertes Kapitel. Oberflächenspannung der Flüssigkeiten.

Fünftes Kapitel. Erscheinungen der Adhäsion und Kapillarität.

Sechstes Kapitel. Lösungen von festen und flüssigen Körpern.

Siebentes Kapitel. Diffusion und Osmose.

Achtes Kapitel. Reibung im Inneren der Flüssigkeiten.

Neuntes Kapitel. Bewegung der Flüssigkeiten.

Zehntes Kapitel. Kolloide.

Sechster Abschnitt.

Lehre von den festen Körpern.

Erstes Kapitel. Die Materie im festen Zustande.

Zweites Kapitel. Dichte der festen Körper.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Physik.

§ 1. Zwei Welten. Für jeden Menschen existieren zwei Welten: eine innere und eine äufsere; zwischen diesen beiden Welten vermitteln unsere Sinne. Die Aufsenwelt besitzt die Fähigkeit auf unsere Sinne einzuwirken, in ihnen gewisse Veränderungen hervorzurufen, oder, wie man zu sagen pflegt, Reize auf sie auszuüben. Die innere Welt im Menschen wird durch die Gesamtheit solcher Erscheinungen bestimmt, die der unmittelbaren Beobachtung eines anderen Menschen absolut unzugänglich sind.

Die von der Aufsenwelt hervorgerufene Reizung der Sinnesorgane überträgt sich auf jene Innenwelt und ruft in ihr ein subjektives Empfinden hervor, dessen Entstehung durch die Existenz des Bewufstseins bedingt wird. Die von der Innenwelt empfangene subjektive Empfindung wird objektiviert, d. h. wird auf den äufseren Raum übertragen als ein Etwas, das einem bestimmten Orte und einer bestimmten Zeit angehört. Wir übertragen also unsere Empfindungen auf die Aufsenwelt, wobei Raum und Zeit sozusagen denjenigen Hintergrund bilden, vor welchem sich die objektivierten Empfindungen anordnen. An diejenigen Stellen des Raumes, an denen sie sich befinden, versetzen wir unwillkürlich die Ursache, durch welche sie hervorgerufen wurden. Die Untersuchungen über den Prozefs des Objektivierens gehören der Philosophie an.

Dem Menschen wohnt ferner die Fähigkeit inne, die erhaltenen Eindrücke zu vergleichen, über ihre Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit zu urteilen und im letzteren Falle qualitative und quantitative Verschiedenartigkeiten zu unterscheiden, wobei die quantitativen Unterschiede sich entweder auf den Spannungsgrad (Intensität) oder die Raumausdehnung (Extensität) oder endlich die Zeitdauer der den Reiz hervorbringenden objektivierten Ursache beziehen können.

Da der Verstandesschlufs, welcher jede Objektivierung begleitet, ausschliefslich auf dem empfangenen Eindrucke basiert, so bringt eine

vollkommene Identität dieser Eindrücke unbedingt auch Identität der objektivierten Ursachen hervor, und diese Identität bleibt ohne Rücksicht auf unseren Willen, ja sogar gegen unseren Willen selbst in jenen Fällen bestehen, wo andere Sinnesorgane von der Verschiedenartigkeit der Ursache ein unbestreitbares Zeugnis ablegen (der Gegenstand und sein Spiegelbild — Sehen und Fühlen). Hieraus entspringt eine der Hauptquellen der zweifellos falschen Verstandesschlüsse, welche zu den sogenannten Täuschungen des Gesichts, Gehörs u. s. w. führen. Eine andere Quelle derselben ist Mangel an Übung bei der Beurteilung von neuen Eindrücken.

Die räumliche und zeitliche Wahrnehmung der Sinneseindrücke, die wir untereinander vergleichen und denen wir die Bedeutung objektiver, aufserhalb unseres Bewufstseins existierender Realität verleihen, wird äufsere Erscheinung genannt. Die Farbenänderung, welche die Körper bei Änderung ihrer Beleuchtung erfahren, die Niveaugleichheit des Wassers in Gefäfsen, die Schwingungsbewegung des Pendels sind Beispiele äufserer Erscheinungen.

Eine von den drei Triebfedern, welche die Menschheit auf dem Wege ihrer Entwicklung in Bewegung erhalten, ist die Wifsbegier, welche zum letzten unerreichbaren Ziele die Erkenntnis des Wesens unserer Existenz hat, des wahren Verhältnisses zwischen der Welt in uns und der Aufsenwelt. Die beiden anderen Triebfedern sind das Streben nach Wohlergehen und das Streben nach Anerkennung. Als Resultat der Wifsbegier hat sich die Bekanntschaft mit einer sehr grofsen Zahl der verschiedenartigsten Erscheinungen ergeben, welche je nach ihrem Charakter den Gegenstand der verschiedenen Wissenschaften bilden. Unter letzteren nimmt die Physik eine der ersten Stellen ein, dank dem Umfang der von ihr bearbeiteten Gebiete und der Bedeutung, welche sie für fast alle übrigen Wissenschaften hat.

Indem wir die Ursache der Empfindung objektivieren, d. h. sie an eine bestimmte Stelle des Raumes versetzen, stellen wir uns vor, dafs an jener Stelle ein Etwas vorhanden sei, was wir Materie oder Stoff nennen. Ein begrenzter Teil des Raumes, welcher Stoff enthält, heifst ein physischer Körper.

Die Materie zerfällt in zwei Arten: die nicht organisierte und die organisierte; letztere bildet den Tier- und Pflanzenkörper.

Die erste Entstehung von organisierter Materie ist uns noch unbekannt, obgleich wir den Übergang der nicht organisierten Materie in die organisierte beobachten (Ernährung, Atmung); aber dieser Übergang erfolgt nur in Gegenwart bereits organisierter Materie. Das Geheimnis der ersten Umwandlung ist uns bis jetzt verschlossen.

§ 2. Aufgabe der Physik. Physik im weitesten Sinne des Wortes ist die Wissenschaft von der nicht organisierten

Materie und von den in ihr vor sich gehenden Erscheinungen. Diese Erscheinungen heifsen physikalische Erscheinungen. Alle übrigen sich mit der Materie beschäftigenden Wissenschaften haben es mit organisierter Substanz zu thun (biologische Wissenschaften). Physikalische Prozesse können sich auch in der organisierten Materie abspielen; indes sind sämtliche Versuche, alle in der organisierten Materie vor sich gehenden Erscheinungen auf physikalische Erscheinungen zurückzuführen, mifsglückt und bis jetzt ist ungewifs, ob dies überhaupt jemals gelingen wird. Die physikalischen Erscheinungen spielen zweifellos eine hervorragende Rolle auch in der organisierten Materie, aber es wird durch sie nicht die Gesamtheit ihrer Eigenschaften erschöpfend dargestellt: es bleibt noch dasjenige übrig, was das innerste Wesen und die Bedingung der Organisation ausmacht — dasjenige, was wir „Leben" nennen.

Indem die Physik die in der nichtorganisierten Materie vor sich gehenden Erscheinungen erforscht, verfolgt sie ein dreifaches Ziel: die Erscheinungen zu entdecken, zu untersuchen und zu erklären.

Um die Erscheinungen zu entdecken und zu untersuchen, bedient man sich der Beobachtung und des Experimentes, welche indes durch keine scharfe Grenze voneinander getrennt sind und zusammen die Erfahrung ausmachen. Im engeren Sinne des Wortes ist die Beobachtung einer äufseren Erscheinung die Betrachtung eines Vorganges, der sich unter den gewöhnlichen Verhältnissen abspielt; das Experiment stellt seinerseits eine Wiederholung der Erscheinung unter künstlich geschaffenen, in der Natur vielleicht niemals vorkommenden Verhältnissen dar, um dabei diejenigen Besonderheiten erkennen zu können, die in der Erscheinung gerade dank diesen Verhältnissen zu Tage treten. Bisweilen sagt man, dafs das Experiment dazu diene, eine gestellte Frage von der Natur selbst mehr oder weniger bestimmt beantworten zu lassen. Durch die Beobachtung belauscht man, durch den Versuch befragt man die Natur. Indes ist zu beachten, dafs sowohl die Beobachtung als auch das Experiment Gedankenarbeit zur Voraussetzung und im Gefolge haben. Hieraus geht hervor, dafs auch die Beobachtung auf das Erhalten einer Antwort abzielt, nachdem durch vorhergegangene Gedankenarbeit die Frage klargelegt ist. Im weiteren Sinne des Wortes begleitet „die Beobachtung" ein jedes Experiment.

Die von uns gebrauchte Terminologie (Einteilung des Versuches in Beobachtung und Experiment) ist die heute in der Philosophie übliche. In der Physik pflegt man die Beobachtung von dem Versuch zu unterscheiden, indem man den Versuch mit dem identifiziert, was vorher Experiment genannt wurde. Im folgenden werden wir uns dieser letzteren Terminologie bedienen, obgleich auch im gewöhnlichen Sprach-

gebrauch das Wort Versuch zuweilen in einem weiteren und allgemeinen Sinne gebraucht wird.

Die dritte Aufgabe der Physik besteht darin, die Erscheinungen zu „erklären". Eine Erscheinung erklären heifst hierbei noch nicht die gegenseitige Abhängigkeit der Erscheinungen logisch verständlich zu machen, so dafs man sieht, dafs nach einer gegebenen Erscheinung eine andere bestimmte Erscheinung mit logischer Konsequenz folgen mufs. Eine Erscheinung erklären heifst blofs — den gesetzmäfsigen Zusammenhang derselben mit anderen uns schon bekannten Erscheinungen ermitteln. Somit besteht das Wesen der dritten Aufgabe für die Physik darin, den Zusammenhang zwischen den Erscheinungen aufzudecken und zu erläutern. Nicht in der Zurückführung irgend einer Erscheinung *A* auf eine uns schon bekannte Erscheinung *B* liegt das Schwergewicht der Aufgabe, denn gerade diese Anordnung der Erscheinungen ist eine zufällige und bei einem anderen Verlaufe der historischen Entwickelung unserer Kenntnisse könnte sie auch die entgegengesetzte sein, so dafs wir also die Erscheinung *B* auf die längst bekannte *A* zurückzuführen hätten. Von Wichtigkeit ist allein die Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen den Erscheinungen *A* und *B*. Die grofsen Ereignisse in der Geschichte der Physik sind durch die Entdeckung neuer, unerwarteter Beziehungen zwischen den Erscheinungen gekennzeichnet, z. B. die des Zusammenhanges zwischen den magnetischen und elektrischen, zwischen den elektrischen und optischen Erscheinungen u. s. w.

Die Existenz eines gesetzmäfsigen Zusammenhanges zwischen den zeitlich aufeinander folgenden Erscheinungen ist für uns unbezweifelbar. Die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen, welche die Aufsenwelt charakterisieren, geht im gegebenen Moment gesetzmäfsig aus der Gesamtheit der Erscheinungen, welche sich auf den vorhergehenden Moment beziehen, hervor, wobei eine einzelne, isoliert betrachtete Erscheinung *A* einer bestimmten Gruppe *B* vorhergehender Erscheinungen entspringt. Bedingungsweise kann man die Gruppe *B* als die nächste Ursache der Erscheinung *A*, die Erscheinung *A* aber als die Wirkung der Erscheinungsgruppe *B* bezeichnen. Während wir nun die Erscheinung *A* beobachten, können wir uns zur Aufgabe stellen, die Erscheinungsgruppe *B*, d. h. die Ursache der Erscheinung *A* zu finden. Unzählige Beispiele aus allen Teilen der Physik beweisen, dafs das Aufsuchen der Ursache in der That auf das Aufsuchen des Zusammenhanges zwischen den Erscheinungen hinausläuft. Indem wir die Gruppe *B* als die Ursache von *A* bezeichnen, nehmen wir an, dafs alle übrigen Erscheinungen der Aufsenwelt, die gleichzeitig mit den Erscheinungen *B* auftreten, aber nicht zu dieser Gruppe gehören, auf die Form der Erscheinung *A* ohne Einflufs sind, so dafs mithin keinerlei Veränderung derselben auch eine Veränderung von *A* zu stande bringt.

Die gegenseitigen Beziehungen der Ursache (B) und Wirkung (A) werden durch zwei Thesen oder Axiome geregelt, welche die Grundlage, auf der sich eine Wissenschaft von den Erscheinungen ausbilden kann, abgeben. Es sind das die folgenden zwei Axiome:

I. Wenn aus einer gegebenen Ursache (Gruppe B) eine bestimmte Wirkung (Erscheinung A) hervorgeht, so ist das Auftreten dieser Wirkung eine absolute, unbedingte Notwendigkeit. Damit soll aber nicht gesagt sein, dafs aufser A nicht auch noch eine Reihe anderer Wirkungen (die Erscheinungen C, D u. s. w.) gleichzeitig mit A existieren kann, welche ebenfalls aus derselben Gruppe B entspringt.

Der Sinn dieses Axioms ist, dafs die Erscheinung A in keinem Falle (an der gegebenen Stelle und zu der gegebenen Zeit), nicht einmal in Gedanken, durch eine andere Erscheinung ersetzt werden kann. Dieses Axiom drückt somit aus, dafs in der Welt ein in jedem Falle bestimmter und einzig möglicher gesetzmäfsiger Zusammenhang zwischen zeitlich aufeinander folgenden Erscheinungen besteht. Wenn die Gruppe B und die gesetzmäfsigen Beziehungen bekannt sind, so kann die Erscheinung A mit absoluter Gewifsheit vorausgesagt werden. Als Hülfsmittel für die Vorhersage dient die Mathematik und die deduktive Methode logischen Denkens, auf welcher die Mathematik basiert.

II. Ein und dieselbe Erscheinung A kann als Wirkung aus einer grofsen Zahl verschiedener Erscheinungsgruppen B hervorgehen. Wenn wir die Erscheinung A beobachten und uns eine grofse Zahl gesetzmäfsiger Beziehungen zwischen den Erscheinungen überhaupt bekannt ist, so können wir dennoch nicht wissen, ob beim Zustandekommen von A gerade diese Beziehungen mitgespielt haben oder aber andere uns noch unbekannte. Der Schlufs von B auf A kann von uns bisweilen mit absoluter Gewifsheit gezogen werden; der Schlufs von A auf B aber immer nur mit einem gröfseren oder geringeren Grade von Wahrscheinlichkeit.

Die Physik bestimmt, indem sie die Erscheinungen erforscht und ihren gesetzmäfsigen Zusammenhang aufdeckt, für eine gegebene Erscheinungsgruppe B die einzig möglichen Wirkungen A und sucht für eine gegebene Erscheinung A die am meisten wahrscheinliche Ursachengruppe B. In allen Teilen der Physik finden wir Beispiele für diese beiden Arten von Verstandesschlüssen.

§ 3. Hypothesen. Hypothese nennen wir die Voraussetzung, dafs eine gewisse gesetzmäfsige Abhängigkeit zwischen gegebenen Erscheinungen existiert. Die landläufige Definition der Hypothese als einer Annahme über die Ursache einer gegebenen Erscheinung ist zu eng — denn eine Hypothese ist in allen den Fällen notwendig, wo der Zusammenhang zwischen den Erscheinungen noch nicht festgesetzt

ist und kann sie sich daher ebenso auf die Ursache als auf die Wirkungen beziehen.

Als Hypothese für die Ursache erscheint die Auswahl irgend einer von den möglichen Gruppen B, welche die zu erklärende, d. h. mit anderen gesetzmäfsig zu verknüpfende Erscheinung A zur Folge haben können. Für die Auswahl der Ursachengruppe, für die Schaffung einer Hypothese giebt es keine Regel und kann es keine geben. Um Hypothesen zu ersinnen, bedarf es eines umfangreichen Wissens und einer besonderen geistigen Veranlagung.

Nicht alle Hypothesen haben gleichen Wert und gleiche Existenzberechtigung. Eine gute Hypothese mufs folgende Eigenschaften besitzen: sie mufs möglich sein, mufs mit den beobachteten Erscheinungen im Einklang stehen, mufs möglichst umfassend, einfach und schliefslich — verifizierbar sein.

Die Hypothese mufs also erstens im Bereiche des Möglichen liegen, d. h. sie darf nicht im Widerspruch stehen zu dem, was absolut gewifs ist, was zum festen Fundament der Wissenschaft gehört (z. B. der Erhaltung von Stoff und Energie). Sie mufs mit den Erscheinungen im Einklang stehen, welche letzteren auf Grund der erkannten gesetzmäfsigen Abhängigkeiten aus ihr als einzig mögliche und notwendige Folgen sich ableiten lassen müssen. Der geforderte Umfang der Hypothese mufs ein derartiger sein, dafs jede Hypothese eine möglichst grofse Zahl von Erscheinungen umfafst. Es darf nicht erlaubt sein, für jede einzelne Reihe ähnlicher Erscheinungen A je eine besondere Hypothese aufzustellen, d. h. die Existenz einer besonderen Ursachengruppe B anzunehmen. Je geringer die Zahl ihrer Hypothesen ist, um so höher entwickelt ist eine Wissenschaft. Die Hypothese mufs möglichst einfach sein, denn tief im Bewufstsein der Menschen wurzelt die Überzeugung, dafs die Endursachen der Naturvorgänge äufserst einfach sind. Endlich noch mufs die Hypothese verifizierbar sein, d. h. es mufs die Möglichkeit vorhanden sein, aus ihr auf deduktivem Wege eine grofse Zahl von Schlüssen zu ziehen und durch den Versuch oder die Beobachtung sich von der Richtigkeit dieser Schlüsse zu überzeugen. Man mufs sich also von der realen Existenz dieser Folgerungen überzeugen und dadurch ein Mafs für den Wahrscheinlichkeitsgrad der Hypothese selbst erlangen können.

Hypothesen, welche die genannten Eigenschaften nicht besitzen, sind für die Wissenschaft ein unnützer und schädlicher Ballast und von ihnen gelten die Worte Newtons: hypotheses non fingo[1]).

Aufser den Hypothesen über die Ursache, d. h. über die Existenz der Erscheinungsgruppe, welche die Erscheinung A hervorruft, spielen in der Wissenschaft eine grofse Rolle erstens die Hypothesen über die

---

[1]) Newton, Principia. Glasgow 1871, S. 530.

Existenz eines gesetzmäfsigen Zusammenhanges zwischen zwei bekannten Erscheinungen überhaupt, wobei die Frage, ob diese Erscheinungen sich im Verhältnis von Ursache und Wirkung befinden oder als Wirkungen einer noch unentdeckten Erscheinungsgruppe miteinander parallel verlaufen (Sonnenflecke und Nordlichter), noch offen bleibt, und zweitens Hypothesen über eine besondere Form gesetzmäfsigen Zusammenhanges zwischen solchen Erscheinungen, zwischen denen ein ursächlicher Zusammenhang an sich nicht bezweifelt werden kann (elektrischer Strom und Erwärmung des durchströmten Leiters).

Ohne Hypothese im weiteren Sinne des Wortes, d. h. ohne Voraussetzungen, ist kein einziger Schritt in der Wissenschaft denkbar.

Claude Bernard sagt: „Ein vorausgenommener Gedanke oder eine Hypothese ist der notwendige Ausgangspunkt für jede Experimentaluntersuchung. Ohne denselben ist es undenkbar, irgend etwas Neues zu entdecken." Einem jeden Versuche mufs eine mehr oder weniger klar erkannte Hypothese über die Existenz einer Erscheinung oder eines besonderen quantitativen oder qualitativen Charakters derselben zweifellos vorangehen. Auch in der reinen Mathematik ist ein Fortschritt ohne Hypothese über die Existenz der einen oder anderen Abhängigkeit zwischen den Gröfsen unmöglich. Derselbe Claude Bernard sagt ferner: „Der Mathematiker und der Naturforscher bedienen sich ein und derselben Methode, wenn sie neue Wahrheiten suchen. Durch Induktion kommt man zur Aufstellung von Hypothesen, welche man alsdann prüft." Aber auf die Frage, auf welchem Wege der Induktion man zu solchen Hypothesen gelange, welche einen Fortschritt für die Wissenschaft bedeuten, kann man die Antwort in Keplers Worten finden, welcher sagte: „Mein guter Genius hat mir diesen Gedanken eingegeben."

Besonders mufs man mit Scheinhypothesen vorsichtig sein, die fast immer sehr verwickelt sind und in Form von Voraussetzungen entweder alles oder fast alles das enthalten, was gerade erst durch sie erklärt, d. h. in gesetzmäfsigen Zusammenhang mit anderen Erscheinungen gebracht werden soll. Von diesen anderen Erscheinungen ist in solchen Scheinhypothesen gar nicht die Rede und deshalb können sie auch nicht zu der Erklärung derjenigen Erscheinungen dienen, für welche sie aufgestellt wurden. Sie stellen nichts anderes dar als eine Beschreibung der Erscheinungen, die wegen ihrer Kürze und Anschaulichkeit bisweilen von hohem Nutzen sein kann; aber zu einer tieferen Erkenntnis der Erscheinung können sie nicht dienen. Als Beispiel einer solchen Scheinhypothese kann die Annahme zweier elektrischer Fluida dienen.

Eine gut gewählte Hypothese bildet für den Fortschritt der Wissenschaft ein überaus wichtiges Hülfsmittel; man kann sie auch als Arbeitshypothese bezeichnen; die Rolle aber, welche dieses Hülfsmittel

zu spielen hat, darf eine nur vorübergehende sein; je eher die Hypothese aufhört eine Hypothese zu sein, um so besser. Der Versuch und nur er kann zu einem Ziele führen. Die Vergleichung der in der Aufsenwelt wirklich auftretenden Erscheinungen mit jenen, welche auf deduktivem Wege als notwendige Folge der aufgestellten Hypothese abgeleitet werden, kann entweder die zweifellose Unrichtigkeit der Hypothese, von welcher man sich alsdann loszusagen hat, darthun, oder sie kann als Bestätigung für die unanzweifelbare Richtigkeit derselben dienen, in welchem Falle die Hypothese als solche zu existieren aufhört; schliefslich kann jede Vergleichung den Wahrscheinlichkeitsgrad oder Wahrhaftigkeitsgrad der Hypothese erhöhen. Eine Hypothese, welche nicht direkt verifiziert werden kann, sondern blofs auf dem Umwege des Vergleichens ihrer Folgen mit den Versuchsergebnissen, kann auch niemals zur Gewifsheit werden. Nur durch die unbegrenzte Mehrung qualitativ verschiedener Beobachtungsergebnisse, welche alle im Einklange mit der Hypothese stehen, nähert sich ihr Wahrscheinlichkeitsgrad unbegrenzt der Gewifsheit (wie z. B. die Annahme der Erdbewegung um ihre Achse und um die Sonne, der Erhaltung der Energie, der Existenz des Äthers). Das Aufkommen einer guten Hypothese kann die Wissenschaft mächtig fördern; aber viel wichtiger ist das Verschwinden einer Hypothese und die grofsartigsten Momente in der Geschichte der Wissenschaft sind gerade durch den Sturz von Hypothesen gekennzeichnet. Eine ebensolche Bedeutung hat die Verschmelzung von zwei oder mehreren Hypothesen zu einer einzigen. Je geringer die Zahl der Hypothesen ist, um so höher steht die Entwicklung der Wissenschaft. Die Wissenschaft strebt nicht nach Aufstellung, sondern nach Beseitigung der Hypothesen — sagt Ostwald. Ihre ideale Vollendung würde die Wissenschaft erreicht haben, wenn nur eine einzige Hypothese übrig geblieben wäre, aus welcher als notwendige Folge sich der gesetzmäfsige Zusammenhang aller Erscheinungen der Aufsenwelt ergeben würde.

§ 4. **Der Äther.** Das Studium der verschiedenartigsten Erscheinungen der Aufsenwelt hat seit lange zu der Annahme geführt, dafs aufser der Materie, deren Eigenschaften wir von Kindheit an als die Ursache sehr vieler um uns her vorgehender Erscheinungen zu betrachten gewohnt sind, und welche an den Punkten des Raumes existiert, in denen wir unsere Empfindungen objektivieren, und welche sich in besonders verständlicher Weise durch ihre Wirkung auf unseren Tastsinn kundgiebt, falls wir in den von ihr eingenommenen Raum einzudringen versuchen — dafs aufser dieser Materie noch andere Träger für die Erscheinungen vorhanden sind, die wir zur Zeit Agentien nennen. Sie hiefsen früher Imponderabilien, d. h. gewichtslose Wirkungsursachen oder Substanzen. Diese Bezeichnung aber beruht jedenfalls auf einem

Mifsverständnis, denn aus dem Umstande, dafs unter den gegebenen Verhältnissen das Gewicht eines Agens nicht ermittelt werden kann, folgt noch nicht, dafs dieses Agens an sich jener Eigenschaft der Materie, die man ihr Gewicht nennt, entbehrt. So hat doch beispielsweise Wasser im Wasser selbst gewissermafsen kein Gewicht und doch zählt es niemand zu den Imponderabilien. Indem man die Existenz dieser Agentien zugiebt, kann man zugleich aus den Versuchen schliefsen, dafs sie „unwägbar“ sind, d. h. dank der Beschaffenheit unserer Versuche ihr Gewicht nicht kundzugeben vermögen.

In früherer Zeit nahm man die Existenz von sehr verschiedenen Agentien an: zwei elektrische, zwei magnetische, den Wärmestoff und das Agens, welches die Ursache der Lichterscheinungen bildet; dies entspricht der Annahme von sechs verschiedenen Hypothesen. Mit der Weiterentwicklung der Wissenschaft verminderte sich die Zahl der hypothetischen Materien und heutzutage haben wir statt jener sechs hypothetischen Materien nur eine einzige. Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese von der Existenz dieses einen Agens grenzt aufserordentlich nahe an Gewifsheit.

Dieses Agens wollen wir den Äther nennen. Wir nehmen an, dafs der Äther den Raum zwischen den Weltkörpern erfüllt, und dafs es in den Teilen des Universums, welche unserer Beobachtung zugänglich sind, keinen Ort giebt, welcher den Äther nicht enthält. Auf die Eigenschaften, welche hypothetisch dem Äther zugeschrieben werden, und durch welche er sich von der gewöhnlichen Materie unterscheiden soll, wollen wir hier nicht eingehen.

Obgleich es sich von selbst versteht, dafs der Äther ebenfalls Materie ist und zwar in dem Sinne, in welchem diese von uns definiert wurde, so werden wir im folgenden der Bequemlichkeit halber, wie dies jetzt allgemein geschieht, die Ausdrücke „Materie“ und „Äther“ einander gegenüberstellen und den ersten für die Materie gebrauchen, welche mehr oder weniger unmittelbar auf unseren Tastsinn wirkt. Der Äther oder die einen Teil des Raumes erfüllende Materie stellt dasjenige dar, was wir Medium nennen.

Im zweiten Abschnitte werden wir uns näher mit den Bewegungserscheinungen beschäftigen und werden sehen, dafs die sehr kleinen Teile, aus welchen wir uns die Materie bestehend denken, ihren Ort im Raume verändern können. Für die Materie existiert eine gewisse Anordnung der Teilchen, welche wir die normale nennen und welche dem Falle entspricht, in welchem zwischen dieser Materie und der übrigen Welt sich keinerlei Zusammenhang kundgiebt, ausgenommen derjenige, welcher unter keinerlei Bedingung aufhören kann. Beim Auftreten neuer Bedingungen kann die Anordnung der Stoffteile aus dem normalen Zustande in einen anomalen übergehen. Die Erscheinung, dafs eine neue Anordnung der Teile auftritt, welche unbestimmt lange be-

stehen kann, die aber, sobald alle jene Ursachen, welche sie hervorriefen (die neuen Beziehungen zur übrigen Welt) verschwunden sind, in die normale Anordnung zurückkehrt, nennt man Deformation.

Ein anderer überaus wichtiger Fall einer Veränderung in der normalen Anordnung der Stoffteile liegt vor, wenn ein Teil der Materie sich zu bewegen beginnt, indem er ununterbrochen seinen Ort ändert, sich dabei aber nur wenig aus der normalen Lage entfernt. Die Erscheinung, bei welcher eine solche Bewegung zustande kommt, heifst Perturbation oder Störung. Sehr oft tritt folgende Erscheinung auf: In irgend einem Teile der Materie entsteht eine Störung, darauf entsteht eine ebensolche in dem benachbarten Teile der Materie, darauf in der Nachbarschaft dieses Teiles u. s. w. Solch eine Erscheinung nennt man Ausbreitung der Störung innerhalb der Materie. Deformationen und Störungen sind, wie aus den Definitionen hervorgeht, von einer Veränderung in der gegenseitigen Gruppierung der Stoffteile begleitet. Es kommen indes auch Fälle von Bewegung der Materie ohne eine solche Veränderung der relativen Lage ihrer Teile vor. In diesem Falle sagen wir, dafs sich die betreffende Materie als Ganzes bewegt.

Auch für den Äther giebt es eine normale Anordnung der Teile, und sind Deformationen und Störungen möglich; ein gewaltig grofses Gebiet von Erscheinungen (des Lichtes, der Elektricität und des Magnetismus) befindet sich in gesetzmäfsigem Zusammenhange mit solchen Deformationen und Störungen im Äther, welche deren Urquell bilden. Die Mitwirkung des Äthers an diesen Erscheinungen unterliegt keinem Zweifel, es ist aber aufserdem sehr wahrscheinlich, dafs er eine wichtige, wenn auch noch nicht unzweifelhaft nachgewiesene Rolle bei anderen — und vielleicht bei allen physikalischen Erscheinungen ohne Ausnahme spielt. Wir können sonach jetzt die Aufgabe der Physik genauer und zwar folgendermafsen formulieren: sie besteht darin, den gesetzmäfsigen Zusammenhang zwischen den Erscheinungen, die in der nichtorganisierten Materie und im Äther vor sich gehen, zu finden, wobei eine möglichst kleine Zahl von Hypothesen über die Eigenschaften des Äthers und der Materie zu Hülfe zu nehmen ist.

Die Geschichte der Physik des letzten Decenniums läfst uns vermuten, dafs die Deformationen und Perturbationen der Materie und des Äthers so aufserordentlich eng mit den uns umgebenden Erscheinungen verknüpft sind, dafs diese Erscheinungen an sich nichts anderes darstellen als zahlreiche und verschiedene Formen, in denen die genannten Veränderungen, die in der Materie und im Äther vor sich gehen und auf unsere Sinnesorgane einwirken, von uns objektiviert werden.

§ 5. Einteilung der Physik. Zu Anfang des § 2 hatten wir die Physik im weitesten Sinne des Wortes als die Wissenschaft von den in der nichtorganisierten Materie auftretenden Erscheinungen definiert. Die fortschreitende Entwicklung dieser Wissenschaft hat mit der Zeit dazu geführt, dafs sich aus ihr umfangreiche Teile abgesondert haben, welche jeder für sich eine bestimmte charakteristische Erscheinungsgruppe zum Gegenstande haben und zu selbständigen Wissenschaften angewachsen sind. Hierher gehören die Mechanik, Astronomie, Chemie, Mineralogie, Geologie und Meteorologie. Im höchsten Grade bedeutsam ist es, dafs die Chemie und Astronomie, welche sich vom Zusammenhange mit der Physik bereits losgesagt hatten, in letzter Zeit so ergiebig aus dem reichen Vorrat wissenschaftlichen Materials derselben zu schöpfen angefangen haben, dafs sich umfangreiche, eine Zwischenstellung einnehmende Disciplinen — die physikalische Chemie und die Astrophysik — entwickelt haben. Diese wennschon einseitige Rückkehr zum alten erprobten Mutterboden hat eine reiche Ernte, eine schnelle Entwicklung jener neuen Zweige der Chemie und Astronomie zur Folge gehabt.

Von der Physik sondert sich ferner eine ganze Reihe von Wissenschaften ab, welche zum Zweck hat, aus dem in ihr enthaltenen wissenschaftlichen Material praktischen Gewinn für die Menschheit zu ziehen. Hierher gehört fast alles das, worauf sich die heutige Kultur stützt: die angewandte Mechanik, die Dampftechnik und Elektrotechnik mit ihren umfangreichen Unterabteilungen der Telegraphie, Telephonie, elektrischen Beleuchtung, Galvanoplastik, Kraftübertragung u. s. w.; hierher kann man auch die Photographie rechnen. Alle diese Wissenschaften stützen sich ganz und gar auf die Physik.

Das Material, welches gegenwärtig den wissenschaftlichen Inhalt der Physik darstellt, verteilt man gewöhnlich auf Teile oder Abschnitte, je nach dem speciellen Charakter oder nach einigen äufseren resp. inneren Merkmalen derjenigen Erscheinungen, denen jeder Teil gewidmet ist. Aber eine solche Einteilung hat stets den Charakter des Künstlichen; es ist nicht möglich, eine auch nur irgendwie scharfe Grenze zwischen den einzelnen Abschnitten zu ziehen, und es mufs hierbei hinzugefügt werden, dafs die sich beständig verringernde Möglichkeit einer strengen Sonderung der einzelnen Abschnitte der Physik gerade das wichtigste Kriterium für deren fortschreitende Entwicklung abgiebt. Beständig werden gesetzmäfsige Beziehungen zwischen den verschiedenartigsten Erscheinungen, welche früher zu verschiedenen Abschnitten der Physik gehörten, entdeckt. Gerade hierdurch werden auch die Grenzen zwischen den einzelnen Abschnitten weggeräumt, die bisweilen so vollkommen ineinander fliefsen, dafs aus mehreren Abschnitten ein einziger sich bildet; in anderen Fällen werden diese Grenzen gewissermafsen undeutlich gemacht oder es erscheinen neue Zwischenabschnitte, die auf

dem Grenzgebiete zweier Hauptabschnitte liegen. Die Kompliziertheit mancher Erscheinungen, welche sich uns als aus einer Gesamtheit mehrerer Erscheinungen bestehend darstellen, erschwert ebenfalls ihre Klassifizierung nicht wenig.

Bisweilen teilt man die Physik in zwei Teile: die Experimentalphysik und die theoretische Physik, indem man zur ersten gröfstenteils das wissenschaftliche Material gehören läfst, welches durch den Versuch erlangt werden kann, und zur letzteren gröfstenteils alles dasjenige rechnet, was sich auf die Deduktion der Erscheinungen selbst bezieht, welche Deduktion sich auf eine bestimmte Hypothese und auf festgestellte gesetzmäfsige Beziehungen oder nur auf die letzteren gründet. Indem sie die Notwendigkeit der beobachteten Erscheinungen als Folgen des Erkannten oder Angenommenen darthut, löst die theoretische Physik wiederum durch Deduktion die Frage nach der Form, die eine Erscheinung unter Umständen, unter denen sie noch nicht beobachtet war, annehmen mufs — mit anderen Worten, sie sagt eine Erscheinung voraus. Indes ist es vollkommen unmöglich, eine auch nur einigermafsen konsequente Teilung der Physik in einen experimentellen und theoretischen Teil durchzuführen, denn bei jeder Gruppe von physikalischen Erscheinungen müssen Versuch und Theorie immer Hand in Hand gehen. Die Theorie setzt uns in den Stand, die beobachteten Erscheinungen zu vereinen, untereinander zu verbinden, und giebt uns, was besonders wichtig ist, die Möglichkeit, diejenigen Wege, genauer gesagt diejenigen Versuche ausfindig zu machen, welche zur Prüfung der Hypothesen dienen können, d. h. zur Vermehrung oder Verminderung ihres Wahrscheinlichkeitsgrades. Im weiteren Sinne des Wortes kann die Theorie, während sie ihren deduktiven Charakter beibehält, auch ihres wichtigsten Werkzeugs, der Mathematik, entraten; Faraday war kein Mathematiker und dennoch mufs man ihn für den gröfsten Theoretiker halten. Gegenwärtig ist jedoch die Rolle der mathematischen Analyse in der theoretischen Physik von hervorragender Bedeutung geworden, und ohne dieselbe ist ein Fortschritt der Physik in vielen wichtigen Abschnitten derselben wohl schwer denkbar. Wenn die Versuche allein und ohne theoretische Verarbeitung nur in seltenen Fällen mehr geben können als ein rohes, unzusammenhängendes Material, so kann auch die „theoretische Physik" allein, wenn nicht allseitig von Versuchen umgeben, von denen sie ja ausgeht und durch die sie kontrolliert wird, niemals den Nährboden für eine zweckentsprechende Weiterentwicklung der Wissenschaft abgeben. Eine solche Theorie ist ohne Fundament; sie kann zwar viel Anziehendes besitzen, aber sie ist dafür auch gefährlich, denn die gewaltige, zu ihrem Aufbau verwendete Mühe und Arbeit kann durch einen einzigen nachträglich angestellten Versuch völlig verloren gehen, wenn derselbe die Nichtübereinstimmung auch nur einer Folgerung aus dieser Theorie mit der Wirk-

lichkeit beweist. Und solche Fälle hat es in der Geschichte der Physik gegeben: umfangreiche theoretische Untersuchungen vieler Gelehrten haben jeglichen Wert für die Wissenschaft verloren, sind vor einem unerbittlichen, durch das Experiment entdeckten Faktum zusammengestürzt (wie z. B. die Emanationstheorie des Lichtes). Experiment und Theorie müssen vereint die physikalischen Untersuchungen bilden und deshalb trifft die Einteilung der Physik in einen experimentellen und einen theoretischen Teil in der Praxis auf unüberwindliche Schwierigkeiten.

Es ist aber doch die Möglichkeit vorhanden, aus der Physik einen Teil auszusondern, zu welchem sehr verschiedenartige Fragen gehören, wobei als Verbindungsglied nur die besondere Art erscheint, wie die Fragen gestellt und beantwortet werden. Diesen Teil kann man die mathematische Physik nennen; sie unterscheidet sich sehr wesentlich von der theoretischen Physik. Die mathematische Physik geht von irgend einer durch den Versuch völlig erhärteten Thatsache aus, welche irgend einen gesetzmäfsigen Zusammenhang zwischen den Erscheinungen ausdrückt. Diesen Zusammenhang kleidet sie in mathematische Form und verwandelt sich sodann gewissermafsen in die reine Mathematik, indem sie ausschliefslich mit Hülfe der mathematischen Analyse die aus den grundlegenden Sätzen hervorgehenden Folgerungen untersucht. Da die mathematische Physik von experimentell festgestellten Thatsachen ausgeht, enthält sie nichts Hypothetisches und sind deshalb ihre Resultate unvergänglich. Die einzelnen Gebiete der theoretischen Physik können, da sie sich auf Hypothesen stützen, zu Grunde gehen; die Gebiete der mathematischen Physik bleiben unerschütterlich fest bestehen, denn ihnen dient als Fundament die Thatsache, welche als solche bestehen bleibt, wie sich auch im Laufe der Zeit die wissenschaftliche Anschauung von ihrem tieferen Wesen ändern mag. Hierher gehören die mathematischen Abschnitte der Lehren von der Wärmeleitung, von der Elasticität, von der Elektricität (die Potentialtheorie und verschiedene Anwendungen derselben), vom Magnetismus (Wechselwirkung und Induktion), vom elektrischen Strom u. s. w. Die einzelnen Teile der mathematischen Physik haben mit der Physik als der Lehre von den Erscheinungen nur wenig Berührungspunkte gemein; aber diese Berührungspunkte dienen ihnen als unerschütterliche Stützpunkte. Die mathematische Physik gehört eher zur Mathematik als zur Physik.

In der neueren Zeit hat man angefangen, die Physik bisweilen in eine Physik der Materie und eine Physik des Äthers zu teilen. Diese Einteilung kann man keine glückliche nennen, da uns die Rolle, welche der Äther in der Mehrzahl der Erscheinungen spielt, zwar vorläufig noch unbekannt ist, woraus aber wohl kaum der an sich wenig wahrscheinliche Satz folgt, dafs er in diesen Erscheinungen in Wirk-

lichkeit keine Rolle spielt. Zur Physik des Äthers hat man demnach alle jene Erscheinungen zu rechnen, für welche nach dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft die Teilnahme des Äthers zweifellos ist, wobei — und das ist überaus wesentlich — die Teilnahme der Materie an diesen Erscheinungen ebenso sicher ist, denn uns ist bis jetzt nur eine einzige Erscheinung bekannt, an welcher die Materie keinen Anteil nimmt, nämlich die Fortpflanzung von Störungen durch den nur vom Äther erfüllten Raum (wir werden sehen, dafs Deformationen des Äthers sich auf die Materie „stützen" müssen). Mit der Weiterentwicklung der Wissenschaft wird die Rolle, welche der Äther spielt, für eine immer gröfsere Zahl von Erscheinungen klar, die Scheidewand zwischen jenen beiden Abschnitten der Physik immer weiter und weiter gerückt werden und schliefslich wird die „Physik der Materie" vollkommen verschwinden. Hieraus folgt, dafs die erwähnte Einteilung der Physik nicht haltbar ist. Die Physik ist ein einheitliches Ganzes, sie ist eben die Physik „der Materie und des Äthers".

Wir werden in diesem Buche die Physik in Abschnitte einteilen, welche von der Bewegung (Mechanik), den Molekularkräften, dem Schalle (Akustik), der strahlenden Energie, der Wärme, dem Magnetismus und der Elektricität handeln und, wo es erforderlich scheint, darauf hinweisen, dafs es eine scharfe Grenze zwischen diesen Abschnitten nicht giebt.

§ 6. **Physikalische Gröfsen.** Eine Gröfse wird dasjenige genannt, was man sich quantitativ veränderlich denken kann.

Das Studium der physikalischen Erscheinungen und der sie verknüpfenden gesetzmäfsigen Beziehungen hat es notwendig gemacht, in die Wissenschaft die Vorstellungen von einer sehr grofsen Zahl verschiedenartiger Gröfsen einzuführen, welche entweder die speciellen Eigenschaften dieses oder jenes Stoffes oder aber die Eigentümlichkeiten der Erscheinungen selbst charakterisieren. Diese Gröfsen werden wir physikalische Gröfsen nennen.

Man hat diejenigen Gröfsen, von denen jedermann einen Begriff oder eine gewisse feste Vorstellung zu eigen hat, streng von den in die Wissenschaft neu eingeführten zu unterscheiden. Die Gröfsen dieser ersten Art heifsen ursprüngliche; sie können erstlich einer Definition nicht unterliegen, denn jede Definition kann und mufs durch den Hinweis auf den Zusammenhang zwischen der zu definierenden Gröfse und etwas schon Bekanntem, d. h. schon vorher einer Definition unterworfenen geschehen. Die Gröfsen der ersten Art aber entsprechen ursprünglichen Begriffen, von denen man auszugehen hat; sie bedürfen auch keiner Definition, da ihre Bedeutung einem jeden a priori klar ist. Die Eigenschaften dieser Gröfsen werden durch diejenige Vorstellung bestimmt, welche von allen mit ihrer Nennung verbunden werden, und

deshalb hat jedermann den Hinweis auf diese Eigenschaften **in sich selbst** zu suchen. Zu den Gröfsen dieser Art gehören jedenfalls:

1. Die lineare, oberflächliche und räumliche Ausdehnung oder genauer: die Länge einer Geraden, der Inhalt einer geradlinig begrenzten Fläche und das Volumen eines von Ebenen begrenzten Raumteiles. Die Länge einer krummen Linie entspricht schon einem nicht ursprünglichen Begriffe und bedarf daher der Definition.
2. Die Zeit.
3. Der Druck (im Sinne einer Muskelempfindung).
4. Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Wir lassen die Frage nach der Vollständigkeit oder Unvollständigkeit dieser Aufzählung unerörtert; Gröfsen, von denen nicht jedermann einen bereits fertigen Begriff hat, welche wir in die Wissenschaft einführen, bedürfen einer Definition und man hat mit der gröfsten Aufmerksamkeit darauf zu achten, dafs diese Definition so genau wie möglich sei; sie mufs derart sein, dafs jede Möglichkeit eines Mifsverständnisses und jede Zweideutigkeit für sie ausgeschlossen ist. Die Definition mufs sich daher durch Vollständigkeit auszeichnen, d. h. in ihr mufs alles das enthalten sein, was als unterscheidendes Merkmal der zu definierenden Gröfse dienen kann.

Nachdem die Definition der betreffenden Gröfse gegeben ist, hat man sich aufs strengste davor zu hüten, dafs man ihr keine solchen Eigenschaften beilegt, welche aus der Definition selbst nicht folgen. Besonders leicht können Fehler dieser Art vorkommen, wenn mit der unglücklich gewählten Bezeichnung für die Gröfse unwillkürlich die Vorstellung von dieser oder jener Eigenschaft derselben sich verbindet.

Gröfsen, welche ein und derselben Definition entsprechen und sich nur qualitativ voneinander unterscheiden, heifsen **gleichartige** Gröfsen. Solche Gröfsen können miteinander verglichen werden, oder, wie man sich sonst noch ausdrückt, sie können **gemessen** werden. Eine Gröfse messen heifst bestimmen, wieviel mal in ihr eine gewählte Gröfse derselben Art enthalten ist, welche in diesem Falle als **Einheit dieser Art Gröfse** (Einheit des Gewichtes, Einheit des Widerstandes u. s. w.) bezeichnet wird. Von der Wahl dieser Mafseinheiten wird weiter unten ausführlich die Rede sein; es sei hier bemerkt, dafs man im allgemeinen danach strebt, dafs für jede Art von Gröfsen eine bestimmte Einheit mit ihren nach dem Decimalsystem geteilten Vielfachen und Unterabteilungen festgesetzt und allgemein angenommen wird. Die Vergleichung zweier Gröfsen kann nach zwei Methoden vorgenommen werden: entweder wird eine jede von ihnen einzeln durch die festgesetzte Einheit gemessen und es werden sodann die erhaltenen zahlenmäfsigen Resultate verglichen oder es werden zwei Gröfsen unmittelbar miteinander

verglichen, wobei dann faktisch die eine von ihnen, wenn auch n
vorübergehend, die Rolle einer Maſseinheit spielt.

Die Wahl der Einheit für jede Gröſsenart ist an sich durch nich
vorgeschrieben und wir können jede beliebige Gröſse der gegeben
Art als Einheit annehmen. Wir werden indes später sehen, daſs ma
sich gegenwärtig aus verschiedenen Gründen von einer Willkür b
Wahl dieser Einheiten losgesagt hat. Man hat sich nämlich dahin g
einigt, sie auf Grund einer bestimmten Regel auszuwählen, welche u
in den Stand setzt, die Einheiten aller nur möglichen Gröſsen, welc
in der Physik vorkommen, miteinander zu einem harmonischen Ganze
dem System der Einheiten, zu verbinden.

Die Ausmessung der physikalischen Gröſsen, d. h. die Vergleichu
einer gegebenen Gröſse mit der festgesetzten Einheit oder die unmitte
bare Vergleichung zweier gegebenen Gröſsen ist eine Aufgabe, welc
auf experimentellem Wege gelöst wird und zwar mit besonderen I
strumenten und nach bestimmten zu diesem Zwecke erfundenen un
ausgearbeiteten Methoden. Je nach der Art der auszumessenden Gröſ
können Instrumente und Methoden sehr voneinander verschieden sei
Die Genauigkeit des bei der Messung erhaltenen Resultates hängt vo
den verschiedenen, bisweilen recht individuellen Eigenschaften de
Meſsinstrumente, der Meſsmethode und von Geschick und Übung de
die Messung Ausführenden ab.

Als Resultat der vorgenommenen Messung erhält man eine Zah
welche angiebt, wieviel mal die gewählte Einheit in der auszumessende
Gröſse enthalten ist. Diese Zahl heiſst der Zahlenwert der gemessene
physikalischen Gröſse. Wenn man die gesetzmäſsige Abhängigkeit de
Erscheinungen zu untersuchen und auszudrücken hat, ersetzt man g
wöhnlich die arithmetische Methode durch die algebraische, indem ma
den Zahlenwert der Gröſse durch einen Buchstaben bezeichnet. Ma
muſs es aber wohl festhalten, daſs diese Buchstaben nicht di
Gröſsen selbst, sondern ausschlieſslich ihre Zahlenwer
darstellen, welche bei einer eventuell bloſs in Gedanken ausgeführte
Ausmessung der Gröſsen durch gewisse Einheiten erhalten worden sin
Vergiſst man dies, so kann man zu durchaus falschen Resultaten g
langen; die Möglichkeit fehlerhafter Vorstellungen rührt hierbei d
her, daſs man jenen Buchstaben die Benennungen der Gröſsen selb
beilegt. Man sagt z. B. die Länge l, die Wärmemenge q, die Stro
stärke i, während doch l nicht die Länge, q nicht die Wärmemen
und i nicht die Stromstärke selbst bedeuten: l, q und i sind blo
Zahlen, welche angeben, wieviel Einheiten der Länge, Wärme u
Stromstärke in der betrachteten Länge, Wärmemenge und Stromstärk
enthalten sind.

Der Zahlenwert einer jeden Gröſse ist der Gröſse der ge
wählten Einheit umgekehrt proportional Denn wird die Ei

heit n mal grösser, so wird die Zahl, welche angiebt, wieviel mal die gegebene Grösse diese Einheit enthält, n mal kleiner. Dafs jene Buchstaben, von denen oben die Rede war, z. B. die angeführten Buchstaben l, q und i, nicht die physikalischen Grössen selbst, sondern blofs deren Zahlwerte bezeichnen, wird daraus klar, dafs ihr Wert sich zugleich mit der Wahl der Einheit ändert; wenn man dagegen unter q eine physikalische Grösse selbst, die in jedem Einzelfalle gegeben und offenbar von der Wahl der Mafseinheit unabhängig ist, sich gedacht hätte, so würde auch der Wert des Buchstaben q sich nicht zugleich mit dieser Einheit ändern.

Im Folgenden werden wir bisweilen solchen Grössen begegnen, deren Zahlenwert in jedem Sonderfalle nicht von der Wahl irgend welcher Mafseinheiten abhängt; man nennt sie abstrakte oder (weniger zutreffend) **absolute Zahlen**. Auch diese Zahlen können durch Buchstaben bezeichnet werden. In allen Fällen dieser Art ist es jedoch möglich, darzuthun, dafs man es mit einer physikalischen Grösse zu thun hat, für welche die Einheit ein für allemal festgesetzt ist. Betrachten wir das folgende Beispiel. Aus der elementaren Physik ist es bekannt, dafs man unter dem Brechungsquotienten eines Stoffes das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels eines Strahles zum Sinus des Brechungswinkels beim Übergang desselben aus dem Vakuum (d. h. aus dem Äther) in jenen Stoff versteht. Durch diese Definition erhält der Brechungsquotient n vollkommen den Charakter einer unbenannten Zahl (als Verhältnis zweier unbenannten Zahlen) und fehlt ihm vollkommen der Begriff einer Einheit, von deren Wahl sein Zahlenwert abhängen könnte. Indes die Konstanz der Zahlenwerte für den Brechungsquotienten ist schon keine absolute mehr, wenn man bedenkt, dafs das „Vakuum“ ziemlich willkürlich gewählt war, und dafs sich die Zahlenwerte aller Grössen n verändern, sobald man sie nicht auf den Übergang aus dem Vakuum, sondern aus der Luft bezieht. Man kann indes weiter gehen und folgende Betrachtung anstellen: Die Materie hat unter anderem die Fähigkeit, auf den Lichtstrahl, der sich in ihr ausbreitet, einzuwirken. Diese Eigenschaft wird ähnlich vielen anderen durch eine gewisse physikalische Grösse bestimmt, welche für die verschiedenen Stoffe qualitativ verschieden ist. Wenn man nun diese Grösse für den Äther als Einheit annimmt, so findet man, dafs ihr Zahlenwert für die verschiedenen Stoffe gleich dem Verhältnisse der erwähnten beiden Sinusse wird. Die Theorie giebt uns in diesem Falle die Möglichkeit, noch weiter zu gehen und diese Grösse genauer zu bestimmen. Die letztere ist nämlich nichts anderes als die Langsamkeit (im Gegensatze zur Geschwindigkeit) der Lichtausbreitung im gegebenen Stoffe, und es ist folglich klar, dafs ihr Zahlenwert in jedem gegebenen Falle von der Wahl desjenigen Stoffes abhängt, für welchen diese Langsamkeit als Einheit angenommen wurde. Nur in dem Falle, wo man als

verglichen, wobei dann faktisch die eine von ihnen, wenn auch nur vorübergehend, die Rolle einer Maſseinheit spielt.

Die Wahl der Einheit für jede Gröſsenart ist an sich durch nichts vorgeschrieben und wir können jede beliebige Gröſse der gegebenen Art als Einheit annehmen. Wir werden indes später sehen, daſs man sich gegenwärtig aus verschiedenen Gründen von einer Willkür bei Wahl dieser Einheiten losgesagt hat. Man hat sich nämlich dahin geeinigt, sie auf Grund einer bestimmten Regel auszuwählen, welche uns in den Stand setzt, die Einheiten aller nur möglichen Gröſsen, welche in der Physik vorkommen, miteinander zu einem harmonischen Ganzen, dem System der Einheiten, zu verbinden.

Die Ausmessung der physikalischen Gröſsen, d. h. die Vergleichung einer gegebenen Gröſse mit der festgesetzten Einheit oder die unmittelbare Vergleichung zweier gegebenen Gröſsen ist eine Aufgabe, welche auf experimentellem Wege gelöst wird und zwar mit besonderen Instrumenten und nach bestimmten zu diesem Zwecke erfundenen und ausgearbeiteten Methoden. Je nach der Art der auszumessenden Gröſse können Instrumente und Methoden sehr voneinander verschieden sein. Die Genauigkeit des bei der Messung erhaltenen Resultates hängt von den verschiedenen, bisweilen recht individuellen Eigenschaften der Meſsinstrumente, der Meſsmethode und von Geschick und Übung des die Messung Ausführenden ab.

Als Resultat der vorgenommenen Messung erhält man eine Zahl, welche angiebt, wieviel mal die gewählte Einheit in der auszumessenden Gröſse enthalten ist. Diese Zahl heiſst der Zahlenwert der gemessenen physikalischen Gröſse. Wenn man die gesetzmäſsige Abhängigkeit der Erscheinungen zu untersuchen und auszudrücken hat, ersetzt man gewöhnlich die arithmetische Methode durch die algebraische, indem man den Zahlenwert der Gröſse durch einen Buchstaben bezeichnet. Man muſs es aber wohl festhalten, daſs diese Buchstaben nicht die Gröſsen selbst, sondern ausschlieſslich ihre Zahlenwerte darstellen, welche bei einer eventuell bloſs in Gedanken ausgeführten Ausmessung der Gröſsen durch gewisse Einheiten erhalten worden sind. Vergiſst man dies, so kann man zu durchaus falschen Resultaten gelangen; die Möglichkeit fehlerhafter Vorstellungen rührt hierbei daher, daſs man jenen Buchstaben die Benennungen der Gröſsen selbst beilegt. Man sagt z. B. die Länge l, die Wärmemenge q, die Stromstärke i, während doch l nicht die Länge, q nicht die Wärmemenge und i nicht die Stromstärke selbst bedeuten; l, q und i sind bloſs Zahlen, welche angeben, wieviel Einheiten der Länge, Wärme und Stromstärke in der betrachteten Länge, Wärmemenge und Stromstärke enthalten sind.

Der Zahlenwert einer jeden Gröſse ist der Gröſse der gewählten Einheit umgekehrt proportional. Denn wird die Ein-

heit n mal gröſser, so wird die Zahl, welche angiebt, wieviel mal die gegebene Gröſse diese Einheit enthält, n mal kleiner. Daſs jene Buchstaben, von denen oben die Rede war, z. B. die angeführten Buchstaben l, q und i, nicht die physikalischen Gröſsen selbst, sondern bloſs deren Zahlwerte bezeichnen, wird daraus klar, daſs ihr Wert sich zugleich mit der Wahl der Einheit ändert; wenn man dagegen unter q eine physikalische Gröſse selbst, die in jedem Einzelfalle gegeben und offenbar von der Wahl der Maſseinheit unabhängig ist, sich gedacht hätte, so würde auch der Wert des Buchstaben q sich nicht zugleich mit dieser Einheit ändern.

Im Folgenden werden wir bisweilen solchen Gröſsen begegnen, deren Zahlenwert in jedem Sonderfalle nicht von der Wahl irgend welcher Maſseinheiten abhängt; man nennt sie abstrakte oder (weniger zutreffend) absolute Zahlen. Auch diese Zahlen können durch Buchstaben bezeichnet werden. In allen Fällen dieser Art ist es jedoch möglich, darzuthun, daſs man es mit einer physikalischen Gröſse zu thun hat, für welche die Einheit ein für allemal festgesetzt ist. Betrachten wir das folgende Beispiel. Aus der elementaren Physik ist es bekannt, daſs man unter dem Brechungsquotienten eines Stoffes das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels eines Strahles zum Sinus des Brechungswinkels beim Übergang desselben aus dem Vakuum (d. h. aus dem Äther) in jenen Stoff versteht. Durch diese Definition erhält der Brechungsquotient n vollkommen den Charakter einer unbenannten Zahl (als Verhältnis zweier unbenannten Zahlen) und fehlt ihm vollkommen der Begriff einer Einheit, von deren Wahl sein Zahlenwert abhängen könnte. Indes die Konstanz der Zahlenwerte für den Brechungsquotienten ist schon keine absolute mehr, wenn man bedenkt, daſs das „Vakuum“ ziemlich willkürlich gewählt war, und daſs sich die Zahlenwerte aller Gröſsen n verändern, sobald man sie nicht auf den Übergang aus dem Vakuum, sondern aus der Luft bezieht. Man kann indes weiter gehen und folgende Betrachtung anstellen: Die Materie hat unter anderem die Fähigkeit, auf den Lichtstrahl, der sich in ihr ausbreitet, einzuwirken. Diese Eigenschaft wird ähnlich vielen anderen durch eine gewisse physikalische Gröſse bestimmt, welche für die verschiedenen Stoffe qualitativ verschieden ist. Wenn man nun diese Gröſse für den Äther als Einheit annimmt, so findet man, daſs ihr Zahlenwert für die verschiedenen Stoffe gleich dem Verhältnisse der erwähnten beiden Sinusse wird. Die Theorie giebt uns in diesem Falle die Möglichkeit, noch weiter zu gehen und diese Gröſse genauer zu bestimmen. Die letztere ist nämlich nichts anderes als die Langsamkeit (im Gegensatze zur Geschwindigkeit) der Lichtausbreitung im gegebenen Stoffe, und es ist folglich klar, daſs ihr Zahlenwert in jedem gegebenen Falle von der Wahl desjenigen Stoffes abhängt, für welchen diese Langsamkeit als Einheit angenommen wurde. Nur in dem Falle, wo man als

Einheit die „Langsamkeit“ im Äther annimmt, erhält man als ihren Zahlenwert in einem anderen Medium das Sinusverhältnis. Wenn man auch zugiebt, daſs das Vorhergehende ein wenig gekünstelt erscheint, und daſs man zur Vereinfachung unter den physikalischen Gröſsen auch solche zulassen kann, welche als absolute Zahlen auftreten, so muſs man solche Gröſsen doch nur in dem Falle einführen, wenn ihr Ersatz durch Gröſsen, deren Zahlenwert offenbar von der Wahl der Einheiten abhängt, eine nutzlose Komplikation darstellt. Daher darf man sie keinesfalls unnötigerweise einführen, wenn der allgemeinere Gröſsenbegriff da, wo der Zahlenwert von der gewählten Einheit abhängt, unmittelbar aus den beobachteten Erscheinungen sich ergiebt. So darf man auch die vollkommen überflüssige Zweiteilung einer nach ihrer innerlichen Bedeutung einheitlichen physikalischen Gröſse in zwei, von welchen die eine als benannte, die andere als unbenannte Zahl aufgefaſst wird, nicht gutheiſsen. Als auf ein Beispiel sei hier auf die Dichte und das specifische Gewicht hingewiesen. Man sagt bisweilen, die Dichte ist das Gewicht oder ist die Masse der Volumeneinheit, das specifische Gewicht aber ist eine unbenannte Zahl, welche gleich dem Verhältnisse von Gewicht oder Masse eines Stoffes zu Gewicht oder Masse des Wassers ist u. s. w. Alles dies ist nicht nur vollkommen überflüssig, sondern beruht auch direkt auf einer fehlerhaften Diskussion der physikalischen Formeln, wovon im folgenden Paragraphen ausführlicher gesprochen werden soll.

Die Dichte ist weder ein Gewicht noch auch eine Masse. Auch liegt kein zwingender Grund vor, den Begriff eines specifischen Gewichtes als einer abstrakten Zahl einzuführen. Die Sache verhält sich in Wirklichkeit folgendermaſsen: Es existiert eine besondere Art von Gröſse, welche für jeden gegebenen Stoff charakteristisch ist; man kann sie willkürlich benennen, sie ist aber jedenfalls eine Gröſse eigener Art (sui generis) und kann schon deshalb weder eine Masse, noch auch ein Gewicht sein, denn diese letzteren sind physikalische Gröſsen anderer Art. Wir wollen sie Dichte nennen. Wie eine jede physikalische Gröſse hat auch sie ihre besondere Einheit, die willkürlich gewählt sein kann, die aber dennoch nichts anderes sein kann als wiederum eine Dichte. Dem Zahlenwerte dieser Gröſse bei bestimmter Wahl der Einheit (die Dichte des Wassers wird als Einheit der Dichte angenommen) eine besondere Benennung beizulegen, ist vollkommen überflüssig und bringt nur eine Verwirrung der Begriffe hervor.

Im § 1 war gesagt worden, daſs Raum und Zeit den doppelten Hintergrund bilden, vor welchem sich die von uns empfangenen Eindrücke objektivieren, und zu Beginn des § 6 waren Raumausdehnung, Zeit und Druck als ursprüngliche Vorstellungen bezeichnet worden, welche keiner Definition bedürfen und übrigens auch nicht definiert werden können. Der Begriff des Drucks wird aus der subjektiven

Empfindung der Kraftanstrengung gewonnen, welche nötig ist, um einem äufseren Druck das Gleichgewicht zu halten; eine Definition seines Wesens ist nicht möglich. Die drei verschiedenen Arten des Ausgedehntseins, die Zeit und der Druck sind Gröfsen, mit welchen die Wissenschaft von den physikalischen Erscheinungen unausgesetzt zu thun hat, und es ist daher angebracht, schon hier einige Worte über diejenigen Einheiten zu sagen, durch welche diese drei Gröfsen jetzt vorzugsweise gemessen werden.

Als Einheit der Länge wird das Meter angenommen; dieses ist gleich der Länge eines am Ende des 18. Jahrhunderts angefertigten und zu Paris aufbewahrten Stabes bei 0°. Diese Längeneinheit weist einen merklichen Unterschied gegen den zehnmillionten Teil des Pariser Meridianquadranten auf, welcher ursprünglich als Meter definiert wurde. Das internationale Komitee der Mafse und Gewichte nahm am 2. Oktober 1879 eine Reihe abgekürzter Bezeichnungen für die verschiedenen Einheiten der Ausdehnung an. Für das Meter wurde das Zeichen m angenommen. Tausend Meter heifsen Kilometer (km); das Meter wird in zehn Decimeter (dm), hundert Centimeter (cm) und tausend Millimeter (mm) geteilt; der tausendste Teil eines Millimeters heifst Mikron (μ); der millionte Teil eines Millimeters wird durch das Zeichen $\mu\mu$ bezeichnet. Die Einheiten der Länge werden auch lineare Einheiten genannt. Als Einheit der Oberflächenausdehnung oder des Flächeninhalts wird die Ausdehnung eines Quadrats angenommen, dessen Seite der linearen Einheit gleichkommt. Als Einheit der Raumausdehnung oder des Volumens wird das Volumen eines Würfels angenommen, dessen Kanten gleich der linearen Einheit sind; das Kubikdecimeter heifst auch Liter (l); eine genauere Definition wird weiter unten gegeben werden.

Als Einheit der Zeit müssen wir, wenn wir streng wissenschaftlich verfahren wollen, die Zeit annehmen, welche zum Zustandekommen einer bestimmten Erscheinung notwendig ist, wobei eine solche Erscheinung gewählt sein mufs, welche sich unter völlig gleichen Umständen eine unbestimmte Anzahl Male wiederholen kann, d. h. ohne jegliche Veränderung der sie verursachenden Erscheinungsgruppe. Als eine solche Erscheinung kann die Schwingung eines beliebigen Pendels dienen; die Zeit einer Schwingung desselben kann als Einheit der Zeit angesehen werden. Wenn man sich nun aber einer solchen Einheit bedient, so überzeugt man sich, dafs die Erde sich um ihre Achse gleichförmig dreht, und dieses giebt uns sodann die wissenschaftliche Grundlage und das Recht dazu, als Zeiteinheit die Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse anzunehmen resp. ein hierzu in einfacher Beziehung stehendes Zeitintervall. Es ist das der sogenannte mittlere Sonnentag, welcher in 24 Stunden, $24 \times 60 = 1440$ Minuten und

24 × 60 × 60 = 86 400 Sekunden zerfällt. Historisch ist bei der Wahl der Zeiteinheit der umgekehrte Weg verfolgt worden.

Ausgehend von der subjektiven Vorstellung vom Drucke, überzeugt man sich davon, dafs auf der Erdoberfläche ein jeder Körper, der sich in Ruhe befindet, auf jeden anderen Körper, auf welchem er sich befindet, einen Druck ausübt. Dieser Druck heifst das Gewicht des Körpers; da das Gewicht nur einen Spezialfall des Druckes darstellt, so mufs es mit diesem die gleiche Einheit besitzen. Als Einheit des Druckes und Gewichtes wird das Gewicht, d. h. der Druck angenommen, welchen in Paris ein ganz bestimmter Körper auf seine Unterlage im luftleeren Raum ausübt. Derselbe wurde zu Ende des achtzehnten Jahrhunderts aus Platin verfertigt und wird in Paris aufbewahrt. Diese Einheit des Gewichtes und Druckes heifst Kilogramm. Ein Kubikdecimeter reinen Wassers bei 4° C. hat ein Gewicht von nahezu einem Kilogramm. Das Volumen eines Kilogramms reinen Wassers von 4° C. gilt gegenwärtig als genaue Definition eines Liters. Das Kilogramm wird bezeichnet mit kg; es wird in 1000 Gramm (g) geteilt; das Gramm ist gleich 10 Decigramm (dg), 100 Centigramm (cg) und 1000 Milligramm (mg). Aus dem Gesagten folgt, dafs das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers von 4° C. nahezu einem Gramme gleichkommt, und dafs ein Liter nahezu gleich einem Kubikdecimeter ist.

Grammmolekül heifst diejenige Menge eines Stoffes, deren Gewicht gleich soviel Grammen ist, als Einheiten in dem Molekulargewichte der Substanz enthalten sind. So ist z. B. das Grammmolekül des Wassers gleich 18 Gramm Wasser, das Grammmolekül des Sauerstoffs gleich 32 Gramm Sauerstoff u. s. w.

Zum Unterschiede von anderen Einheiten werden wir im weiteren die eben betrachteten Einheiten bisweilen als die französischen bezeichnen. Im folgenden Abschnitte machen wir uns mit einer anderen Einheit bekannt — der Dyne.

Wir erwähnten oben des veralteten Ausdrucks „imponderabel“ und wiesen darauf hin, dafs man ihn durch das Wort „unwägbar“ zu ersetzen habe. Dafs von einer Gewichtslosigkeit des Äthers keine Rede sein kann, ist daraus zu ersehen, dafs Überlegungen, über welche sich zu verbreiten hier nicht der Ort ist, bereits zu einer angenäherten Gewichtsbestimmung des Äthers geführt haben. Das Gewicht des Äthers ist sehr gering, aber es ist nicht gleich Null. Eine Ätherkugel von den Dimensionen der Erde würde unter den Verhältnissen, unter welchen die Körper sich beim Wägen befinden, ein Gewicht von mehr als 200 kg haben. Hierbei ist jedoch eine Einschränkung zu machen, welche weiter unten im zweiten Abschnitte besprochen werden soll.

§ 7. Physikalische Gesetze. Das Aufsuchen eines gesetzmäfsigen Zusammenhanges der physikalischen Erscheinungen führt zur Entdeckung der physikalischen Gesetze. Durch diese Gesetze wird die nähere Art des Zusammenhanges der verschiedenen physikalischen Gröfsen untereinander festgestellt. Dieser Zusammenhang kann ein qualitativer oder quantitativer sein. Die physikalischen Gesetze beziehen sich fast ausschliefslich auf die quantitative Seite der Erscheinungen, d. h. durch sie wird bestimmt, auf welche Art sich eine Gröfse quantitativ verändert, falls eine andere, mit ihr gesetzmäfsig zusammenhängende Gröfse sich quantitativ verändert.

Die Zahl der physikalischen Gesetze, welche sich auf die qualitative Seite der Erscheinungen beziehen, ist verhältnismäfsig gering. Durch sie werden die äufseren Kennzeichen der Erscheinungen festgestellt, und in ihnen verbirgt sich immer ein noch nicht entdecktes quantitatives Gesetz. Nicht selten mifsbraucht man auch den Ausdruck „Gesetz", indem man denselben dort gebraucht, wo es richtiger wäre, von einer Regel zu sprechen, welcher die Erscheinungen unterworfen sind.

Die Entdeckung oder Prüfung eines physikalischen Gesetzes wird auf folgende Art erreicht. Bezeichnen wir symbolisch durch A und B zwei physikalische Gröfsen (hier sind nicht etwa ihre Zahlenwerte gemeint). Das Gesetz wird mathematisch als Abhängigkeit zwischen den Zahlenwerten a und b der Gröfsen A und B ausgedrückt. Um nun diesen Zusammenhang zu entdecken, mufs man den Versuch oder die Beobachtung so einrichten, dafs die Gröfse A eine Reihe quantitativ verschiedener Werte annehmen kann, infolge dessen sich auch die Gröfse B quantitativ ändern wird. Ferner müssen wir die Möglichkeit haben, jedesmal die Gröfsen A und B zu messen, d. h. ihre Zahlenwerte zu bestimmen, wobei für die eine wie für die andere Gröfse bestimmte Einheiten gewählt sein müssen.

Als unmittelbares Resultat der Versuche und Beobachtungen ergeben sich alsdann zwei Reihen von Zahlen, welche nichts anderes als die Zahlenwerte dieser beiden physikalischen Gröfsen sind und die, wie wir sahen, von der Wahl der Mafseinheiten abhängen. Die Zahlen beider Reihen sind natürlich zusammengehörig, einer jeden Zahl a der einen Reihe entspricht eine Zahl b der anderen. Das gesuchte Gesetz drückt nun aus, dafs alle Zahlen a aus den Zahlen b mit Hülfe ein und derselben arithmetischen Operation erhalten werden können, indem man letztere in denselben algebraischen, b enthaltenden Ausdruck einsetzt. Symbolisch wird dies durch die Gleichung $a = f(b)$ ausgedrückt, d. h. a ist irgend eine Funktion von b. Hierbei mufs man aber zwei eine sehr wichtige Rolle spielende Umstände beachten.

Erstens kann kein Versuch, keine Beobachtung uns die gesuchten Zahlenwerte a und b mit völliger Genauigkeit geben. Dieser Umstand wird im dritten Abschnitte genauer betrachtet werden. Die unver-

meidlichen sogenannten „Beobachtungsfehler“ geben im Resultate ungenaue Werte der Zahlen a und b, welche im allgemeinen dem zuvor erwähnten Ausdrucke nicht genügen. Stets ergiebt sich eine Abweichung von einer Gleichheit beider Seiten des Ausdrucks. Es ist hierbei Sache des Beobachters, durch kritische Untersuchung der Messungsergebnisse zu entscheiden, ob die auftretenden Abweichungen sich durch wirkliche Beobachtungsfehler erklären lassen oder ob man auf Grund ihres Auftretens auf die Nichtexistenz der hypothetisch angenommenen Gesetzmäfsigkeit $a = f(b)$ zu schliefsen hat.

Zweitens ist in den Zahlen a und b selbst etwas Willkürliches enthalten, infolge der willkürlichen Wahl der Gröfseneinheiten für A und B. Wenn wir andere Einheiten gewählt hätten, so würden die Zahlen beider Reihen mit ein und demselben konstanten Faktor multipliziert auftreten, und zwar wäre dieser Faktor gleich dem Verhältnisse der früheren Gröfseneinheit zur neuen. Äufserlich giebt sich dieses Willkürliche darin zu erkennen, dafs in dem Ausdrucke, welcher b enthält und der gleich a sein soll, ein oder mehrere Zahlen enthalten sind, deren specieller Wert, d. h. deren Gröfse nicht charakteristisch für das physikalische Gesetz selbst ist, sondern von der Wahl der Einheiten für A und B abhängt. Diese Zahlen heifsen allgemein Koeffizienten. Einer dieser Koeffizienten kann immer als Faktor, welcher allen Gliedern des Ausdruckes $f(b)$ gemein ist, angesehen werden. Er heifst der Proportionalitätsfaktor; sein Wert hängt jedenfalls von der gewählten Einheit für die Gröfse A ab. Verallgemeinernd kann man sagen:

In den Ausdrücken für physikalische Gesetzmäfsigkeiten, $a = f(b)$, müssen Koeffizienten enthalten sein, deren Zahlenwerte für die Form des Gesetzes nicht charakteristisch sind, und welche von der Wahl derjenigen Einheiten abhängen, mit denen wir die im Gesetze erwähnten physikalischen Gröfsen messen.

Bisweilen sagt man, der Proportionalitätsfaktor könne selbst eine bestimmte physikalische Bedeutung haben, indem er den Zahlenwert irgend einer bestimmten neuen physikalischen Gröfse darstellt. Das ist unrichtig. In allen Fällen, wo sich scheinbar etwas Ähnliches zeigt, beruht dies darauf, dafs das von uns ursprünglich aufgestellte Gesetz nicht alle Seiten der Erscheinungen umfafst, dafs also die Gröfse A nicht nur von der Gröfse B, sondern noch von den Gröfsen C, D u. s. w. abhängt. Wenn man allen diesen Abhängigkeiten auf den Grund geht, so erweist es sich jedesmal, dafs der Proportionalitätsfaktor eine Zahl und nur eine Zahl ist und nicht als Zahlenwert irgend einer physikalischen Gröfse angesehen werden kann.

Wir wollen an einem Beispiele erläutern, wie man ein physikalisches Gesetz auffindet und formuliert.

Aus der elementaren Physik ist bekannt, eine wie wichtige Rolle die physikalische Gröfse spielt, welche man Stromstärke nennt, und dafs es Methoden giebt, sie zu messen, wobei eine gewisse bestimmte Stromstärke als Einheit angenommen wird. Die Beobachtungen zeigen, dafs im Leitungsdraht, durch welchen der Strom fliefst, sich Wärme entwickelt, welche, wie jede Gröfse, durch ihre eigene, übrigens willkürliche Einheit gemessen wird. Die Versuche zeigen ferner, dafs die Wärmemenge, welche sich im Draht entwickelt, von der Stromstärke und der Zeitdauer, innerhalb welcher die Erscheinung des Stromes andauerte, abhängt; aufserdem hängt sie auch noch vom sogenannten Widerstande des Drahtes ab, einer Gröfse, welche man ebenfalls durch eine besondere Einheit des Widerstandes zu messen versteht. Um einen gesetzmäfsigen Zusammenhang zwischen der Erscheinung der Wärmeentwicklung im Draht und der Erscheinung des elektrischen Stromes zu finden, mufs man somit drei Gesetze finden, welche die Abhängigkeit der Wärmemenge Q von der Stromstärke J, dem Widerstande W und der Zeit T (der Stromdauer) ausdrücken. Hierzu hat man drei Doppelreihen von Messungen auszuführen.

Zunächst bestimmt man die Zahlenwerte q und i für die Wärmemenge und Stromstärke, während Stromdauer und Widerstand ungeändert bleiben; hierzu mufs man durch ein und denselben Draht während der gleichen Zeit Ströme von verschiedener Stärke senden und jedesmal die Zahlen q und i bestimmen. Betrachtet man sodann die beiden erhaltenen Zahlenreihen, so überzeugt man sich, dafs alle die Zahlen q durch Multiplikation des Quadrats vom zugehörigen i mit ein und demselben Faktor erhalten werden, welcher mit C_1 bezeichnet werde; somit findet man, dafs $q = C_1 i^2$ ist. Es ist klar, dafs man einen anderen Wert für den Koeffizienten C_1 erhalten hätte, falls man die Gröfsen Q und J durch andere Einheiten gemessen hätte — in diesem Falle wären für q und i lauter andere Zahlen erhalten worden. Wenn man, ohne die Einheiten der Gröfsen Q und J zu ändern, einen anderen Draht gewählt oder die Stromdauer geändert hätte, so hätte man ebenfalls ein anderes C_1 erhalten. Hierdurch wird erwiesen, dafs Q nicht nur von J abhängt, sondern noch von anderen Umständen, und dafs durch die Formel $q = C_1 i^2$ der gesetzmäfsige Zusammenhang, der sich in der untersuchten Erscheinung kundgiebt, nicht allseitig wiedergegeben ist.

Ändert man den Draht bei unveränderter Stromstärke und -dauer und mifst man dabei jedesmal den Widerstand W und die Wärmemenge Q, so erhält man abermals zwei Reihen von Zahlen w und q. Dabei ergiebt sich, dafs die Zahlen q durch Multiplikation der entsprechenden w mit ein und derselben Zahl, welche wir mit C_2 bezeichnen, erhalten werden. Dies giebt uns die Formel $q = C_2 w$; die Zahl C_2 hängt von den Einheiten ab, durch welche die Wärmemenge und der Widerstand gemessen werden. Wenn man endlich die Stromstärke und

den Widerstand des Drahtes ungeändert läfst und die Zeit t und die Wärmemenge mifst, so erhält man die dritte Beziehung $q = C_3 t$.

Die drei Versuchsreihen haben erwiesen, dafs der Zahlenwert q für die Wärmemenge sich proportional dem Quadrate des Zahlenwertes i für die Stromstärke, proportional dem Zahlenwerte w für den Widerstand und proportional dem Zahlenwerte t für die Zeit ändert. Hieraus folgt, dafs q dem Produkte der Zahlen i^2, w und t proportional ist, d. h. wenn man die Gröfsen J, W und T willkürlich ändert und jedesmal Q mifst, so erhält man sämtliche Zahlen q durch Multiplikation der Produkte $i^2 wt$ mit ein und derselben Zahl, die wir C nennen wollen. Dies aber wird durch folgende Formel wiedergegeben:

$$q = Ci^2 wt \qquad (1)$$

Hier ist der Proportionalitätskoeffizient C eine Zahl, deren Wert blofs von der Wahl der Einheiten für die Wärmemenge, Stromstärke, Zeit und den Widerstand abhängt. Man darf es ja nicht vergessen, dafs alle physikalischen Formeln, die der vorstehenden (1) ähnlich sind, den Zusammenhang zwischen Zahlenwerten verschiedener Gröfsen ausdrücken, und dafs daher die in den Formeln vorkommenden Buchstaben die Zeichen für Zahlen sind. Man hat dies umsomehr im Gedächtnis zu behalten, als es allgemein üblich ist, die physikalischen Gesetze verkürzt zu formulieren, wobei man die Gröfsen selbst nennt, anstatt von Zahlenwerten der Gröfsen zu sprechen. Statt einer richtigen Ausdrucksweise des Gesetzes, wie sie oben gegeben war, ist es üblich, dasselbe wie folgt auszudrücken: die Wärmemenge, welche im stromdurchflossenen Draht entwickelt wird, ist proportional dem Quadrate der Stromstärke, proportional dem Drahtwiderstande und proportional der Stromdauer. Wir werden weiter unten sehen, zu welchen gefährlichen Folgen eine derartige verkürzte Formulierung in Einzelfällen führen kann.

Der Proportionalitätskoeffizient hat stets mehrere (mindestens zwei) physikalische Bedeutungen, die leicht zu ermitteln sind. Beschränken wir uns auf ein Beispiel. Die Formel (1) zeigt, dafs für $i = 1$, $w = 1$ und $t = 1$ die Zahl $q = C$ wird. Hieraus folgt, dafs die Zahl C gleich der Anzahl Wärmeeinheiten ist, welche während der Zeiteinheit in einem Draht entwickelt werden, dessen Widerstand gleich der Einheit ist und durch welchen (wie man es auszudrücken pflegt) die Einheit des Stromes fliefst. Dieselbe Formel ergiebt jedoch für $q = 1$, $i = 1$ und $t = 1$, dafs $C = \frac{1}{w}$ ist. Dies zeigt uns, dafs die Zahl C ebenfalls gleich ist der Zahl 1, dividiert durch die Zahl der Widerstandseinheiten desjenigen Drahts, in welchem in der Zeiteinheit durch die Stromeinheit die Einheit der Wärmemenge entwickelt wird.

Setzt man $q = 1$, $i = 1$, $w = 1$, so folgt ferner, dafs

$C = \frac{1}{t}$ und für $q = 1$, $w = 1$, $t = 1$, dafs $C = \frac{1}{i^2}$ ist. Hieraus ergeben sich noch zwei leicht zu formulierende Bedeutungen der Zahl C. Alles dieses macht es uns noch mehr klar, dafs der Proportionalitätskoeffizient C in physikalischen Formeln von der Wahl der Einheiten abhängt, durch welche die in den Formeln vorkommenden Gröfsen gemessen werden. Bei unendlich mannigfaltigen Einheiten kann auch der Koeffizient C alle nur erdenklichen Zahlenwerte annehmen.

Wenden wir uns nunmehr der wichtigen Frage zu, was daraus wird, wenn wir dem Proportionalitätskoeffizienten einen bestimmten, willkürlich gewählten Zahlenwert beilegen. In diesem Falle verlieren wir die Möglichkeit, die Einheiten aller in unserer Formel vorkommenden Gröfsen willkürlich zu wählen. Es hängt von uns in diesem Falle die Wahl der Einheiten für alle diese Gröfsen mit Ausnahme einer einzigen ab, wobei wir es jedoch in der Hand haben, zu bestimmen, für welche von den Gröfsen die Einheit nicht mehr wählbar bleiben soll. Die Einheit dieser Gröfse erweist sich dabei als eindeutig bestimmt; diese Einheit erscheint dann gewissermafsen von selbst im Zusammenhange mit den von uns gewählten übrigen Einheiten und dem Proportionalitätskoeffizienten. Nehmen wir beispielsweise an, wir machten den Koeffizienten C in der Formel (1) gleich fünf, so dafs also $q = 5\,i^2 wt$ werde. Wir wählen die Einheiten der Gröfsen Q, J und T willkürlich; für $q = 1$, $i = 1$ und $t = 1$ erhalten wir $w = \frac{1}{5}$ und hieraus folgt, dafs, wenn man die Einheiten der Wärmemenge, der Stromstärke und Zeit willkürlich gewählt hat, für die Einheit des Widerstandes unbedingt das Fünffache des Widerstandes eines solchen Drahtes zu wählen ist, in welchem bei Einheit der Stromstärke in der Einheit der Zeit die Einheit der Wärmemenge entwickelt wird. Es ist danach nicht schwer zu bestimmen, welche Einheiten für die Wärmemenge oder Stromstärke oder die Zeit zu wählen wären, wenn die Einheiten der drei übrigen Gröfsen jedesmal willkürlich gewählt würden.

Sehr häufig setzt man den Proportionalitätskoeffizienten gleich 1. Die Formel (1) nimmt in diesem Falle die Form $q = i^2 wt$ an. Wenn wir z. B. die Einheiten der Wärmemenge, des Widerstandes und der Zeit willkürlich gewählt hätten, so müfsten wir in diesem Falle als Einheit der Stromstärke die Stärke desjenigen Stromes annehmen, welcher in der Zeiteinheit auf einem Draht mit der Einheit des Widerstandes die Einheit der Wärmemenge entwickelt, denn bei $w = 1$, $t = 1$ und $q = 1$ ergiebt unsere Formel $i = \pm 1$. Das doppelte Vorzeichen bedeutet, wie wir später sehen werden, dafs dieser Strom eine beliebige Richtung haben kann.

Wir hatten vorhin auf die oftmals auftretende Behauptung hin-

gewiesen, dafs der Proportionalitätskoeffizient bisweilen die Bedeutung einer physikalischen Gröfse haben könne, welche durch ihre besondere Einheit gemessen werde, und hatten erwähnt, dafs dies unrichtig sei, dafs man es vielmehr in ähnlichen Fällen mit einem unvollständigen Ausdrucke des Gesetzes zu thun habe, welcher nicht alle Seiten der gegebenen Erscheinung umfasse. Gehen wir zu einem Beispiele hierfür über. Nehmen wir an, wir untersuchten die Wärmeleitung in einer aus irgend einem Stoffe bestehenden Platte für den Fall, dafs eine ihrer Flächen auf der konstanten Temperatur T_1, die andere auf der niedrigeren Temperatur T_2 erhalten wird. Es möge der Flächeninhalt jeder dieser Flächen der Platte gleich s Flächeneinheiten, ihre Dicke aber gleich d Längeneinheiten sein. Nehmen wir ferner an, wir hätten eine Versuchsreihe ausgeführt und hätten die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$, den Flächeninhalt s, die Zeit t, die Wärmemenge q und endlich die Dicke d für verschiedene zu den Versuchen gewählte, aus demselben Material bestehende Platten gemessen. Die Versuche zeigen uns sodann, dafs die Zahlen q proportional den Zahlen s, den Zahlen t und den Zahlen $T_1 - T_2$ sowie indirekt proportional den Zahlen d sind. Bezeichnet man den Proportionalitätskoeffizienten mit k, so erhält man die Formel

$$q = k s t \frac{T_1 - T_2}{d} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Für gewöhnlich schliefst man folgendermafsen: setzt man in dieser Formel $s = 1$, $t = 1$, $T_1 - T_2 = 1$ (d. h. 1°) und $d = 1$, so findet man $q = k$; folglich ist k diejenige Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eines den Grundflächen parallelen Schnitts fliefst, falls die Temperatur auf der Einheit der Weglänge um einen Grad sinkt (das Temperaturgefälle gleich eins ist). Dieses k hängt von der Substanz der Platte ab und stellt eine besondere physikalische Gröfse dar, die auch ihre besondere Einheit hat.

Ein solcher Schlufs aber ist nicht richtig. Die oben angeführten, aus den Versuchen gewonnenen Abhängigkeiten umfassen noch nicht alle Seiten der Erscheinung: die Zahl q hängt nicht nur von der Gröfse der Fläche s, der Zeit t, der Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ und von der Dicke d, sondern noch von einer durch uns eingeführten Gröfse ab, die wir Wärmeleitungsfähigkeit nennen und welche ihrerseits vom Material der Platte abhängt. Die Versuche können uns freilich keinen Zusammenhang zwischen q und k liefern, denn wir hatten ja diese neue Gröfse eingeführt und hatten angenommen, dafs q proportional k sei. Aber hierdurch wird das Wesen der Sache nicht geändert, welches darin beruht, dafs q von fünf Gröfsen k, s, t, $(T_1 - T_2)$ und d abhängt. Wir haben hier sechs wesentlich verschiedene physikalische Gröfsen vor uns, von denen eine jede durch ihre eigene, vollkommen willkür-

liche Einheit gemessen werden kann. Als Einheiten kann man beispielsweise annehmen: die kleine Kalorie (q), den Quadratzoll (s), das Centimeter (d), die Minute (t), den Celsiusgrad ($T_1 - T_2$) und die Wärmeleitungsfähigkeit des Quecksilbers (k). In diesem Falle müssen wir auch die Formel (2) durch die folgende ersetzen

$$q = Ckst\,\frac{T_1 - T_2}{d} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

in welcher C ein wirklicher Proportionalitätsfaktor, eine Zahl ist, die nicht etwa einen Zahlenwert irgend einer physikalischen Gröfse bedeutet, sondern nur von der Wahl der Einheiten für die sechs in der Formel enthaltenen Gröfsen abhängt. Setzt man in (3) $C = 1$, so begiebt man sich bereits des Rechtes, alle diese Einheiten willkürlich zu wählen; man kann dann nur die Einheiten für fünf Gröfsen wählen. Am natürlichsten (jedoch nicht unumgänglich notwendig) ist es, die Einheiten für die Gröfsen q, s, t, ($T_1 - T_2$) und d willkürlich zu wählen. In diesem Falle erhält man für $q = 1$, $s = 1$, $t = 1$, $T_1 - T_2 = 1$ und $d = 1$ auch $k = 1$. Hieraus folgt, dafs, falls man in der allgemeinen Formel (3) $C = 1$ setzt, man als Einheit der Wärmeleitungsfähigkeit diejenige einer Plattensubstanz annehmen mufs, durch deren Oberflächeneinheit in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit fliefst, wenn die Temperatur auf der Einheit der Dicke um einen Grad fällt. Wenn unter denselben Bedingungen nicht eine, sondern q Wärmeeinheiten hindurchfliefsen, so ist auch die Wärmeleitungsfähigkeit nicht gleich 1, sondern gleich einer Zahl k, wobei q und k einander gleich sind. Die Gleichung $q = k$ sagt aus, dafs die Anzahl Wärmeeinheiten q gleich ist der Anzahl Einheiten der Wärmeleitungsfähigkeit, und diese Gleichheit wird nur in dem speciellen Falle erhalten, wo wir in der allgemeinen Formel (3) willkürlich $C = 1$ setzen. Somit ist es klar, dafs die oben erwähnte übliche Schlufsfolgerung, welche zur Definition „k ist die Wärmemenge u. s. w.“ führt, nicht richtig ist.

Eine gefahrbringende Begriffsverwirrung ist insbesondere in jenen einfachsten Fällen möglich, wo wir es überhaupt nur mit zwei physikalischen Gröfsen zu thun haben und die eine von ihnen der anderen proportional ist. Bezeichnen wir die Gröfsen (d. h. ihre Zahlenwerte, denn nur die letzteren können verallgemeinert durch Buchstaben „bezeichnet“ werden) mit a und b. Nehmen wir an, dafs die Versuche oder die Definitionen dieser Gröfsen selbst ergeben haben, dafs

$$a = Cb \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ist, wo C der Proportionalitätsfaktor ist, der von der Wahl der Einheiten für die in der Formel vorkommenden Gröfsen abhängt. Nimmt man nun ferner an (was man aber durchaus nicht zu thun verpflichtet ist), dafs $C = 1$ ist, so erhält man

$$a = b \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Solcher Formeln giebt es in der Physik sehr viele; man darf Gleichungen dieser Art ja nicht für Identitäten halten. Wir haben im vorliegenden Falle zwei verschiedene physikalische Gröſsen vor uns, die durch das Proportionalitätsgesetz verknüpft sind. Bei einer bestimmten Auswahl der Einheiten werden die Zahlenwerte beider Gröſsen einander gleich. Wenn man dagegen in ähnlichen Fällen von einer Gleichheit der Gröſsen reden wollte, so könnte sich leicht die Vorstellung von ihrer inneren Identität bilden, welche durchaus nicht aus der zufälligen Gleichheit ihrer Zahlenwerte folgt. Um Miſsverständnisse zu vermeiden, wollen wir uns für ähnliche vorkommende Fälle des Ausdruckes „werden durcheinander gemessen" bedienen. Somit bedeutet der Satz: die Gröſse a wird durch die Gröſse b gemessen — daſs bei einer willkürlichen Wahl der Einheiten die Zahlenwerte beider wesentlich verschiedener physikalischer Gröſsen sich proportional zu einander ändern, bei einer gewissen, ganz bestimmten Auswahl der Einheiten aber ihre Zahlenwerte untereinander gleich werden. Das Gesagte gilt auch für solche Beziehungen zwischen zwei Gröſsen, welche nicht durch Versuche gewonnen werden, sondern aus der für die eine von ihnen gegebenen Definition folgen.

Hier ein Beispiel dafür. In der Elementarphysik wird der Begriff der Wärmekapazität der Körper definiert. Man darf hierbei nicht etwa sagen, die Wärmekapazität sei gleich demjenigen Wärmequantum, welches zur Erwärmung des Körpers um einen Grad erforderlich ist. Die Wärmemenge q und die Wärmekapazität k eines Körpers sind durchaus verschiedene physikalische Gröſsen, deren Einheiten überhaupt ganz willkürlich gewählt werden können (z. B. die kleine Kalorie und die Wärmekapazität von einem Pfund Quecksilber). Wir haben die allgemeine Formel $q = Ckt$, wo t die Anzahl Grade ist, um welche sich der Körper erwärmt hat. Nur wenn man $C = 1$ setzt, erhält man für $t = 1^0$ die Gleichheit $q = k$, welche ausdrückt, daſs die Wärmekapazität eines Körpers durch diejenige Wärmemenge gemessen wird, die ihn um 1^0 erwärmt.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde die völlig überflüssige Spaltung einer physikalischen Gröſse in zwei mit verschiedenen Benennungen gerügt und wurde beispielsweise auf „Dichte" und „specifisches Gewicht" hingewiesen. Wir können jetzt genauer zeigen, wodurch diese fehlerhafte Einteilung entstanden ist. Das Gewicht p, das Volumen v und die Dichte δ sind drei wesentlich verschiedene Gröſsen, deren Einheiten vollkommen willkürlich gewählt werden können (z. B. das Pfund, das Cubikdecimeter, die Dichte des Quecksilbers). Sie sind durch die Formel $p = C\delta v$ miteinander verknüpft. Setzt man $C = 1$, so folgt $p = \delta v$ und in diesem Falle sind wir gezwungen, als Einheit der Dichte die Dichte eines solchen Körpers gelten zu lassen, dessen Volumeneinheit die Einheit des Gewichtes darstellt. Für

$r = 1$ folgt $p = \delta$, woraus indes nicht hervorgeht, dafs die Dichte gleich dem Gewichte der Volumeneinheit sei. Wir haben vielmehr zu sagen, dafs „die Dichte durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird“ (die Dichte, welche durch die Masse der Volumeneinheit gemessen wird, ist wieder eine andere Gröfse).

Eine physikalische Gröfse wird durch eine andere „gemessen“ heifst, dafs bei einer gewissen, jedoch nicht notwendigen Auswahl der Einheiten dieser beiden Gröfsen ihre Zahlenwerte untereinander gleich werden.

Empirische Formeln. Wenn man durch das Experiment oder die Beobachtung den gesetzmäfsigen Zusammenhang zweier Gröfsen zu finden sucht, erhält man zwei Reihen zusammengehöriger Zahlenwerte a und b beider Gröfsen. Sehr oft kommt es vor, dafs man den Zusammenhang, weil er äufserst kompliziert ist, nicht zu erraten imstande ist, und das gesuchte wahre Gesetz unbekannt bleibt. In solchen Fällen kann man die Beobachtungsresultate durch eine empirische Formel ausdrücken, d. h. einen solchen algebraischen Zusammenhang $a = f(b)$, z. B. eine Reihe aufstellen, dafs aus demselben für alle gemessenen Werte von b die gemessenen Werte von a sich mit genügender Annäherung ergeben. Die Gleichheit $a = f(b)$ drückt sodann das Gesetz empirisch aus und kommt innerhalb der Grenzen, zwischen welchen die Beobachtungen liegen, dem wahren Gesetze nahe. Von der allgemeinen Form der Funktion $f(b)$ und den Zahlenwerten der in ihr vorkommenden Koeffizienten hängt es ab, ob die Auswahl eine glückliche war.

Wenn es uns gelungen ist, eine solche empirische Formel $a = f(b)$ zu finden, welche „innerhalb der Versuchsgrenzen“ ausreichend gut die Abhängigkeit zwischen den Zahlen a und b wiedergiebt, so kann man dieselbe benutzen, um die Zahlen a' zu berechnen, welche den nicht durch unmittelbare Messung erhaltenen Zahlen b' entsprechen. Eine solche Berechnung ist dann möglich, wenn die Zahlen b' sich zwischen den durch Messung erhaltenen Zahlen b befinden; man nennt dies Verfahren Interpolation. Dasselbe giebt zuverlässige Resultate, besonders dann, wenn die gemessenen Zahlen b einander nahe liegen. Andererseits darf man die empirischen Formeln nur mit grofser Vorsicht benutzen, wenn es sich um die Berechnung solcher a handelt, die aufserhalb der Beobachtungsgrenzen gelegenen b entsprechen, denn das wahre, unbekannte Gesetz kann hier vom empirischen wesentlich abweichen. Eine Berechnung solcher Art heifst Extrapolation.

In vielen Fällen sucht man sich zunächst von der Abhängigkeit, welche zwischen den Zahlenwerten a und b besteht, ein geometrisches Bild zu verschaffen, welches Verfahren man als graphische Methode der Darstellung einer Abhängigkeit bezeichnet. Hat man beispielsweise für zwei Gröfsen A und B, zwischen welchen man einen gesetz-

mäfsigen Zusammenhang vermutet, die zu einander gehörigen Zahlenwerte $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ durch Beobachtung gefunden, so entwirft man sich ein Netz aus äquidistanten, sich rechtwinklig schneidenden Geraden (im Handel ist Papier mit derartiger Liniierung als Koordinatenpapier oder Millimeterpapier bekannt) und trägt auf einer der horizontalen Geraden Strecken von der Länge $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ ab. Geht man dann von den so erhaltenen Teilpunkten senkrecht aufwärts um Strecken mit der Länge $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, so erhält man eine neue Reihe von Punkten, die man durch eine sich dem Verlaufe der einzelnen Punkte möglichst anschmiegende Kurve zu verbinden sucht. Letztere Kurve stellt das gesuchte geometrische Bild des Zusammenhanges zwischen A und B dar und setzt uns in den Stand, zu beliebigen zwischen b_1 und b_n liegenden Werten von B die hinzugehörigen Werte von A zu finden.

Die Gröfsen, welchen man in der Physik begegnet, können in zwei Gruppen eingereiht werden, die sich durch ein nur selten genügend beachtetes, jedoch überaus wichtiges und charakteristisches Kennzeichen unterscheiden.

Zur ersten Gruppe gehört, was man gewöhnlich Gröfse nennt; für diese ist es unmittelbar klar, dafs der Wert Null möglich ist; man kann diese Gröfsen zu einander addieren und ihr geometrisches Verhältnis ist eine unbenannte Zahl, welche angiebt, wievielmal eine der Gröfsen in der anderen enthalten ist. Zu den Gröfsen dieser Art gehören Länge, Flächenraum, Volumen, Geschwindigkeit, Kraft, Druck, elektrischer Widerstand, elektromotorische Kraft, Tonstärke, Lichtstärke, Intensität des magnetischen Feldes u. s. w.

Es existiert aber noch eine andere Gruppe von Gröfsen, welche man, ohne gewisse Einschränkungen und Erklärungen nicht unmittelbar zu den Gröfsen rechnen darf. Für sie existiert der Begriff der Null nicht oder kann nur sehr bedingt eingeführt werden. Man kann auch nicht von einem geometrischen Verhältnisse derselben reden. Solche Gröfsen werden in die Wissenschaft eingeführt, um vor allem als Kennzeichen qualitativer Verschiedenheiten zu dienen. Da sie eine ununterbrochene Reihe darstellen, machen sie es möglich, den Begriff der Differenz zweier Gröfsen als einer gewissen Zahl einzuführen.

Zwei Beispiele mögen klarlegen, um was es sich handelt. Zu den Gröfsen der zweiten Gruppe gehören z. B. die Tonhöhe und die Temperatur, die offenbar gewisse qualitative Unterschiede kennzeichnen. Setzt man gewisse bestimmte Temperaturen und Tonhöhen fest, so kann man den Begriff der Differenzen oder Intervalle zweier Temperaturen oder Tonhöhen einführen. Dies aber setzt in den Stand, eine Skala der Temperaturen oder Töne zu entwerfen und eine Einheit der Temperaturdifferenzen (Grade) oder Tonhöhen (Oktave oder z. B.

grofser halber Ton) zu wählen. Diese Differenzen sind Gröfsen der ersten Art, sie können gemessen und ihr geometrisches Verhältnis kann gefunden werden. Die Temperaturen und Tonhöhen selbst aber können nicht gemessen werden, eine Null existiert für sie nicht, und man kann nicht vom Verhältnisse zweier Temperaturen oder Tonhöhen reden. Dem widerspricht indes nicht der bedingte Begriff der absoluten Temperatur, der teils später gebraucht, teils im dritten Bande (die Lord Kelvinsche Skala) erörtert werden soll; ebenso die nur auf Vereinbarung beruhende Messung der Tonhöhe durch die Schwingungszahl. Wir werden in der Folge noch andere Gröfsen dieser zweiten Art kennen lernen (so z. B. das elektrische Potential). Streng genommen gehört zu ihnen auch die Zeit.

§ 8. Zustand der Materie. Im § 1 hatten wir Materie oder Stoff das in dem Orte des Raumes Vorhandene genannt, in welchem wir die Ursache eines empfangenen Eindruckes objektivieren; den einen begrenzten Raumteil erfüllenden Stoff nannten wir Körper. Die Physik hat es vorzugsweise mit der Materie zu thun und wendet sich nur verhältnismäfsig selten der Untersuchung derjenigen Körpereigenschaften zu, welche lediglich von der Form der Körper abhängen.

Der Stoff kann homogen oder heterogen sein. Im ersten Falle besitzen alle Teile derselben absolut gleiche, im zweiten Falle ungleiche Eigenschaften. Dementsprechend kann man auch von homogenen und heterogenen Körpern reden. Die Heterogenität kann zweierlei Ursachen haben.

Erstens können die Teile des Stoffes derart sein, dafs einer von ihnen unter keinen Umständen alle Eigenschaften des anderen erlangen kann (wenigstens nach den neueren Anschauungen); in diesem Falle unterscheiden sich die Stoffteile durch ihren Bestand, ihr Unterschied ist ein chemischer.

Zweitens kann, obgleich die Stoffteile sich durch ihre Eigenschaften unterscheiden, dennoch unter gewissen Bedingungen ein jeder von ihnen alle Eigenschaften einer beliebigen anderen erwerben; in diesem Falle ist die Heterogenität eine physikalische und die Stoffteile unterscheiden sich durch ihren Zustand.

Die Eigenschaften der Materie werden durch eine ganze Reihe verschiedener physikalischer Gröfsen definiert. Wir wollen Punktfunktionen solche Gröfsen nennen, welche an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Zahlenwerte besitzen; hierher gehören physikalische Gröfsen, welche die Eigenschaften der Materie an verschiedenen Punkten derselben charakterisieren. Jede Gröfse, welche, zu einem bestimmten Punkte gehörig, noch eine bestimmte Richtung hat, heifst Vektor (Geschwindigkeit, Kraft, elektrischer Strom). Einige Eigenschaften der Vektoren sollen weiter unten erörtert werden.

Die Materie heifst isotrop, wenn nicht blofs alle Teile derselben gleiche Eigenschaften haben, sondern in jedem Punkte ihre Eigenschaften nach allen Richtungen hin die gleichen sind und von der Richtung nicht abhängen (z. B. wenn die Wärmeleitung, die Lichtgeschwindigkeit, die Ausdehnbarkeit u. s. w. nach allen Richtungen hin die gleichen sind). Die Materie heifst anisotrop (heterotrop), wenn sie im gegebenen Punkte nach verschiedenen Richtungen verschiedene Eigenschaften besitzt.

Es ist aber wohl zu beobachten, dafs die Materie in Bezug auf eine Eigenschaft isotrop, in Bezug auf eine andere anisotrop sein kann. Wir werden z. B. sehen, dafs Krystalle des sogenannten regulären Systems isotrop in Bezug auf ihre optischen, anisotrop in Bezug auf ihre elastischen Eigenschaften sind.

Die anisotrope Materie kann gleichzeitig homogen sein, falls nämlich ihre Eigenschaften in allen Punkten und auch in parallelen Richtungen dieselben sind. Der Einfachheit halber spricht man bisweilen von isotropen und anisotropen Körpern.

Aus der elementaren Chemie ist es bekannt, dafs der Stoff einfach oder zusammengesetzt sein kann. Der letztere besteht aus einer sogenannten chemischen Vereinigung mehrerer einfacher Stoffe. Der Stoff besteht aus sehr kleinen Teilen, welche Moleküle heifsen.

Ein Molekül ist der kleinsten Teil, welcher noch imstande ist, wesentliche Eigenschaften des gegebenen Stoffes zu zeigen. Je nach dem Charakter dieser Eigenschaften unterscheidet man bisweilen physikalische und chemische Moleküle, wobei man den physikalischen einen zusammengesetzteren Bau zuschreibt als den chemischen; jedes der ersteren kann eine grofse Zahl der letzteren in sich enthalten.

Die heutige Chemie nimmt ferner die Existenz von Atomen an; das sind solche kleinsten Stoffteilchen, welche bei keiner uns bekannten Erscheinung in weitere Teile zerfallen. Man mufs sie daher als sich nicht teilend bezeichnen. Dieser Ausdruck ist dem üblichen „unteilbar“ vorzuziehen, da mit dem letzteren die mifsverständliche und unrichtige Vorstellung verbunden ist, dafs die Atome — wohl wegen ihrer Kleinheit — nicht und auch nicht einmal in Gedanken teilbar seien. Das einfachste chemische Molekül besteht aus Atomen und zwar das Molekül eines einfachen Stoffes aus einem oder mehreren gleichartigen, das Molekül eines zusammengesetzten Stoffes aus zwei oder mehreren wenigstens zum Teil verschiedenen Atomen.

Bei Besprechung der heterogenen Körper wurde erwähnt, dafs ein und dieselbe Materie sich in verschiedenen Zuständen befinden kann. Der Ausdruck „Zustand der Materie“ wird in zweierlei Sinn gebraucht. Im engeren Sinne des Wortes unterscheidet man drei verschiedene Zustände (Formarten) der Materie: den festen, flüssigen und gasförmigen. Von ihnen soll weiter unten die Rede sein.

Im weiteren Sinne hat jede Materie eine unendliche Anzahl verschiedener Zustände, wenn man den „Zustand" durch die Gesamtheit aller Eigenschaften der Materie charakterisiert sein läfst, so dafs die Veränderung einer einzigen Eigenschaft auch eine Veränderung des Zustandes zur Folge hat. Alle Gröfsen, welche die Eigenschaften der Materie charakterisieren, sich also zugleich mit ihrem Zustande ändern, heifsen Funktionen des Zustandes; solcher Eigenschaften giebt es sehr viele.

Zu den wichtigsten den Zustand bestimmenden Gröfsen gehören: Temperatur, Dichte (oder statt ihrer das specifische Volumen) und Druck oder Spannung. Wir unterwerfen diese Gröfsen einer kurzen Betrachtung.

1. Die Temperatur. Der Tastsinn, welcher bei Berührung unseres Körpers mit der Materie sich einer besonderen Art von Reizen aussetzt, belehrt uns über den sogenannten Wärmezustand eines Körpers, über den Grad seines Erwärmtseins. Die Begriffe kalt, warm, heifs können ebensowenig definiert werden, wie auch andere subjektive Empfindungen (Farbe, Tonhöhe u. s. w.); sie sind jedem zugänglich und daher allgemein verständlich. Die Gröfse, welche den Grad des Erwärmtseins eines Körpers charakterisiert, heifst Temperatur: einer Vermehrung des Erwärmtseins entspricht eine Steigerung oder eine Erhöhung der Temperatur, einer Verminderung — eine Verringerung oder Erniedrigung der Temperatur. Die Ursache des gröfseren oder geringeren Erwärmtseins der Körper nennt man Wärme.

Im vorhergehenden Paragraphen war die Temperatur als eine Gröfse „zweiter Art" gekennzeichnet worden, die an und für sich nicht gemessen werden kann. Setzt man aber gewisse Temperaturen als Ausgangspunkte fest, so ist man im stande, eine Temperaturskala zu entwerfen und die Temperaturdifferenzen als Gröfsen „erster Art" einzuführen.

Der subjectiven Wahrnehmung einer Temperaturänderung mufs eine gewisse, in dem seine Temperatur ändernden Körper vor sich gehende Veränderung entsprechen. Diese Veränderung besteht im folgenden. Die Moleküle eines Körpers sind niemals in Ruhe, sie bewegen sich fortwährend. Die Geschwindigkeit ihrer Bewegung jedoch kann sich ändern und gerade diese Änderung stellt das Wesen dessen dar, was in unserem Tastsinne die Vorstellung von einer Veränderung des Wärmezustandes der Materie hervorruft. Je schneller sich die Moleküle bewegen, um so höher ist die Temperatur des gegebenen Stoffes.

Bei der gröfsten Mehrzahl der Stoffe nimmt man wahr, dafs sich zugleich mit einer Temperaturerhöhung das von einer gegebenen Menge der Substanz eingenommene Volumen vergröfsert. Man benutzt diese Thatsache dazu, die Einheit der Temperaturdifferenz, den Tempe-

raturgrad zu definieren und eine Temperaturskala zu entwerfen. Es sei hier daran erinnert, dafs eine solche Skala erhalten werden kann, wenn man z. B. die Volumenänderung des unter konstantem, äufserem Druck stehenden Wasserstoffs beobachtet. Im III. Bande werden wir eine andere Methode zum Entwerfen einer Temperaturskala kennen lernen; sie gründet sich auf die Beobachtung der Druckänderung von Wasserstoff bei konstantem Volumen. Die Versuche haben gezeigt, dafs man viele Temperaturen in stets gleicher Weise wiederholt herstellen kann, so unter anderem auch die folgenden zwei ganz bestimmten Temperaturen: Die Temperatur des schmelzenden Eises bei bestimmtem Druck und diejenige des siedenden Wassers, auf dessen Oberfläche (von der Luft oder einem anderen Gase) ein Druck ausgeübt wird, der 1,0336 kg auf jeden Quadratcentimeter oder 10336 kg auf jeden Quadratmeter beträgt und gleich dem Druck einer Quecksilberschicht (bei 0°) von 760 mm Höhe ist. Denken wir uns eine bestimmte Menge Wasserstoff, z. B. 1 kg in ein mit schmelzendem Eis umgebenes Gefäfs gebracht, so dafs er die Temperatur dieses Eises annimmt, und sei sein Volumen hierbei gleich v, wo v z. B. die Zahl der vom Gase eingenommenen Kubikmeter bezeichnet; er wird dann, wenn man ihn darauf mit Dämpfen siedenden Wassers umgiebt, das gröfsere Volumen V annehmen. Die ganze Volumenzunahme $V - v$ teilen wir nun in 100 gleiche Teile und nennen einen Grad (1°) diejenige Temperaturdifferenz, welcher die Volumenzunahme des Wasserstoffs um die Gröfse $\frac{V - v}{100}$ entspricht. Die Schmelztemperatur des Eises kann man an den Anfang der Temperaturskala setzen; von ihr werden dann alle anderen Temperaturen gerechnet. Dieses drückt man so aus, dafs man die Schmelztemperatur des Eises gleich Null annimmt (0°); ihr entspricht das Volumen v; offenbar wird danach die Temperatur des siedenden Wassers, bei welcher unsere gedachte Wasserstoffmenge das Volumen V hat, gleich 100°. Die Temperatur, bei welcher das Volumen gleich

$$v + n\frac{V - v}{100}$$

wird, setzt man gleich n^0. Wie man sieht, sind 100° und n^0 streng genommen nicht die Temperaturen der Körper, sondern blofs die Differenzen zwischen den Temperaturen der Körper und des schmelzenden Eises. Der ganze Zwischenraum zwischen der Schmelztemperatur des Eises und der Siedetemperatur des Wassers ist bei uns in 100 Teile oder Grade geteilt, wobei ein jeder Grad der Temperaturerhöhung die gleiche Volumenzunahme $\frac{V - v}{100}$ des Wasserstoffs hervorruft. Das Verhältnis dieser Zunahme zum ursprünglichen Volumen v bei 0° heifst der Aus-

dehnungkoeffizient des Wasserstoffs; wenn man ihn mit α bezeichnet, so ist

$$\alpha = \frac{V - v}{100\, v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Versuche haben ergeben, dafs $\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00366$ ist. Die Gröfse α stellt sich uns als unbenannte Zahl dar, aber nach § 6 sieht man leicht ein, dafs α der Zahlenwert einer besonderen physikalischen Gröfse ist, die man die Ausdehnbarkeit des Wasserstoffs durch die Wärme nennen könnte. Wenn man die Temperatureinheit (Grad) ändern würde, indem man z. B. das Volumen $V - v$ nicht durch 100 (Celsiusskala), sondern durch 80 (Réaumur) oder durch 180 (Fahrenheit) teilen würde, so würde sich damit zugleich die Einheit der Ausdehnbarkeit durch die Wärme und ihr Zahlenwert α ändern.

Aus der Definition des Ausdehnungskoeffizienten α folgt, dafs derselbe (für den Wasserstoff) eine konstante Gröfse ist, und dafs, wenn man jetzt mit V_0 das Volumen einer gegebenen Wasserstoffmenge bei 0^0, mit V_T und V_t die Volumina bei den Temperaturen T und t bezeichnet, für α gesetzt werden kann

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{V_T - V_t}{T - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

denn wir nehmen an, dafs die Temperaturänderungen den Volumenänderungen des Wasserstoffs proportional seien, so dafs $(T - t) : (V_T - V_t) = 100 : (V_{100} - V_0)$ ist. In Formel (6) ist $V = V_{100}$ und $V = V_0$; aus (7) ergiebt sich, wenn man $t = 0$ und $T = t$ setzt, der besondere Fall

$$\alpha = \frac{V_t - V_0}{V_0\, t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Endlich folgt aus (8)

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für eine andere Temperatur T erhält man $V_T = V_0 (1 + \alpha T)$, und hieraus

$$V_T = \frac{V_t (1 + \alpha T)}{1 + \alpha t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Das Binom $1 + \alpha t$ heifst das Ausdehnungsbinom.

Der Apparat, welcher uns ermöglicht, aus dem Volumen (oder dem Druck) einer gegebenen Wasserstoffmenge auf die Temperatur zu schliefsen, heifst Wasserstoffthermometer.

Nehmen wir jetzt an Stelle des Wasserstoffs eine bestimmte Menge eines beliebigen anderen Stoffes und führen wir eine Reihe von Messungen seiner Volumina V_t und der ihnen entsprechenden Temperaturen t, welche wir mit Hülfe des Wasserstoffthermometers messen, aus. Wir erhalten sodann zwei Zahlenreihen V_t und t. Wenn es sich hier-

bei zeigt, dafs gleichen Temperaturerhöhungen auch gleiche Volumenänderungen entsprechen, so erweist sich die Gröfse α, welche sich nach einer der Formeln (7) oder (8) berechnen läfst, als eine konstante Zahl, die wir Ausdehnungskoeffizient der untersuchten Substanz nennen. Auch die Formeln (9) und (10) behalten ihre Gültigkeit. Wenn hingegen die für Volumen und Temperatur der Substanz gefundenen Zahlen keine konstante, nach Formel (7) berechnete Zahl ergeben, so verliert der frühere Begriff des Ausdehnungskoeffizienten einer Substanz seine Bedeutung. Er bezog sich auf den Wasserstoff und wurde als eine konstante Gröfse definiert. Wir können nun in diesem Falle den Begriff des Ausdehnungskoeffizienten als einer veränderlichen, von der Temperatur abhängigen Gröfse einführen. Die Formel (7) giebt uns dann zunächst den sogenannten mittleren Ausdehnungskoeffizienten α_m zwischen den Temperaturgrenzen T und t, so dafs

$$\alpha_m = \frac{1}{V_0} \frac{V_T - V_t}{T - t} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

ist. Diese Gröfse hängt von zwei Temperaturen T und t ab.

Die Formel (8) giebt uns den mittleren Ausdehnungskoeffizienten zwischen den Temperaturgrenzen 0^0 und t^0, welcher in die Formel (9) eingesetzt

$$V_t = V_0 (1 + \alpha_m t) \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

giebt; hier hängt α_m von t ab. Statt (10) erhalten wir jetzt

$$V_T = \frac{V_t (1 + \alpha'_m T)}{1 + \alpha_m t} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

wo α_m der mittlere Ausdehnungskoeffizient zwischen 0^0 und t^0, α'_m derselbe zwischen 0^0 und T^0 ist. Nehmen wir an, die Substanz habe bei t^0 das Volumen V; erhöht man die Temperatur um die kleine Gröfse $\varDelta t$ [1]), so ruft dies eine Volumenvergröfserung um die kleine Gröfse $\varDelta v$ hervor. Nach Formel (11) findet man

$$\alpha_m = \frac{1}{V_0} \frac{\varDelta v}{\varDelta t} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Es ist dies der mittlere Ausdehnungskoeffizient für das kleine Temperaturintervall zwischen t und $t + \varDelta t$. Läfst man nun die Gröfse $\varDelta t$ unbegrenzt kleiner werden, so nimmt auch die Gröfse $\varDelta v$ unbegrenzt ab; der mittlere Ausdehnungskoeffizient α_m strebt dabei einer gewissen Grenze zu, welche von der Temperatur t abhängt, der $\varDelta t$ hinzugefügt war. Somit ist

[1]) Ein kleiner Zuwachs irgend einer Gröfse x wird durch das Symbol $\varDelta x$ ausgedrückt.

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

oder in der Bezeichnungsweise der Differentialrechnung

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (15, a)$$

Die Gröfse α heifst der **Ausdehnungskoeffizient der Substanz bei t^0** und stellt eine Funktion der Gröfse t dar, wobei letztere mit Hülfe des Wasserstoffthermometers bestimmt wird.

Bisweilen betrachtet man die Veränderung der linearen Dimensionen eines (**festen**) Stoffes im Zusammenhang mit den Änderungen seiner Temperatur. Bezeichnen wir nun mit l_0, l_T und l_t die Werte der Länge irgend einer zwei Punkte der gegebenen Stoffmenge verbindenden Geraden bei den Temperaturen 0^0, T^0 und t^0, die wie früher mit dem Wasserstoffthermometer gemessen sind; wenn z. B. aus dem Stoffe ein Stab angefertigt war, so können l_0, l_T und l_t die Längen dieses Stabes bezeichnen. Die Gröfse

$$\beta_m = \frac{1}{l_0} \frac{l_T - l_t}{T - t} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

heifst dann der mittlere Koeffizient der linearen Ausdehnung innerhalb der Temperaturen T und t. Wir haben ferner, entsprechend (12)

$$l_t = l_0 (1 + \beta_m t) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

wo β_m der mittlere Koeffizient der linearen Ausdehnung zwischen 0^0 und t^0 ist, und endlich giebt uns

$$\beta = \frac{1}{l_0} \lim \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

oder

$$\beta = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (18, a)$$

den Koeffizienten der linearen Ausdehnung bei t^0.

Die Temperaturen unterhalb 0^0 werden als negativ betrachtet. Wenn man für die Temperatur Null nicht die Schmelztemperatur des Eises, sondern die sogenannte absolute Nulltemperatur annimmt, welche nach der Celsiusskala um 273^0 niedriger liegt, so heifst die von diesem Ausgangspunkte gerechnete Temperatur die **absolute**. Bezeichnet man sie mit T, so folgt aus der Definition

$$T = 273 + t \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

wo t die Temperatur nach der gewöhnlichen Celsiusskala ist.

2. **Dichte und specifisches Volumen.** In der Physik bezeichnet man mit dem Ausdruck „Dichte“ zwei völlig verschiedene Gröfsen; mit einer derselben werden wir uns im zweiten Abschnitte bekannt machen. Der Begriff der anderen Gröfse geht aus der

Beobachtungsthatsache hervor, dafs das Gewicht p eines Stoffes von gegebenem Volumen v von der Art dieses Stoffes abhängt. Hieraus entspringt die Vorstellung von einer gewissen Gröfse D, die für jede Stoffart charakteristisch ist; man nennt sie Dichte und setzt voraus, dafs sie für verschiedene Stoffe proportional dem am selben Orte der Erdoberfläche bestimmten Gewichte p gleicher Volumina v dieser Stoffe und umgekehrt proportional den Volumina v verschiedener Stoffe vom gleichen Gewichte p ist.

Hieraus folgt

$$D = C\frac{p}{v} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

Setzt man den Koeffizienten $C = 1$ (vergl. § 7), so erhält man

$$D = \frac{p}{v} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

Diese Formel zeigt, dafs für $p = 1$ und $v = 1$ auch die Dichte $D = 1$ wird; also hat man, wenn $C = 1$ gesetzt wird, als Einheit der Dichte zu wählen die Dichte einer solchen Substanz, deren Volumeneinheit die Einheit des Gewichtes besitzt. Wenn man das Gramm und das Kubikcentimeter als Gewichts- resp. Volumeneinheit ansieht, so wird die Einheit der Dichte angenähert (§ 6) gleich der Dichte des Wassers bei 4° C. Behält man die Formel (20) bei, so kann man die Dichte des Wassers als Einheit annehmen und zugleich die Einheiten des Gewichtes und Volumens willkürlich wählen. Die Formel (21) geht für $v = 1$ in die Gleichheit $D = p$ über. Das zeigt uns, wie bei einer besonderen Wahl der Einheiten die Dichte eines Stoffes durch das Gewicht seiner Volumeneinheit (nach unserer verkürzten Ausdrucksweise) gemessen werden kann.

Bezeichnen wir jetzt mit p_1 das Gewicht des Volumens v von Wasser, dessen Dichte wir als Einheit wählen, so erhalten wir nach (20)

$$1 = C\frac{p_1}{v} \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

Dividiert man (20) durch (22), so kommt

$$D = \frac{p}{p_1} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

Der Zahlenwert für die Dichte einer Substanz wird also erhalten, wenn man das Gewicht eines beliebigen Volumens dieser Substanz durch das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser dividiert.

Im Früheren (S. 18) war darauf hingewiesen worden, dafs keine Ursache vorhanden sei, zwei angeblich verschiedene Gröfsen, welche Dichte und specifisches Gewicht genannt werden, einzuführen. Bezeichnet man die Zahl $1 : C$ mit c, so erhält man anstatt (20) und (21) Ausdrücke für den Zahlenwert p des Gewichtes eines homogenen Körpers

$$p = cDv \text{ oder } p = Dv \quad \dots \dots \quad (24)$$

Hier ist c der Zahlenwert des Gewichtes der Volumeneinheit derjenigen Substanz, deren Dichte als Einheit angenommen wurde; die zweite Formel gilt für den Fall, dafs die Volumeneinheit einer solchen Substanz die Einheit des Gewichtes besitzt. Für den Fall, dafs man es mit einer heterogenen Substanz zu thun hat, verliert die ursprüngliche Definition der Dichte, die in den Formeln (20) und (21) ausgedrückt ist, ihren Sinn. Man kann indes vom Begriffe der Dichte, als einer für die gegebene Substanz konstanten Gröfse zu dem Begriffe der Dichte als einer kontinuierlich sich ändernden übergehen. So erhalten wir die Formeln

$$D_m = \frac{Cp}{v} \text{ oder } D_m = \frac{p}{v} \quad \cdots \cdots \quad (25)$$

welche die mittlere Dichte des Volumens v ergeben, und die Formeln

$$D = C \lim \frac{\Delta p}{\Delta v} \text{ resp. } D = \lim \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad \cdots \quad (26)$$

oder

$$D = C\frac{dp}{dv} \text{ resp. } D = \frac{dp}{dv} \quad \cdots \cdots \quad (26, a)$$

welche für die „Dichte in einem gegebenen Punkte" (um welchen herum ein sehr kleines Volumen Δv liegt) gelten. Es sind dies die Grenzwerte der mittleren Dichte eines unbegrenzt abnehmenden Volumens Δv.

Specifisches Volumen einer homogenen Substanz heifst das von der Gewichtseinheit dieser Substanz eingenommene Volumen. Bezeichnen wir diese Gröfse mit V, so giebt die zweite Formel (24)

$$DV = 1 \text{ und } V = \frac{1}{D} \quad \cdots \cdots \quad (27)$$

Bei bestimmter Wahl der Einheiten ist also der Zahlenwert des specifischen Volumens gleich dem reciproken Zahlenwerte der Dichte.

Mit Änderung der Temperatur ändert sich auch das specifische Volumen entsprechend der Formel

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t) \quad \cdots \cdots \quad (28)$$

wo α der mittlere Ausdehnungskoeffizient zwischen 0^0 und t^0 ist. Die Formeln (27) und (28) ergeben

$$\frac{1}{D_t} = \frac{1}{D_0} (1 + \alpha t) \text{ oder } D_t = \frac{D_0}{1 + \alpha t} \quad \cdots \quad (29)$$

wo D_t und D_0 die Dichte bei t^0 und 0^0 ausdrücken. In den Tabellen für die Zahlenwerte der verschiedenen physikalischen Gröfsen giebt man gewöhnlich die Dichte für 0^0 an (während die Dichte des Wassers

bei 4° C. als Einheit angenommen ist); wir wollen sie die tabellarische Dichte nennen. Für Quecksilber ist

$$D_0 = 13{,}596 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

3. Druck und Spannung. Die Körper sind in der Natur, wie uns die Beobachtung lehrt, immer einem auf ihre Oberfläche wirkenden Drucke ausgesetzt, der von den anderen sie umgebenden Körpern ausgeht. Diesen Druck p werden wir in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche ausdrücken, d. h. wir werden als Einheit des äufseren Druckes den Druck von einem Kilogramm auf jeden Quadratmeter der Oberfläche annehmen. Eine andere Einheit des Druckes ist der Atmosphärendruck; er ist gleich dem Drucke einer Quecksilberschicht von 760 mm Höhe bei 0°, resp. gleich dem Drucke von rund einem Kilogramm auf jeden Quadratcentimeter. Bezeichnen wir diese Druckeinheit mit A. Da eine Wasserschicht von 1 mm Dicke auf jeden Quadratmeter Oberfläche einen Druck von einem Kilogramm ausübt, so ist es klar, dafs $A = 760 \times D_0$ ist, wo D_0 die Dichte des Quecksilbers bedeutet; nach (30) erhält man

$$A = 760 \times 13{,}6 = 10\,336 \text{ kg pro Quadratmeter} \quad . \quad . \qquad (31)$$

Unter der Wirkung des äufseren Druckes verringert sich das Volumen der Körper, aber zu gleicher Zeit nimmt auch der Gegendruck des Körpers auf die ihn unmittelbar umgebenden Körper zu; diesen Gegendruck nennen wir elastische Spannung; als Einheit der elastischen Spannung eines Körpers nehmen wir diejenige Spannung an, bei welcher der Körper auf einen Quadratmeter Oberfläche der ihn umgebenden Körper einen Druck von einem Kilogramm ausübt. Die Volumenänderung des Körpers hört erst dann auf, wenn seine elastische Spannung gleich dem äufseren Drucke wird. Betrachtet man einen Körper unter Umständen, wo sein Volumen unter der Wirkung äufserer Druckkräfte sich nicht ändert, so erhält man für die elastische Spannung und den äufseren Druck dieselben Zahlenwerte. Infolgedessen kann man unter den gekennzeichneten Bedingungen die beiden Ausdrücke „Druck“ und „elastische Spannung“ unterschiedslos gebrauchen, obgleich diese beiden Gröfsen ihrem Wesen nach durchaus verschieden sind. Übrigens ist leicht einzusehen, dafs der Druck, unter dem sich ein Körper befindet, nichts anderes ist, als die elastische Spannung des oder der Körper, welche den ersten von allen Seiten umgeben.

Auf S. 33 wurde auf Temperatur, Dichte (oder specifisches Volumen) und Druck oder Spannung als auf die wichtigsten Zustandsgröfsen eines Körpers hingewiesen und es wurde gesagt, dafs bei Änderung jeder beliebigen Eigenschaft eines Körpers, die durch eine obiger Gröfsen gekennzeichnet ist, wir von einer Zustandsänderung des Körpers sprechen werden. Hieraus folgt, dafs z. B. jede Temperatur- oder

Dichte- oder Druckänderung einer Zustandsänderung des Körpers entspricht, wobei dieser Ausdruck in erweitertem Sinne zu verstehen ist. Im engeren Sinne des Wortes unterscheidet man, wie oben gesagt wurde, drei Zustandsformen (Aggregatzustände) der Materie: die feste, flüssige und gasförmige. Sie sind indes nicht scharf voneinander geschieden; bisweilen befindet sich die Materie in einem Zustande, den man als Zwischenstufe zwischen ihnen bezeichnen kann. So werden wir im vierten Abschnitte sehen, daſs die Materie im sogenannten kolloidalen oder plastischen Zustande, welcher eine Zwischenstufe zwischen dem festen und flüssigen darstellt, ein besonderes Interesse verdient.

Es möge hier auf einige charakteristische Merkmale der drei Zustandsformen hingewiesen werden.

1. Der feste Zustand. Materie im festen Zustande und in bestimmter Menge, ein sogenannter fester Körper, hat eine bestimmte Gestalt, welche sich im allgemeinen unbegrenzt lange erhält. Diese Gestalt kann sich durch Einwirkung äuſseren Druckes ändern und wird, nachdem jener aufgehört hat zu wirken, mehr oder weniger vollständig wieder angenommen. Die Temperatur und der äuſsere Druck ändern das Volumen eines festen Körpers nur sehr wenig. Seine Moleküle befinden sich zwar in Bewegung, doch entfernt sich jedes von ihnen hierbei nur sehr wenig aus einer gewissen mittleren Lage. Teilen läſst sich ein fester Körper nur durch einen verhältnismäſsig bedeutenden, auf seine Oberfläche ausgeübten Druck.

2. Der flüssige Zustand. Die Materie im flüssigen Zustande oder ein sogenannter flüssiger Körper hat keine bestimmte Gestalt und ändert sich letztere überhaupt sehr leicht; ebenso leicht ist es, einen flüssigen Körper zu zerteilen. Das Volumen einer Flüssigkeit ändert sich, wenn ihre ganze Oberfläche einem Drucke ausgesetzt wird, nur sehr wenig; sobald derselbe nachläſst, wird das frühere Volumen vollständig wieder angenommen. Die Moleküle einer Flüssigkeit bewegen sich nicht nur um ihre mittleren Lagen, sondern sie ändern allmählich auch die letzteren, so daſs ihre gegenseitige Lage sich verändert. Die Flüssigkeiten sind dem Pascalschen Grundgesetze unterworfen: ein auf die Oberfläche der Flüssigkeit von äuſseren Kräften ausgeübter Druck wird durch sie nach allen Seiten hin gleichmäſsig fortgepflanzt, d. h. wenn auf die Einheit der Flüssigkeitsoberfläche ein Druck ausgeübt wird, so wird derselbe von ihr auf jede Oberflächeneinheit der sie umgebenden Körper übertragen. Wenn man das Eigengewicht der Flüssigkeit mit in Betracht zieht, so folgt aus dem Pascalschen Gesetze das Archimedische Gesetz: ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt von letzterer einen Auftrieb, welcher einen scheinbaren Gewichtsverlust, gleich dem Gewichte der vom eingetauchten Körper verdrängten Flüssigkeit, veranlaſst.

Alle Flüssigkeiten gehen von selbst und unter allen Umständen ununterbrochen in den gasförmigen Zustand über, welche Erscheinung Verdunstung genannt wird.

3. Der gasförmige Zustand. Materie im gasförmigen Zustande oder einfacher ein Gas besteht aus Molekülen, deren jedes sich in geraden Linien bewegt und seine Bewegungsrichtung nur beim Zusammentreffen mit anderen Molekülen oder der Oberfläche eines das Gas begrenzenden Körpers ändert (z. B. den Wandungen des das Gas einschliefsenden Gefäfses). Infolgedessen erfüllt ein Gas in kurzer Zeit jeden in seiner Nachbarschaft vorhandenen leeren Raum; es hat, wie man sagt, das Bestreben, sich auszudehnen, d. h. ein möglichst grofses Volumen einzunehmen, was aber, wie später noch ausgeführt werden wird, nicht von abstofsenden Kräften herrührt. Die Gesamtheit der Stöfse der die Oberfläche eines dem Gase benachbarten Körpers treffenden Gasmoleküle ruft den Druck hervor, welchen dieser Körper von seiten des Gases erleidet. Dieser Druck, den man Gasdruck nennt, wird, wie wir gesehen haben, entweder durch die Anzahl Kilogramme auf den Quadratmeter Oberfläche oder durch den Atmosphärendruck gemessen. Damit sich das Volumen eines Gases nicht ändert, ist es erforderlich, dafs seine Spannung dem auf das Gas von aufsen her wirkenden Drucke gleich sei. Das Volumen eines Gases nimmt zu oder ab, sobald seine Spannung gröfser resp. kleiner ist als der äufsere Druck.

Die Gesetze von Pascal und Archimedes gelten auch für die Gase.

Die Gase folgen angenähert den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac.

Das Gay-Lussacsche (Charlessche) Gesetz lautet: Der Ausdehnungskoeffizient der Gase, welche bei konstantem Aufsendruck erwärmt werden, ist eine konstante Gröfse und für alle Gase dieselbe, nämlich

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00366 \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

Die Formel (12) nimmt demnach, wenn man V statt V_t schreibt, folgende Form an

$$V = V_0\left(1 + \frac{1}{273}t\right) \quad \cdots\cdots \quad (33)$$

Das Boyle-Mariottesche Gesetz lautet: Das Volumen einer gegebenen Gasmenge ist indirekt proportional dem Aufsendruck (oder die Spannung einer gegebenen Gasmenge ist ihrem Volumen indirekt proportional), wenn die Temperatur des Gases ungeändert bleibt.

Diese beiden Gesetze zeigen, dafs sich das Volumen eines Gases beträchtlich ändern kann, wenn sich die Temperatur und besonders, wenn sich der Aufsendruck ändert.

Gasdichte. Es ist wohl festzuhalten, dafs zur Dichtemessung der Gase unter anderen zwei verschiedene Einheiten im Gebrauch sind.

a) Als Einheit der Dichte gilt die Dichte des Wassers. Der Zahlenwert für die Dichte eines gegebenen Gases ist hierbei eine Gröfse, welche sich in den weitesten Grenzen in Abhängigkeit von der Temperatur des Gases und von dem auf demselben lastenden Drucke ändert. Die durch obige Einheit gemessene Dichte eines Gases können wir als Dichte des Gases bezogen auf Wasser bezeichnen.

b) Bei der Dichtebestimmung eines Gases nimmt man sehr oft die Dichte der Luft bei der gleichen Temperatur und demselben Druck als Einheit an. Diese Dichte ist, wenigstens innerhalb der Grenzen, für welche die Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac für Luft und das zu untersuchende Gas gelten, eine konstante Gröfse. Wir können sie als Dichte des Gases, bezogen auf Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur, bezeichnen.

Dafs eine strenge Sonderung der beiden Dichten notwendig ist, geht unter anderem daraus hervor, dafs im Wortlaut verschiedener sich auf die Gase beziehenden Gesetze gewöhnlich nur von der „Dichte des Gases" die Rede ist, obgleich bald von der ersten, bald von der zweiten gesprochen wird. Es mögen hier zwei Beispiele dafür folgen:

1. Das Boyle-Mariottesche Gesetz in veränderter Form lautet: Die Dichte einer gegebenen Gasmenge bei konstanter Temperatur ist dem Aufsendruck direkt proportional. Hier ist von der auf Wasser bezogenen Dichte die Rede.

2. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle bei gegebener Temperatur ist der Quadratwurzel aus der Dichte des Gases indirekt proportional. Hier ist von der auf Luft bezogenen Dichte die Rede. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ändert sich also nicht bei Verdichtung oder Verdünnung des Gases, wie dies scheinen könnte, falls man die zwei Dichten verwechselt.

Der Zustand eines Systems. Wenn man es mit einem System von Körpern oder einzelnen Molekülen zu thun hat, so kann der Begriff des „Zustandes" noch weiter verallgemeinert werden. Wir wollen jede Änderung in der gegenseitigen Lage der Teile des Systems ebenfalls eine Zustandsänderung des Systems nennen.

Zum Schlufs sei noch bemerkt, dafs der Übergang eines Körpers oder Systems aus einem gegebenen Zustande in einen anderen auf unendlich vielen verschiedenen Wegen erfolgen kann. So kann z. B. der Übergang einer gegebenen Gasmenge aus einem Zustande niedriger Temperatur und kleinen Volumens in einen mit hoher Temperatur und grofsem Volumen dadurch erfolgen, dafs man entweder das Gas bei

konstantem Volumen erwärmt und darauf bei konstanter Temperatur ausdehnt oder umgekehrt zuerst das Volumen und dann die Temperatur ändert, oder endlich Temperatur und Volumen gleichzeitig ändert, was auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen kann.

§ 9. **Erhaltung der Materie.** Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir uns mit den Zustandsänderungen der Materie bekannt gemacht.

Zu den Zustandsänderungen der Materie kann man auch die Vorgänge bei den chemischen Reaktionen rechnen. Vereinigen sich Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser, so ist in dem letzteren sowohl Wasserstoff als auch Sauerstoff enthalten, jedoch in einem ganz besonderen Zustande der Zerteilung in Atome.

Für alle möglichen, sowohl physikalischen als auch chemischen Zustandsänderungen gilt folgendes Grundprinzip von der Erhaltung der Materie:

Bei keiner irgendwie möglichen physikalischen oder chemischen Veränderung, der die Materie unterworfen ist, wird sie neu erzeugt oder verschwindet sie; ihre Menge bleibt immer unverändert dieselbe.

Weiter unten wird eine Erläuterung dieses Prinzips gegeben und genauer darauf hingewiesen werden, auf welche Gröfse sich eigentlich die Unveränderlichkeit, von welcher eben die Rede war, bezieht.

§ 10. **Einige Sätze aus der Mathematik.** Im folgenden sollen einige wichtige mathematische Sätze in die Erinnerung zurückgerufen resp. in diejenige Form gebracht werden, in der sie später benutzt werden.

I. Das Mafs für ebene Winkel und Raumwinkel. Gewöhnlich mifst man ebene Winkel (folglich auch Flächenwinkel) durch Grade, Minuten und Sekunden, wobei der rechte Winkel gleich 90^0 gesetzt wird. Aufserdem werden ebene Winkel auch durch den als Einheit des Winkels geltenden Winkel gemessen, dessen Bogen gleich den zugehörigen Schenkelabschnitten ist, d. h. durch den Winkel von

$$57^0 14' 44{,}8'' = 57^0{,}29578 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Der Winkel von vier Rechten ist danach gleich

$$\alpha = 2\pi = 6{,}28319 \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

ein Rechter gleich $\frac{\pi}{2}$ u. s. w.

Hat man auf diese Weise den Zahlenwert eines Winkels bestimmt, so kann man für sehr kleine Winkel

$$\sin \alpha = \alpha;\ tg\, \alpha = \alpha \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

setzen.

Dies ergiebt sich auch aus der Definition des Sinus und der Tangente.

Ein Raumwinkel (an der Spitze eines beliebigen Kegels) wird bekanntlich folgendermafsen gemessen: Stellen wir uns die Oberfläche einer Kugel vom Radius r, deren Zentrum sich im Scheitel des Raumwinkels befindet, vor; letzterer trennt von der Kugelfläche einen Teil ab, den wir mit s bezeichnen wollen.

Das Verhältnis $s:r^2$ hängt vom Radius r nicht ab, und da s dem Raumwinkel α proportional ist, so kann man $\alpha = C\frac{s}{r^2}$ setzen. Für $C = 1$ hat man dann

$$\alpha = \frac{s}{r^2} \quad \ldots \quad (37)$$

d. h. der Zahlenwert eines Raumwinkels ist gleich dem Verhältnisse der Fläche s zum Quadrat des Radius. Als Einheit des Raumwinkels nehmen wir hierbei einen solchen Winkel an, für welchen die Fläche s genau r^2 Flächeneinheiten enthält. Der ganze Raumwinkel, welcher um einen Punkt herum liegt, ist gleich 4π, da für ihn $s = 4\pi r^2$ ist; der Raumwinkel, welcher von einer durch seinen Scheitel gehenden Ebene begrenzt ist, ist gleich 2π, denn das zugehörige s ist die Oberfläche einer Halbkugel. Ein Raumwinkel, welcher von drei zu einander senkrechten Ebenen gebildet wird, ist gleich $4\pi:8 = \pi:2$. Aus (37) folgt

$$s = \alpha r^2 \quad \ldots \quad (38)$$

II. Berechnung einiger Gröfsen von der Form $lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Die Formeln (15), (18) und (26) weisen darauf hin, dafs es notwendig ist, Gröfsen von der Form $lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen zu können, wo Δx den sehr kleinen Zuwachs einer Gröfse x und Δy den zugehörigen Zuwachs einer anderen Gröfse y, die von x abhängt, bedeutet. Wenn y irgend eine Funktion von x ist, was man symbolisch wie folgt ausdrückt

$$y = f(x) \quad \ldots \quad (39)$$

so ist der gesuchte Grenzwert eine neue Funktion von x, die man mit y' oder $f'(x)$ bezeichnet, also

$$y' = f'(x) = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[= \frac{dy}{dx}\right] \quad \ldots \quad (40)$$

Diese neue Funktion heifst die Ableitung (der Differentialquotient) von y nach x.

Wir wollen nunmehr die Ableitungen für zwei besondere Fälle finden.

1. Es sei

$$y = (fx) = Ax^n + Bx^m + Cx^p + \cdots \quad (41)$$

wo n, m, p u. s. w. ganze positive Zahlen, $A, B, C \ldots$ willkürliche Zahlenkoeffizienten sind. Wenn man zur Gröfse x die kleine Gröfse Δx hinzufügt, so erhält man anstatt y die veränderte Gröfse $y + \Delta y$,

wobei sich die Gleichung

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^n + B(x + \Delta x)^m + C(x + \Delta x)^p + \cdots$$

oder

$$y + \Delta y = A\left(x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots\right)$$
$$+ B\left(x^m + m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \cdots\right)$$
$$+ C\left(x^p + p x^{p-1} \Delta x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \cdots\right) + \cdots$$

ergiebt. Zieht man hiervon (41) ab und dividiert durch Δx, so erhält man, wenn man die Glieder, welche Δx nicht enthalten, vorausschreibt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A n x^{n-1} + B m x^{m-1} + C p x^{p-1} + \cdots + K \Delta x,$$

wo K die Summe aller Glieder mit dem Faktor Δx ist. Für den Grenzwert, für welchen Δx unendlich abnimmt, verschwindet das Glied $K \Delta x$ und wir erhalten folgende Formel für die Ableitung von $y = f(x)$

$$\left.\begin{aligned} y' = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[= \frac{dy}{dx}\right] = A n x^{n-1} + B m x^{m-1} \\ + C p x^{p-1} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

So erhält man z. B. wenn $y = 4x^3 - 5x^2$ ist, $y' = 12x^2 - 10x$.

2. Setzen wir

$$y = A \sin px \quad (43)$$

wo A und p beliebige Zahlen sind. Wir finden

$$y + \Delta y = A \sin p(x + \Delta x) = A \sin px \cos p\Delta x + A \cos px \sin p\Delta x.$$

Zieht man hiervon (43) ab, so kommt

$$\Delta y = -A \sin px\,(1 - \cos p\Delta x) + A \cos px \sin p\Delta x.$$

Im ersten Gliede werde $1 - \cos p\Delta x$ durch $2\left(\sin \frac{p\Delta x}{2}\right)^2$ und sodann auf Grund der Formeln (36) die Sinusse sehr kleiner Winkel durch die Winkel selbst ersetzt; dividiert man dann die ganze Gleichung durch Δx, so kommt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} A p^2 (\Delta x) \sin px + A p \cos px.$$

Für den Grenzwert verschwindet das erste Glied und man erhält folgendes Resultat:

Wenn

$$y = A \sin px$$

so ist

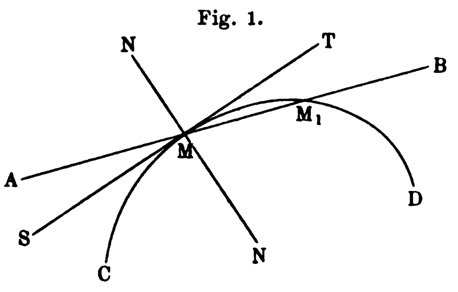
$$y' = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = A p \cos px \quad (44)$$

3. Wir überlassen dem Leser die Herleitung der analogen Formel:

wenn
$$y = A \cos px$$
so ist
$$y' = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[= \frac{dy}{dx}\right] = -Ap \sin x \qquad (45)$$

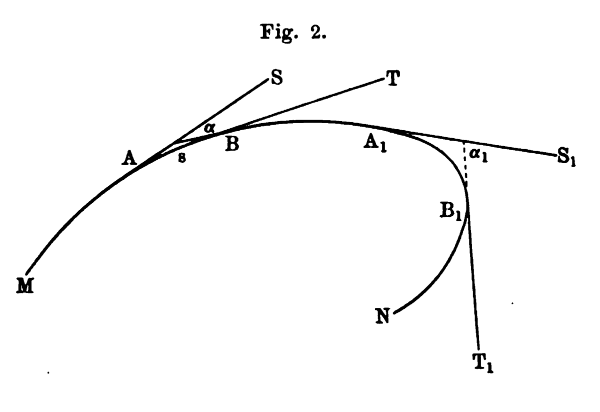
III. **Tangente und Krümmungsradius.** Der Begriff der Tangente in einem gegebenen Punkte M (Fig. 1) einer Kurve CD wird folgendermaſsen erhalten. Wir wählen auf der Kurve einen anderen Punkt M_1, welcher nahe bei M liegt und ziehen durch M und M_1 die Gerade AB. Eine solche Gerade heiſst Sekante der Kurve CD. Stellen wir uns vor, daſs der Punkt M_1, ohne die Kurve zu verlassen, sich dem Punkte M fortwährend nähert, und daſs die Sekante BA unausgesetzt durch M und den bewegten Punkt M_1 führt, dann ist klar, daſs sie sich um den Punkt M drehen wird. Bei Annäherung von M_1 an M wird sich die Sekante unausgesetzt der Lage einer gewissen Geraden ST nähern und diese Gerade heiſst die Tangente der Kurve im Punkte M. Die Gerade NN, welche zu der Tangente senkrecht steht, heiſst die Normale der gegebenen Kurve im Punkte M.

Fig. 1.



Die Richtung einer Kurve wird in jedem Punkte durch die Richtung der Tangente bestimmt. Bei Betrachtung verschiedener Kurven bemerkt man, daſs sich in einigen Teilen derselben die Richtung sehr schnell ändert, in anderen langsamer; hieraus entspringt nun für uns die Vorstellung von der gröſseren oder geringeren Krümmung einer Kurve. Ohne eine genaue Definition dieses Begriffes zu geben, soll hier nur gesagt werden, daſs die Krümmung um so gröſser ist, je gröſser der Winkel α zwischen den Tangenten AS und BT (Fig. 2) ist, welche in den Endpunkten eines Teiles dieser Kurve (mit der Länge s) gezogen sind. Nimmt man

Fig. 2.



$A_1B_1 = AB = s$ an und findet, dafs $\alpha_1 > \alpha$ ist, so kann man sagen, der Teil A_1B_1 habe eine stärkere Krümmung als AB.

Wenden wir uns nun dem Kreise zu, der ja in allen Teilen die gleiche Krümmung hat. Als Mafs dieser Krümmung λ nehmen wir den Winkel zwischen zwei Tangenten an, welche an zwei um die Einheit der (längs der Kreislinie gerechneten) Entfernung von einander abstehende Punkte gezogen sind. Es sei $AB = s$ (Fig. 3) ein Kreisbogen und $\alpha = \angle DFE$ der Winkel zwischen den zu den Punkten A und B gezogenen Tangenten. Da $\angle DFE = \angle ACB$, so ist der Winkel α offenbar proportional dem Bogen s und wir haben

$$\lambda = \frac{\alpha}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Es ist aber $s = \alpha R$, also

$$\lambda = \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Die Krümmung einer Kreislinie wird also durch den reciproken Wert des Radius gemessen. Die Einheit der Krümmung ist die

Fig. 3.

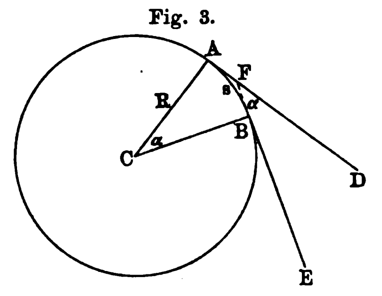
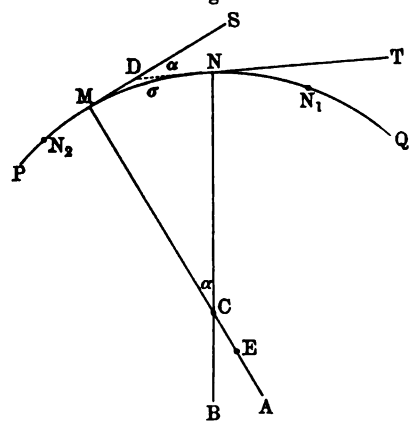


Fig. 4.



Krümmung einer Kreislinie, deren Radius gleich der Einheit ist. Für die beliebige Kurve MN (Fig. 2) erhalten wir die mittlere Krümmung λ_m des Kurvenabschnittes $AB = s$ aus der Formel

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Von dieser wollen wir zum Begriffe der Krümmung einer Kurve in einem gegebenen Punkte derselben übergehen. Wählen wir auf der Kurve PQ (Fig. 4) den Punkt N ganz nahe bei M und möge $MN = \sigma$ sein; ziehen wir zu M und N die Tangenten MS und NT, welche den kleinen Winkel $\angle SDT = \alpha$ bilden und die Normalen MA und NB, welche sich in einem Punkte C schneiden. Die mittlere Krümmung des kleinen Bogens σ ist dann gleich $\lambda_m = \frac{\alpha}{\sigma}$; der Grenz-

wert λ, welchem sich diese Gröfse bei fortgesetzter Annäherung des Punktes N an M nähert, giebt den Zahlenwert der Krümmung im Punkte M; man erhält demnach für die Krümmung

$$\lambda = lim \frac{\alpha}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Wenn N an M heranrückt, so ändert die Normale NB ihre Lage und rückt der Punkt C an der Normalen MA weiter. Er nähert sich hierbei einer gewissen Grenzlage, die wir mit E bezeichnen wollen.

Wir ziehen jetzt durch den Punkt M eine Kreislinie, deren Zentrum sich auf der Normalen MA befindet und deren Krümmung gleich der Kurvenkrümmung im Punkte M ist. Aus (47) und (49) folgt, dafs der Radius R dieses Kreises der Gleichung

$$\lambda = lim \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

genügen mufs.

Dieser Kreis heifst der Krümmungskreis und sein Radius der Krümmungsradius der gegebenen Kurve im Punkte M. Man kann nachweisen, dafs erstens $R = ME$ ist, d. h. dafs das Zentrum des Krümmungskreises die Grenzlage des Durchschnittspunktes zweier unendlich naher Normalen der Kurve hat und dafs zweitens der Krümmungskreis die Grenzlage jener Kreise bildet, welche durch M und zwei benachbarte unendlich nahe Punkte N und N_1 oder N und N_2 gehen.

§ 11. **Vektoren.** Auf S. 31 bezeichneten wir als Vektor eine solche Gröfse, die im gegebenen Punkte nicht nur einen bestimmten Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Richtung hat.

Jeder Vektor kann durch einen Pfeil dargestellt werden. Der Pfeil geht von dem Punkte aus, auf welchen der Vektor sich bezieht; es ist dies der Angriffspunkt des Pfeiles. Die Richtung des Pfeiles wird derjenigen des Vektors gleich gemacht, die Länge desselben proportional der Gröfse des Vektors, d. h. die Anzahl Längeneinheiten, welche in der Länge des Pfeiles enthalten sind, wird gleich oder (besonders, wenn es mehrere Vektoren darzustellen giebt) proportional dem Zahlenwerte des Vektors gemacht.

Aus zwei gegebenen Vektoren mit demselben Angriffspunkte kann man einen dritten konstruieren, welcher durch die Diagonale des Parallelogramms aus den gegebenen Vektoren dargestellt wird. Die gegebenen Vektoren heifsen sodann die Komponenten. Der Übergang von zwei gegebenen Vektoren zu einem dritten heifst geometrische Addition zum Unterschiede von der algebraischen, d. h. der gewöhnlichen Summation. Der dritte Vektor heifst die geometrische Summe der gegebenen Vektoren $P = AB$ und $Q = AC$ (Fig. 5 a. f. S.); die geometrische Summe

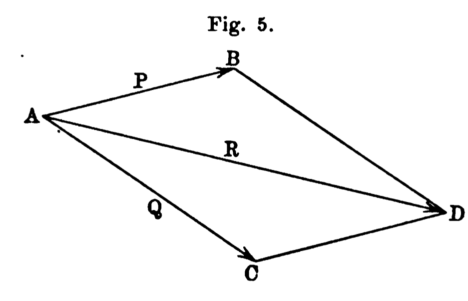
von P und Q ist $R = AD$. Symbolisch wird die geometrische Summierung folgendermaſsen ausgedrückt:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Die Striche über den Buchstaben bedeuten, daſs die Summierung eine geometrische ist.

Die Konstruktion der geometrischen Summe kann auch verkürzt ausgeführt werden: Man zieht vom Endpunkt B eines der beiden Vektoren eine Gerade BD, die gleich und parallel dem anderen Vektor $Q = AC$ ist; mit dem Endpunkte D dieser Geraden verbindet man den Punkt A durch eine zweite Gerade; diese stellt dann die gesuchte geometrische Summe dar.

Fig. 5.



Wenn ein Vektor R gegeben ist, so kann man von ihm auf eine unendliche Anzahl von Arten so zu zwei neuen Vektoren P und Q übergehen, daſs R die geometrische Summe der Vektoren P und Q darstellt. Ein solcher Übergang heiſst Zerlegung des Vektors R in zwei Komponenten P und Q. Wenn P und Q einen rechten Winkel bilden, so ist

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \qquad \cos(R, P) = \frac{P}{R}, \qquad \cos(R, Q) = \frac{Q}{R}.$$

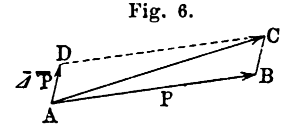
Die geometrische Summe ist gleich der algebraischen, wenn die beiden Vektoren gleiche Richtung haben. Dasselbe gilt auch von Vektoren, welche entgegengesetzte Richtung haben und denen ungleiche Zeichen beigefügt waren; im entgegengesetzten Falle wird die geometrische Summe gleich der algebraischen Differenz. Wenn die Vektoren ihrem Sinne nach als positiv gelten, so besteht folgende Ungleichheit

$$P - Q \leqslant \overline{P} + \overline{Q} \leqslant P + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

wobei $P \geqslant Q$ ist.

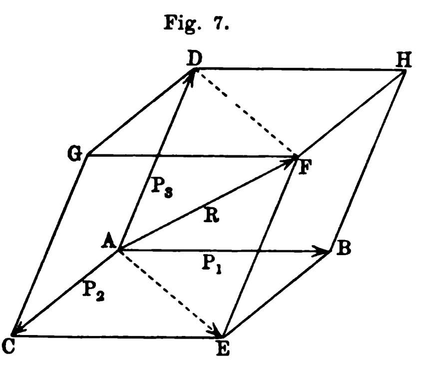
Die Änderung eines Vektors kann eine geometrische sein. Nehmen wir an, es ändere sich der Vektor $P = AB$ (Fig. 6) der Gröſse und Richtung nach derart, daſs der veränderte Vektor durch den Pfeil AC dargestellt werde; wenn man jetzt das Parallelogramm konstruiert, so kann man sich vorstellen, daſs die Änderung durch geometrische Addition des Vektors P mit einem Vektor AD hervorgebracht sei. Diesen Vektor nennen wir den geometrischen Zuwachs des Vektors P und bezeichnen ihn mit $\varDelta \overline{P}$, zum Unterschiede vom algebraischen Zuwachs $\varDelta P$.

Fig. 6.



Die geometrische Summe R dreier Vektoren P_1, P_2 und P_3, welche denselben Angriffspunkt A haben (Fig. 7), wird erhalten, wenn man zuerst zwei Vektoren P_1 und P_2 addiert, deren geometrische Summe der Vektor AE ist, und sodann die Vektoren AE und P_3, deren Summe $R = AF$ ist. Aus der Figur geht hervor, dafs

Fig. 7.



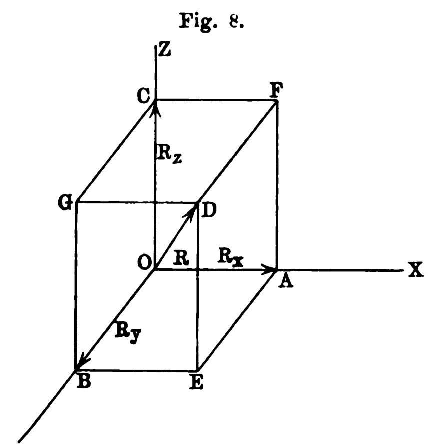
$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3}$$

dargestellt wird durch die Diagonale des aus den drei gegebenen Vektoren konstruierten Parallelepipedons.

Einfacher kann man R finden, wenn man vom Endpunkte B eines der drei Vektoren die Gerade BE || und $= P_2$ und darauf von E aus die Gerade EF || und $= P_3$ zieht. Die Gerade, welche A mit F verbindet, ist alsdann der gesuchte Vektor.

Umgekehrt kann man den Vektor R auf unendlich viele verschiedene Arten durch drei Komponentvektoren ersetzen, nämlich durch die Kanten eines Parallelepipedons, dessen Diagonale R ist. Wenn die drei Komponentvektoren zu einander senkrecht sind, so ist das Parallelepipedon ein rechtwinkliges. Wählen wir den Angriffspunkt der Vektoren zum Anfangspunkt der Koordinatenachsen x, y, z, welche die Richtung der drei Komponentvektoren haben und bezeichnen wir letztere mit R_x, R_y und R_z (Fig. 8), dann ist

Fig. 8.



$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z \quad . \quad . \quad (53)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53,a)$$

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{R}; \qquad \cos(R, y) = \frac{R_y}{R}; \qquad \cos(R, z) = \frac{R_z}{R} \quad (53, b)$$

R_x, R_y und R_z sind die Projektionen des Vektors R auf die Richtungen der Koordinatenachsen.

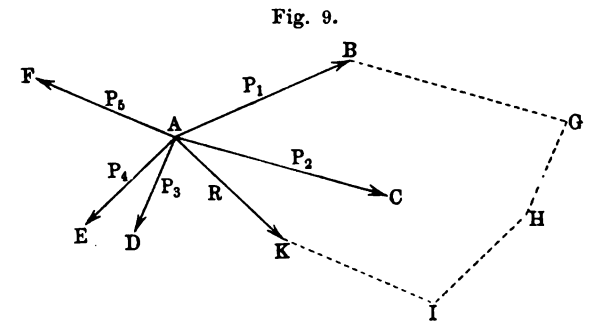
Es seien uns zwei Vektoren P und Q und deren auf den Koordi-

natenachsen liegende Komponenten P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y und Q_z gegeben; aus der analytischen Geometrie folgt dann, dafs $\cos(P, Q) = \cos(P, x) \cos(Q, x) + \cos(P, y) \cos(Q, y) + \cos(P, z) \cos(Q, z)$ ist.

Setzt man dann in die rechte Seite die Werte der Kosinusse nach Formel (53, b) ein, so kommt

$$PQ \cos(P, Q) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Fig. 9.



Wenn eine beliebige Zahl von Vektoren P_1, P_2, P_3, ... P_i den gemeinsamen Angriffspunkt A (Fig. 9) hat, so wird ihre geometrische Summe dadurch erhalten, dafs man zunächst zwei Vektoren geometrisch addiert, darauf die erhaltene Summe mit dem dritten addiert u. s. w. Symbolisch drückt man das folgendermafsen aus:

$$\overline{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} + \cdots + \overline{P_i} + \cdots = \Sigma \overline{P_i} \quad . \quad (55)$$

Einfacher läfst sich der Vektor R durch Konstruktion des sogenannten Polygons der Vektoren finden; vom Endpunkte B eines der Vektoren zieht man BG || und $= P_2$; dann von G die Gerade GH || und $= P_3$; von H die Gerade HI || und $= P_4$ u. s. w. Die Gerade, welche dann den Punkt A mit dem Punkte K der gebrochenen Linie verbindet, die also das Polygon schliefst, stellt die gesuchte geometrische Summe R dar.

Ist $P_{i,x}$ die Projektion des Vektors P_i auf eine beliebige Richtungslinie x und R_x die Projektion des Vektors R auf dieselbe Richtungslinie, so ist

$$R_x = \Sigma P_{i,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

d. h. R_x ist die algebraische Summe der Vektoren $P_{i,x}$. Hieraus folgt nach (53, a)

$$R^2 = (\Sigma P_{i,x})^2 + (\Sigma P_{i,y})^2 + (\Sigma P_{i,z})^2 \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

§ 12. **Die Journallitteratur.** Die physikalische Litteratur ist, so weit sie sich auf Originalarbeiten ohne didaktischen Zweck bezieht, gröfstenteils in den zahlreichen von gelehrten Gesellschaften und Institutionen (Universitäten, Akademieen u. s. w.) herausgegebenen Zeitschriften verstreut.

Sehr ausführliche Litteraturangaben über einzelne Fragen kann man unter anderen in folgenden Werken finden:

Winkelmann, Handbuch der Physik. Breslau 1891 bis 1896.

Landolt, Physikalisch-chemische Tabellen. Berlin 1894. Auf S. 539 findet sich eine sehr gute Journalübersicht.

Verdet, Conférences de Physique.

Ferner finden sich in einigen Lehrbüchern, die sich auf specielle Teile der Physik beziehen, sehr ausführliche Übersichten über die Litteratur dieser Teile, z. B. in G. **Wiedemann**, Die Lehre von der Elektricität; **Verdet**, Théorie mécanique de la chaleur; H. v. **Helmholtz**, Physiologische Optik, u. s. w.

Beim Hinweis auf eine bestimmte gelehrte Abhandlung ist es üblich, den Titel des dieselbe enthaltenden Journals verkürzt anzuführen. Dasselbe soll auch in diesem Buche in den am Ende jedes Abschnittes befindlichen Litteraturnachweisen geschehen, weshalb der Leser an dieser Stelle mit einigen der wichtigsten Journale bekannt gemacht wird. Es sei hier noch bemerkt, dafs einige Journale in Serien mit besonderer Numerierung der Bände erscheinen. Die Seriennummer soll in den Citaten der Bandnummer in Klammern vorangesetzt werden.

1. **Journal der russischen physico-chemischen Gesellschaft** (russisch), erscheint seit 1869 in St. Petersburg; alljährlich ein Band (im Jahre 1900 Band 32); seit 1874 erschienen zwei Teile, ein chemischer und ein physikalischer, jeder von ihnen bringt im ersten Abschnitte Originalartikel, im zweiten Abschnitte Referate. Soll verkürzt bezeichnet werden mit **Journ. d. russ. ph. Ges.**
2. **Arbeiten der physikalischen Sektion der Gesellschaft von Freunden der Naturkunde** (russisch) in Moskau. Im Jahre 1900 erschien der 11. Band. **Mosk. Ges. d. Nat.**
3. **Iswestija, Sapiski, Protocolli** (russisch), d. h. Nachrichten, Schriften, Protokolle u. s. w. der russischen Universitäten und verschiedener bei denselben bestehenden physico-mathematischen und physico-chemischen Gesellschaften.
4. **Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg.** In den Jahren 1843 bis 1859 sind 17 Bände unter dem Titel Bulletin de la classe physico-mathematique de l'Acad. etc., sodann 32 Bände von 1860 bis 1888 erschienen. Die neue Serie begann 1890. **Bull. Ac. de St. Petersb.**
5. **Mémoires de l'Acad. Impér. des sciences de St. Petersb.** I. Serie 14 Bände (Commentarii) 1726 bis 1746; II. Serie (Novi commentarii) 1747 bis 1776; III. Serie (Acta) 1777 bis 1782; IV. Serie (Nova acta) 1783 bis 1802; V. Serie 1803 bis 1829; VI. Serie 1830 bis 1852 (gleichzeitig erschienen die „Sciences mathematiques et physiques“ und „Mémoires, présentés par divers savants“); VII. Serie begann 1859. **Mém. de l'Acad. de St. Petersb.**
6. **Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris.** Wöchentlich eine Nummer; jährlich zwei Bände: seit 1835. Im Jahre 1900 erschien der 129. und 130. Band. **C. R.**
7. **Annales de Chimie et de Physique, Paris.** Seit 1789, gegenwärtig erscheinen jährlich drei Bände. Erscheint in Serien, von der dritten an enthält jede Serie 30 Bände. Im Jahre 1894 begann die siebente Serie. **Ann. ch. et phys.**
8. **Journal de Physique théorique et appliquée, Paris.** Seit 1872, alljährlich ein Band; erscheint in Serien zu je zehn Bänden. Im Jahre 1892 begann die dritte Serie. Heifst auch bisweilen Journ. d'Almeida. **J. d. phys.**
9. **Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Paris.** Seit 1818. **Mém. de l'Acad. Fr.**

10. Bulletin de la Société Chimique de Paris. Jährlich zwei Bände; die dritte Serie begann 1889. **Bull. Soc. Chim.**
11. Annalen der Physik und Chemie, Leipzig. Seit 1799, jährlich drei Bände. In den Jahren 1799 bis 1824 bekannter unter dem Titel Gilberts Annalen (Band 1 bis 76). **Gilb. Ann.**
    Von 1824 bis 1877 bekannter unter dem Titel Poggendorffs Annalen (Band 1 bis 160). **Pogg. Ann.**
    Zwischen 1842 und 1878 erschienen acht Ergänzungsbände. **Pogg. Ann. Ergbd.**
    1874 erschien ein Jubelband. **Pogg. Ann. Jublbd.**
    Von 1877 bis 1899 bekannt unter dem Titel Wiedemanns Annalen (69 Bände). **Wied. Ann.** oder **W. A.**
    Seit 1900 unter dem Titel Annalen der Physik, genannt Drudes Annalen. **Drud. Ann.**
12. Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, Leipzig. Jährlich ein Band Referate; seit 1877; 1900 erschien der 24. Band. **Beibl.**
13. Justus Liebigs Annalen der Chemie. 1832 bis 1855 Heidelberg. 1855 bis 1892 Heidelberg und Leipzig, seit 1892 Leipzig. 1832 bis 1839 Annalen der Pharmacie (Band 1 bis 32). 1840 bis 1874 Annalen der Chemie und Pharmacie (Band 33 bis 172). Aufserdem noch acht Ergänzungsbände in verschiedenen Jahren erschienen. **Lieb. Ann.**
14. Sitzungsberichte der königlich preufsischen Akademie der Wissenschaften. Jährlich ein Band. Berlin. **Berl. Ber.** oder **Stzber. Berl. Akad.**
15. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Seit 1848; jährlich ein bis zwei Bände. 1899 erschien der 108. Band. **Wien. Ber.** oder **Stzber. Wien. Akad.**
16. Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. Seit 1832; erscheinen unregelmäfsig. **Abhandl. bayer. Akad.**
17. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. Seit 1871; jährlich ein Band. **Stzber. bayer. Akad.**
18. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Seit 1856; jährlich ein Band. Herausgegeben von Schlömilch im Vereine mit Anderen: seit 1873 zusammen mit Cantor. **Schlömilchs Ztschr.**
19. Repertorium der Physik. Von 1865 bis 1883 Carls Repertorium, von 1883 bis 1891 Exners Repertorium; im Ganzen sind 27 Bände erschienen. **Repert. d. Phys.**
20. Zeitschrift für physikalische Chemie, Leipzig. Jährlich drei Bände. Im Jahre 1900 erschienen Band 31 bis 33. **Ztschr. Phys. Ch.**
21. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin. Seit 1881; im Jahre 1900 erschien Band 20. **Instr.**
22. Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, Berlin. Seit 1868. **Chem. Ber.**
23. Die Fortschritte der Physik, Braunschweig. Erscheinen jährlich. **Fortschr.**
24. Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin. Jährlich sechs Hefte; im Jahre 1900 erschien Band 15. **Ztschr. phys.-chem. Unter.**
25. Physikalische Zeitschrift. Erscheint seit 1899; vierzehntägig ein Heft. **Phys. Ztschr.**
26. Zeitschrift für Elektrochemie. Wöchentlich ein Heft. Im Jahre 1900 erschien Band 7. **Ztschr. f. Elektr.-Chem.**

27. **Elektrotechnische Zeitschrift**, Berlin. Erscheint seit 1880; wöchentlich ein Heft. Im Jahre 1900 erschien Band 21. **Eltech. Ztschr.**
28. **Archives des sciences physiques et naturelles**, Genf. Erscheint in Serien (periodes). Jährlich zwei Bände. Seit 1896 die vierte Serie. **Arch. sc. phys.**
29. **The Philosophical Magazine and Journal of Science**, London. Seit 1798. Erscheint in Serien. Seit 1830 unter dem Titel The London and Edinburgh Phil. Mag. u. s. w. Im Jahre 1876 begann die fünfte Serie. Jährlich zwei Bände. 1900 erschien Band 49 und 50. **Phil. Mag.**
30. **Physical Review**, New York und London. Jährlich zwei Bände. 1900 erschien Band 10. und 11. **Phys. Rev.**
31. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.** Seit 1865. Im Jahre 1899 erschien Band 193. Jährlich ein oder zwei Bände. **Trans. R. Soc.**
32. **Proceedings of the Royal Society of London.** Seit 1832. Im Jahre 1899 erschien Band 64. **Proc. R. Soc.**
33. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society.** Seit 1822; erscheint unregelmäfsig. **Trans. Cambr. Soc.**
34. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.** Seit 1866; erscheint unregelmäfsig. **Proc. Cambr. Soc.**
35. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh.** Seit 1788; erscheint unregelmäfsig. **Trans. Edinb. Soc.**
36. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.** Seit 1835; erscheint unregelmäfsig. **Proc. Edinb. Soc.**
37. **Report of the British Association for the Advancement of Science.** Seit 1833; jährlich ein Band fürs vorhergehende Jahr mit Angabe des Ortes, an welchem der Kongrefs stattfand. Im Jahre 1896 erschien Band 65. **Report.**
38. **Journal of the Chemical Society**, London. Seit 1849; jährlich zwei Bände. **J. Chem. Soc.**
39. **Chemical News**, London. Seit 1860; jährlich zwei Bände. **Chem. News.**
40. **Atti della Reale Academie dei Lincei**, Rom. Seit 1847; erscheint in Serien. 1892 begann die fünfte Serie. **Atti Ac. dei Lincei.**
41. **Il nuovo Cimento**, Pisa. Seit 1855; jährlich zwei Bände; 1895 begann die vierte Serie. Im Jahre 1900 erschien Band 11 und 12. **Nuov. Cim.**
42. **Memorie della Academia delle scienze dell' Instituto di Bologna.** Seit 1850; erscheint in Serien, jährlich ein Band. 1890 begann die fünfte Serie. **Mem. d. Bologna.**
43. **Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani.** Seit 1872; jährlich ein Band. Im Jahre 1898 erschien Band 27. **Spettr. Ital.**
44. **The American Journal of Science and Arts.** Wird bisweilen **Sillimans Journal** genannt. Seit 1819; erscheint in Serien; 1896 begann die vierte Serie. **Sill. J.** oder **Amer. J. of Sc.**
45. **Proceedings of the American Philosophical Society**, held at **Philadelphia.** Seit 1840; jährlich ein Band. **Proc. Phil. Soc. of Philad.**
46. **Proceedings of the American Academy of arts and sciences, Boston.** Jährlich ein Band. **Proc. Amer. Acad.**

Zweiter Abschnitt.

Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung.

§ 1. **Einleitung.** Mechanik heifst die Lehre von der Bewegung physikalischer Körper und denjenigen Ursachen, von denen der Charakter dieser Bewegung in den verschiedenen Specialfällen abhängen kann. Gegenwärtig stellt die Mechanik, die zu einer sehr umfangreichen Wissenschaft angewachsen ist, einen besonderen Lehrgegenstand dar und existieren für dieselbe zahlreiche besondere Leitfäden und Lehrbücher. Wir werden im vorliegenden zweiten Abschnitt durchaus nicht nach möglichster Vollständigkeit streben, sondern vielmehr ausschliefslich jene Fragen der Mechanik behandeln, die uns im folgenden wiederholt entgegentreten werden und ohne deren Studium es unmöglich ist, sich in den physikalischen Erscheinungen und Theorieen zurecht zu finden. Im ersten Kapitel, der Kinematik, werden wir einige Eigenschaften der Bewegung betrachten, ohne die Frage nach den Ursachen, durch welche diese Bewegung hervorgerufen wird, zu berühren. Bevor wir auf die Bewegung physikalischer Körper, deren einzelne Teile gleichzeitig verschiedene Bewegungen ausführen können, eingehen, betrachten wir den einfachen Fall der Bewegung eines materiellen Punktes.

Dem materiellen Punkte schreiben wir folgende Eigenschaften zu:

1. Der materielle Punkt hat die Fähigkeit, sich zu bewegen, d. h. seinen Ort im Raume zu verändern.
2. Er enthält eine gewisse Stoffmenge.
3. Er ist der Einwirkung seiner Umgebung unterworfen.

Andere Eigenschaften wollen wir dem materiellen Punkte vorläufig nicht zuerteilen und wollen wir vor allem von seiner Aus-

dehnung absehen, obgleich es scheinen könnte, dafs dies dem Umstande, dafs er Stoff enthält, widerspricht. Wir setzen indes voraus, dafs die im materiellen Punkte enthaltene Materie einen so kleinen Raum erfüllt, dafs alle Teile dieser Materie sich weder durch ihre Eigenschaften, noch auch durch den Charakter ihrer Bewegung voneinander unterscheiden. Deshalb ist es auch nicht erforderlich, die räumliche Ausdehnung des materiellen Punktes in Betracht zu ziehen, und wir können annehmen, dafs er dieser Eigenschaft überhaupt entbehrt. Ein unveränderliches Punktsystem nennt man die Gesamtheit materieller Punkte, welche sich nur unter der Bedingung, dafs ihre gegenseitigen Entfernungen unverändert bleiben, bewegen können.

Jeden physikalischen Körper kann man sich in eine sehr grofse Zahl sehr kleiner Elemente geteilt denken, deren jedes als materieller Punkt angesehen werden kann, während das Element eines geometrischen Körpers nicht als geometrischer Punkt gelten kann. Dieser Unterschied rührt daher, dafs der materielle Punkt Materie enthält, die ihrem Wesen nach Raum erfüllen mufs.

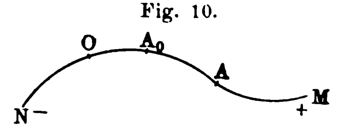
In gewissen Abschnitten der Physik (Theorie der Elasticität u. a.) werden „Elemente eines physikalischen Körpers" betrachtet, deren jedes in seinen verschiedenen geometrischen Punkten nicht genau die gleichen Eigenschaften oder Bewegungen besitzt. Solch ein „Element" kann also nicht als materieller Punkt angesehen werden.

Die physikalischen Körper stellen keine unveränderlichen Systeme materieller Punkte dar. Dies ist ein überaus wichtiger Umstand; er zeigt uns, dafs die Resultate, welche sich beim Studium der Eigenschaften eines unveränderlichen Systems ergeben, nicht ohne weiteres für die physikalischen Körper gelten. Wir betrachten zunächst die Bewegung eines materiellen Punktes.

§ 2. Geschwindigkeit. Bei Betrachtung der Bewegung eines Punktes hat man es vor allem mit der Trajektorie (der Bahn), dem durchlaufenen Wege, der Zeit und Richtung der Bewegung zu thun. Trajektorie oder Bahn heifst die Linie, auf welcher die Bewegung vor sich geht. Je nach Art der Bahn unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegungen.

Der durchlaufene Weg hat in der Mechanik nicht immer eine mit dem buchstäblichen Sinne dieses Wortes zusammenfallende Bedeutung. Nehmen wir z. B. an, die Bewegung erfolge längs einer gewissen Linie NM (Fig. 10), deren geometrischer Charakter uns bekannt ist (Gerade, Kreis, Ellipse u. s. w.). Wählen wir auf dieser Linie einen beliebigen Punkt O, von dem aus wir die Entfernungen $s = OA$ der

Fig. 10.



Punkte A auf der Linie selbst messen wollen. Die Gröfse s wollen wir nach der einen Seite hin, z. B. in der Richtung OM, positiv, in der anderen negativ rechnen. Wenn sich der Punkt auf der Linie NM hinbewegt, so wollen wir die variable Entfernung desselben von O, d. h. die Gröfse s, den „durchlaufenen Weg" nennen. Wenn der Punkt seine Bewegung bei O beginnt und sich immer in einer Richtung fortbewegt, so stellt s den durchlaufenen Weg im buchstäblichen Sinne dar. Beginnt die Bewegung bei einem Punkte A_0, so heifst $s_0 = OA_0$ der Anfangswert des Weges. Wenn der Punkt, nachdem er sich von O entfernt hatte, sich ihm wiederum nähert, so nimmt der „Weg" ab. Der Punkt hat eine positive Bewegungsrichtung, wenn das positive s wächst oder das negative seinem absoluten Werte nach abnimmt; bei negativer Bewegungsrichtung ist das Umgekehrte der Fall. Die Zeit t wird von einem beliebigen Momente an gerechnet; jedem späteren Momente entspricht ein bestimmter Wert der Zeit t. Zwei Zeitmomente t_1 und t_2 bestimmen das Zeitintervall $t_2 - t_1$, welches man auch mit t bezeichnen kann, wie man auch den ihm entsprechenden Weg $s_2 - s_1$ bisweilen mit s bezeichnet. Dem Anfangswege s_0 entspricht im allgemeinen ein Anfangswert t_0 der Zeit.

Es sei nun s irgend eine Funktion der Zeit

$$s = f(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Den einfachsten Fall der Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Bahn haben wir, wenn

$$s = s_0 + at \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist, wo s_0 der Anfangswert des Weges und a ein Koeffizient ist, der numerisch gleich dem in der Zeiteinheit durchlaufenen Wege ist, d. h. genauer ausgedrückt: a ist eine Zahl, welche gleich der in obigem Wege enthaltenen Zahl linearer Einheiten ist. In dem Falle, auf welchen sich Formel (2) bezieht, sind die in beliebigen gleichen Zeitintervallen durchlaufenen Wege untereinander gleich. Eine solche Bewegung wird eine gleichförmige genannt.

Die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung ist ein ursprünglicher Begriff, welcher keine Definition zuläfst und einer solchen auch nicht bedarf. Wir bezeichnen als Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung eine Gröfse, welche dem in der Zeit t durchlaufenen Wege s direkt und der zur Zurücklegung eines bestimmten Weges erforderlichen Zeit t indirekt proportional ist. Als Einheit der Geschwindigkeit wählen wir die Geschwindigkeit irgend einer gleichförmigen Bewegung; der Zahlenwert v jeder anderen Geschwindigkeit wird alsdann durch die Formel

$$v = C\frac{s}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ausgedrückt, wobei der Weg s faktisch in der Zeit t durchlaufen war. Soll der Koeffizient C gleich eins sein, so mufs man als Einheit der Geschwindigkeit diejenige Geschwindigkeit annehmen, bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird; dann ist

$$v = \frac{s}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Berücksichtigt man die Formel (2), so mufs man statt (3) oder (4) schreiben:

$$v = C\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \text{ oder } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Formel (2) giebt $s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$, folglich ist

$$v = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Formel zeigt, dafs für $C = 1$, d. h. bei der angegebenen Wahl der Geschwindigkeitseinheit die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung zahlenmäfsig dem in der Zeiteinheit durchlaufenen Wege gleich ist, d. h. sie wird durch diesen Weg „gemessen". (Nicht aber darf man sagen, die Geschwindigkeit sei gleich dem Wege u. s. w., denn die Geschwindigkeit ist eine Gröfse sui generis und kann daher nicht einem Wege gleich sein.)

Bei der ungleichförmigen Bewegung, wenn $s = f(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist, wird die mittlere Geschwindigkeit v_m, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes, der bei gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit denselben Weg wie der gegebene Punkt durchläuft, bestimmt durch die Formel

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Der Begriff der Geschwindigkeit in einem gegebenen Moment ist bei der ungleichförmigen Bewegung schon kein ursprünglicher mehr; er bedarf der Definition. Nehmen wir zu dem Zwecke an, der Punkt habe in dem kurzen auf den Moment t folgenden Zeitintervall Δt den kleinen Weg Δs (Fig. 11) durchlaufen, der je nach der Bewegungsrichtung positiv oder negativ ist. In diesem Falle ergiebt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit v_m für das kleine Zeitintervall Δt. Der Grenzwert, welchem diese mittlere Geschwindigkeit bei unendlich abnehmendem Zeitintervall Δt zustrebt, heifst die Geschwindigkeit v im gegebenen Moment. Somit haben wir

Fig. 11.

$$v = \lim v_m = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7,a)$$

Nach Formel (40 auf S. 45) und bei Benutzung der dort gegebenen Bezeichnungsweise kann man sagen, es ist

$$\left.\begin{array}{ll} & v = f'(t) \\ \text{wenn} & s = f(t) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit.

Wenn z. B. $s = 4t^5 - 7t^3 + 5t^2$ ist, so ist $v = 20t^4 - 21t^2 + 10t$ (vergl. Formel 42 auf S. 46).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für} & s = at + bt^2 \\ \text{ist} & v = a + 2bt \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Geschwindigkeit hat dasselbe Vorzeichen wie Δs, d. h. sie ist positiv oder negativ, je nachdem sich der Punkt nach der Seite der positiven (wachsenden) oder negativen (abnehmenden) s bewegt. Als Richtung der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ kann man die Richtung der sehr kleinen zum Bogen Δs gehörenden Sehne ansehen; die Richtung der Geschwindigkeit v in einem gegebenen Moment ist die Richtung der Tangente im entsprechenden Punkte der Bahnlinie.

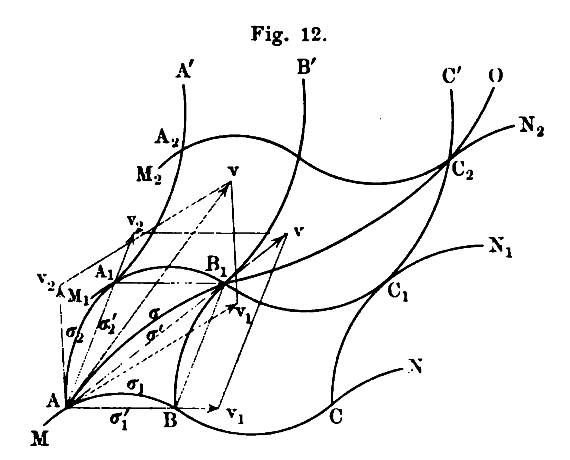
Die Richtung der Geschwindigkeit fällt danach mit der Bewegungsrichtung selbst zusammen.

Die Geschwindigkeit ist ein Vektor und kann daher durch einen Pfeil dargestellt werden, dessen Länge ebensoviel Längeneinheiten enthält als in der darzustellenden Geschwindigkeit Einheiten der Geschwindigkeit enthalten sind. In Fig. 11 ist der Fall dargestellt, wo der Punkt, wenn er sich in A befindet, die positive Geschwindigkeit v hat; befindet er sich in A', so soll seine Geschwindigkeit negativ und seine Gröfse durch den Pfeil v' dargestellt sein.

§ 3. Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. Nehmen wir an, irgend ein Punkt bewege sich auf der Kurve MN (Fig. 12), und die Kurve selbst verschiebe sich parallel zu sich selbst, so dafs alle geometrischen Punkte derselben sich auf den gleichen und einander parallelen Kurven AA', BB', CC' u. s. w. bewegen. In diesem Falle hat unser Punkt zweierlei Bewegung; eine längs der Kurve MN, die andere zugleich mit dieser Kurve. Um zu erfahren, welcher Art die wahre sich aus diesen beiden zusammensetzende Bewegung des Punktes sein wird, konstruieren wir für eine Reihe verschiedener Zeitmomente die Lagen dieses Punktes. Möge er sich zuerst in A befinden; nach einer gewissen Zeit t_1 hat er sich auf der Kurve MN nach B bewegt,

zur selben Zeit aber hat die Kurve MN die neue Lage $M_1 N_1$ angenommen, ihr geometrischer Punkt B ist nach B_1 gerückt und dies wird somit auch die neue Lage des bewegten Punktes zur Zeit t_1 sein. In ähnlicher Weise finden wir seine Lage C_2 im Moment t_2. In der angegebenen Weise können wir eine grofse Anzahl von Lagen konstruieren, die von unserem Punkte in verschiedenen Zeitmomenten eingenommen werden. Verbindet man diese Punkte durch Gerade, so erhält man eine gebrochene Linie. Denkt man sich nun die Zahl der auf diese Weise erhaltenen Lagenpunkte unbegrenzt vermehrt, so wird sich die erwähnte gebrochene Linie einer gewissen Grenze nähern, welche die Kurve AB_1C_2O bildet. Es ist dies die wahre Bahnlinie des Punktes bei seiner sogenannten zusammengesetzten Bewegung. Bestimmen wir nun die Geschwindigkeit v der Bewegung des Punktes auf dieser Kurve für einen beliebigen Moment, z. B. für den Moment,

Fig. 12.



für welchen unser Punkt sich in A befindet. Die Geschwindigkeit v_1 der Bewegung längs AN und diejenige v_2 der Bewegung längs AA' nehmen wir als bekannt an. Möge nunmehr (Fig. 12) AB den kleinen Weg $\sigma_1 = \varDelta s_1$ bezeichnen, welchen der Punkt in der kurzen Zeit $\varDelta t$ zurücklegt; innerhalb derselben Zeit verschiebt sich AN nach A_1N_1, so dafs der Bogen $AA_1 = \sigma_2 = \varDelta s_2$ den bei der zweiten Bewegung durchlaufenen Weg darstellt. Der wahre in der Zeit $\varDelta t$ durchlaufene Weg wird durch den Bogen $AB_1 = \sigma = \varDelta s$ dargestellt. Die Sehnen σ_1', σ_2' und σ' der drei bezeichneten Bögen ergeben die beiden Seiten und die Diagonale des Parallelogramms AA_1B_1B.

Die drei mittleren Geschwindigkeiten der beiden Komponenten und der Resultante der Bewegung sind numerisch gleich den durch $\varDelta t$ dividierten Bögen σ_1, σ_2 und σ. Will man diese drei Geschwindigkeiten

im Punkte A finden, so mufs man die Grenzwerte obiger drei Brüche suchen. Aus der Lehre von den Grenzwerten der Funktionen ist bekannt, dafs man im gegebenen Falle die Bögen durch ihre Sehnen ersetzen und für die drei mittleren Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}$ schreiben kann

$$\bar{v}_1 = \frac{\sigma'_1}{\varDelta t}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\sigma'_2}{\varDelta t}, \quad \bar{v} = \frac{\sigma'}{\varDelta t} \quad \dots \quad (10)$$

Diese drei Geschwindigkeiten tragen wir längs den entsprechenden Sehnen, wie dies in Fig. 12 geschehen ist, ab und da die Geschwindigkeiten ihrer Gröfse nach proportional den Sehnen sind, so ist klar, dafs die Pfeile $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}$, welche diese Geschwindigkeiten darstellen, ebenfalls die Seiten und Diagonale eines Parallelogramms ergeben. Bei unbegrenzter Abnahme des Intervalls $\varDelta t$ werden sich die drei mittleren Geschwindigkeiten drei Grenzwerten nähern, welche nichts anderes darstellen, als die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Komponenten und die Geschwindigkeit v der Resultante der Bewegung. Der Gröfse nach müssen sie somit dieselbe Eigenschaft haben, wie die drei mittleren Geschwindigkeiten für jeden beliebig kleinen Wert der Zeit $\varDelta t$, d. h. die Resultante der Geschwindigkeit v wird in jedem gegebenen Augenblicke nach Gröfse und Richtung durch die Diagonale des aus den Geschwindigkeitskomponenten konstruierten Parallelogramms bestimmt.

Das erhaltene Resultat kann man verallgemeinern und durch fortgesetzte Konstruktionen die Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung erhalten, welche sich als Resultat von drei und mehr Einzelbewegungen ergiebt. Die physikalischen Bedingungen für solche Bewegungen sind nicht schwer aufzustellen. Umgekehrt kann man eine gegebene Geschwindigkeit v immer als Resultante betrachten und auf unendlich viele Arten in zwei oder mehr Komponenten „zerlegen". Bei Zerlegung in zwei Geschwindigkeiten hat man ein Parallelogramm (oder im besonderen Falle ein Rechteck) zu konstruieren; bei Zerlegung in drei Geschwindigkeiten ein Parallelepipedon (im besonderen Falle ein rechtwinkliges).

Auf Grund des Früheren sieht man ein, dafs die zusammengesetzte Geschwindigkeit v eines Punktes gleich der geometrischen Summe ihrer Komponenten ist und nach der Regel vom Polygon der Vektoren (S. 52) konstruiert werden kann.

Wenn sich ein Punkt im Raume bewegt, kann seine Geschwindigkeit v in jedem gegebenen Moment in drei Geschwindigkeiten v_x, v_y und v_z, welche die Richtungen von Koordinatenachsen haben, zerlegt werden. Möge hierbei die Bewegung derart gegeben sein, dafs die Koordinaten x, y und z des bewegten Punktes als Funktionen der Zeit erscheinen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und $z = \Theta(t)$. Die Bewegung

des Punktes kann man als eine aus drei geradlinigen zusammengesetzte betrachten, welche den rechtwinkligen Koordinatenachsen parallel sind. Die Geschwindigkeiten dieser Bewegung, d. h. die Gröfsen v_x, v_y und v_z werden bestimmt durch die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} v_x = lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t); \ v_y = lim \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \psi'(t); \\ v_z = lim \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \Theta'(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ferner haben wir

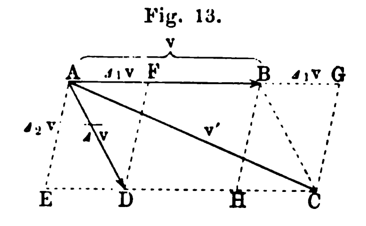
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$cos(v, x) = \frac{v_x}{v}; \ cos(v, y) = \frac{v_y}{v}; \ cos(v, z) = \frac{v_z}{v} \quad \cdot \cdot \quad (13)$$

§ 4. Beschleunigung der geradlinigen gleichförmigen Bewegung. Die Geschwindigkeit wird, da sie ein Vektor ist, durch Gröfse und Richtung bestimmt. Dementsprechend sind zwei ihrem Charakter nach verschiedene Änderungen der Geschwindigkeit möglich: eine Änderung der Gröfse und eine solche der Richtung.

Wenn man der gegebenen Geschwindigkeit v einen kleinen geometrischen Zuwachs $\overline{\Delta v}$ erteilt, so kann, je nach Richtung des letzteren, eine wesentlich verschiedene Änderung der ursprünglichen Geschwindigkeit v erfolgen. Haben v und $\overline{\Delta v}$ dieselbe oder direkt entgegengesetzte Richtung, so wird sich die Geschwindigkeit nur ihrer Gröfse nach ändern. Wenn dagegen v und $\overline{\Delta v}$ miteinander einen beliebigen Winkel bilden, so wird sich die neue Geschwindigkeit im allgemeinen von der früheren sowohl nach Gröfse als nach Richtung unterscheiden. Im speciellen Falle kann das Hinzufügen der Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ auch blofs eine Richtungsänderung von v, ohne Gröfsenänderung, zur Folge haben. Umgekehrt kann man jede Änderung der Geschwindigkeit v, d. h. jeden Übergang derselben in die neue Geschwindigkeit v' sich entstanden denken durch geometrische Addition von v mit einer gewissen Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$,

Fig. 13.



welche sich leicht konstruieren läfst, sobald $v = AB$ und $v' = AC$ gegeben sind (Fig. 13). Zu diesem Zwecke verbinden wir die Punkte B und C und konstruieren das Parallelogramm $ABCD$; die Seite AD ergiebt sodann die Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$. Verlängert man AB bis nach G, so dafs $AG = AC = v'$ wird, verbindet die Punkte G und C

und zieht $DF \parallel CG$, so kann man die Geschwindigkeit $\overline{\Delta v} = AD$ in zwei Geschwindigkeiten zerlegen, welche symbolisch durch $\Delta_1 v = AF = BG$ und $\overline{\Delta_2 v} = AE = GC$ bezeichnet werden mögen. Von diesen bringt die eine $\Delta_1 v$ nur eine Gröfsenänderung, die andere $\overline{\Delta_2 v}$ nur eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit hervor; $\Delta_1 v$ ist der algebraische, $\Delta_2 v$ der geometrische Geschwindigkeitszuwachs.

Wenden wir uns nun zunächst dem Falle der geradlinigen Bewegung zu, bei welcher sich die Geschwindigkeit nur der Gröfse nach ändert. Dem einfachsten Falle einer solchen Bewegung entspricht die Formel

$$v = v_0 + bt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

in welcher v_0, d. h. die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit, der Geschwindigkeit im Augenblicke $t = 0$ entspricht. Bei dieser sogenannten gleichförmig veränderlichen Bewegung erfährt die Geschwindigkeit in beliebigen gleichen Zeitintervallen gleiche Zunahmen, die je nach dem Zeichen des Koefficienten b positiv oder negativ sein können. Die Formel (14) zeigt, dafs b gleich dem Zahlenwert der in der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeit ist.

Wir können schreiben

$$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

wo $v_1 = v_0 + bt_1$ und $v_2 = v_0 + bt_2$ die Geschwindigkeiten für t_1 resp. t_2 sind. Wenn man die erlangte Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ einfach mit v und das Zeitintervall mit t bezeichnet, so erhält man

$$b = \frac{v}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

woraus sich die oben erwähnte Bedeutung von b noch deutlicher ergiebt.

Die Beschleunigung der gleichförmig veränderlichen, geradlinigen Bewegung ist eine Gröfse besonderer Art (sui generis), welche als Kennzeichen oder Mafs für den Änderungsgrad der Geschwindigkeit dient. Sie ist somit direkt proportional der im gegebenen Zeitintervall erworbenen (oder eingebüfsten) Geschwindigkeit v und indirekt proportional der Zeit t, welche zur Änderung um die gegebene Gröfse v erforderlich ist. Als Einheit der Beschleunigung kann man die Beschleunigung irgend einer gleichförmig veränderlichen Bewegung annehmen. Der Zahlenwert w für die Beschleunigung einer beliebigen gleichförmig veränderlichen Bewegung wird durch die Formel

$$w = C\frac{v}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

ausgedrückt, in welcher C gleich dem Zahlenwert für die Beschleu-

nigung einer solchen Bewegung ist, bei welcher in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit erlangt wird. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$w = \frac{v}{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

so mufs man als Einheit der Beschleunigung unbedingt die Beschleunigung einer solchen Bewegung annehmen, bei welcher in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit erlangt wird. Vergleicht man (18) mit (16), so ergiebt sich

$$w = b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Das bedeutet: wenn man in der allgemeinen Formel (17) $C = 1$ setzt, so wird die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit gemessen, welche in der Zeiteinheit erlangt wird. Wir werden immer $C = 1$ setzen, also Formel (18) gelten lassen. In diesem Falle können wir statt (14) setzen

$$v = v_0 + wt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Die Formeln (9) zeigen, dafs der durchlaufene Weg in diesem Falle durch die Formel

$$s = vt_0 + \frac{1}{2} wt^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

ausgedrückt wird, wobei die Entfernungen s von dem Punkte gerechnet werden, in welchem sich der bewegte Punkt zur Zeit $t = 0$ befand, als er die Geschwindigkeit v_0 hatte. Die durch die Formeln (20) und (21) dargestellte Bewegung heifst gleichförmig beschleunigt, wenn w positiv, und gleichförmig verzögert, wenn w negativ ist.

Für zwei Momente t_1 und t_2 erhalten wir die Geschwindigkeiten $v_1 = v_0 + wt_1$ und $v_2 = v_0 + wt_2$ und die durchlaufenen Wege $s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} wt_1^2$ und $s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} wt_2^2$. Diese Formeln ergeben unmittelbar $v_2^2 - v_1^2 = 2w(s_2 - s_1)$. Bezeichnet man den durchlaufenen Weg mit s, so erhält man

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ws \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

d. h. bei der gleichförmig veränderlichen Bewegung ist die Änderung des Quadrats der Geschwindigkeit für ein gewisses Zeitintervall gleich dem doppelten Produkte aus der Beschleunigung und dem in dieser Zeit durchlaufenen Wege.

Für $v_0 = 0$ hat man

$$v = wt; \qquad s = \frac{1}{2} wt^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (22,a)$$

oder nach Elimination von t

$$v = \sqrt{2ws}; \qquad s = \frac{v^2}{2w} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22,b)$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln

$$v = v_0 - w t; \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} w t^2 \quad \ldots \quad (23)$$

wobei w die Beschleunigung bedeutet. Anstatt (22) haben wir hier

$$v_1^2 - v_2^2 = 2 w s \quad \ldots \quad (24)$$

Ein Punkt, welcher sich gleichförmig verzögert mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bewegt, gelangt zur Ruhe nach einer Zeit T, welche sich aus der Gleichung $v = v_0 - w T = 0$ bestimmt, nämlich nach Ablauf der Zeit

$$T = \frac{v_0}{w} \quad \ldots \quad (24, a)$$

Setzt man diesen Wert anstatt t in den Ausdruck (23) für s ein, so erhält man für den Gesamtweg S, welchen der Punkt von dem Augenblicke an, wo er die Geschwindigkeit v_0 besafs, bis zum Moment des Stillstandes durchlaufen hat:

$$S = \frac{v_0^2}{2 w} \quad \ldots \quad (24, b)$$

§ 5. Beschleunigung einer beliebigen geradlinigen Bewegung. Bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit eine gewisse Funktion der Zeit; es sei

$$v = \varphi(t) \quad \ldots \quad (25)$$

In diesem Falle können wir von der mittleren Beschleunigung w_m für das Zeitintervall zwischen den Zeitmomenten t_1 und t_2 reden, welchen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 entsprechen; sie ist gleich der Beschleunigung eines Punktes, welcher sich gleichförmig veränderlich bewegt und die Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ in der Zeit $t_2 - t_1$ erlangt, d. h. es ist

$$w_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{t},$$

wenn man die erlangte Geschwindigkeit und das Zeitintervall einfach mit v und t bezeichnet.

Von der mittleren Beschleunigung kann man zur Beschleunigung im gegebenen Moment t übergehen. Nehmen wir an, die Geschwindigkeit v ändere sich innerhalb des kleinen Zeitintervalls Δt um Δv. Dann ist $w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ die mittlere Beschleunigung für das kleine Zeitintervall Δt. Der Grenzwert, dem diese mittlere Beschleunigung bei unbegrenzter Abnahme der Zeit Δt zustrebt, stellt dann die Beschleunigung w im gegebenen Augenblicke dar. Es ist somit

$$w = \lim w_m = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad \ldots \quad (26)$$

Die Formel (40) S. 45 zeigt, dafs wenn $v = \varphi(t)$

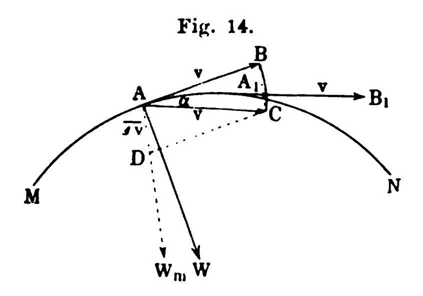
$$w = \varphi'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

ist. d. h. die Beschleunigung der geradlinigen Bewegung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Nach Formel (42) S. 46 erhält man demnach, wenn z. B. $v = 7t^4 - 8t^3 - 5t$ ist, für die Beschleunigung $w = 28t^3 - 24t^2 + 5$; für $v = bt^2$ ist $w = 2bt$.

Die Beschleunigung w der geradlinigen Bewegung hat die Richtung des Geschwindigkeitszuwachses Δv. Hieraus folgt, dafs die Beschleunigung positiv ist, wenn die positive Geschwindigkeit wächst oder wenn die negative Geschwindigkeit ihrem absoluten Betrage nach abnimmt; umgekehrt ist die Beschleunigung negativ, wenn die positive Geschwindigkeit abnimmt oder die negative ihrem absoluten Betrage nach wächst. Mit anderen Worten: die Beschleunigung hat die gleiche Richtung wie die Bewegung, wenn die Geschwindigkeit dem absoluten Betrage nach wächst; sie hat eine der Bewegung entgegengesetzte Richtung, wenn diese Geschwindigkeit abnimmt.

§ 6. Beschleunigung der krummlinigen Bewegung. Betrachten wir zunächst den Fall einer gleichförmigen krummlinigen Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit v ihrer Gröfse nach konstant bleibt und sich nur ihrer Richtung nach ändert. Nehmen wir an, ein Punkt bewege sich längs der ebenen Kurve MN (Fig. 14) und habe im Punkte A die Geschwindigkeit $v = AB$. Nachdem er in der Zeit Δt den Weg $AA_1 = \Delta s$ zurückgelegt, hat er im Punkte A_1 die Geschwindigkeit $v = A_1 B_1$. Macht man $AC \parallel A_1 B_1$ und ferner $AC = A_1 B_1 = v$, so ergiebt sich, dafs die Geschwindigkeit v in der Zeit Δt den Zuwachs $\overline{\Delta v} = AD = BC$ erfahren hat. Die mittlere Beschleunigung w_m ist auch hier gleich

Fig. 14.



$$w_m = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = \frac{BC}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Bei unbegrenzter Abnahme der Zeit Δt nähert sich die mittlere Beschleunigung w_m einer gewissen Grenze, welche die Beschleunigung im gegebenen Augenblick ist. Um diese Grenze zu finden, beschreiben wir mit $v = AB$ als Radius einen Bogen BC um den Punkt A und formen (28) um, indem wir $\angle BAC = \alpha$, also $\smile BC = v\alpha$ setzen

es ist dann

$$w_m = \frac{BC}{\Delta t} = \frac{\smile BC}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} = v \cdot \frac{\alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{BC}{\smile BC} \quad (29)$$

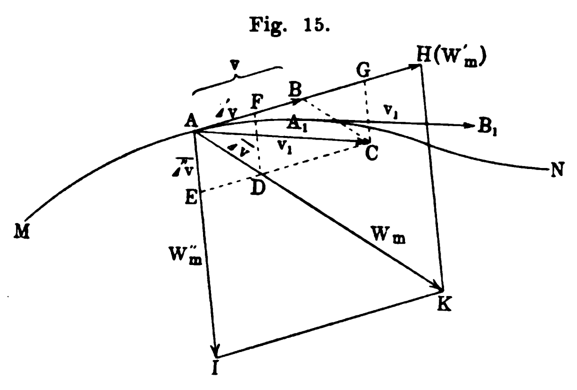
Beim Übergang zur Grenze haben wir $\frac{BC}{\smile BC} = 1$; $lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ [nach Formel (7) S. 59] und $lim \frac{\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$, wo R der Krümmungsradius der Kurve im Punkte A [vergl. (50) S. 49] ist. Auf diese Weise erhalten wir

$$w = lim\, w_m = \frac{v^2}{R} \quad (30)$$

Die Richtung der Beschleunigung wird auf folgende Weise bestimmt: w_m ist $\| BC$; BC bildet als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleiche Winkel mit den Seiten AB und AC. Der Grenzwert des Winkels α ist Null, daher nähert sich $\angle . ABC$ einem Rechten; die mittlere Beschleunigung w_m, welche zu BC parallel ist, wird im Grenzfalle senkrecht zu $v = AB$. Hieraus folgt, dafs die Beschleunigung w senkrecht zur Tangente AB ist, dafs sie also die Richtung der Normalen zur Kurve MN im Punkte A hat.

Bei der gleichförmigen krummlinigen Bewegung hat die Beschleunigung in jedem gegebenen Moment die Richtung der Normalen zur Kurve und ist der Gröfse nach gleich $\frac{v^2}{R}$, d. h. ihr Zahlenwert ist gleich dem Quadrate des Zahlenwertes der Geschwindigkeit, dividiert durch den Zahlenwert des Krümmungsradius. Gehen wir nunmehr über zum allgemeinen Falle einer ungleichförmigen krummlinigen Bewegung. Nehmen wir an, der Punkt habe in A (Fig. 15) die Geschwindigkeit $v = AB$ und nach einiger Zeit Δt in A_1 die Geschwindigkeit $v_1 = A_1B_1$. Macht man AC gleich und parallel A_1B_1, so sieht man, dafs der geometrische Geschwindigkeitszuwachs

Fig. 15.



$\overline{\Delta v} = AD = BC$ ist. Hieraus ergiebt sich die mittlere Beschleunigung $w_m = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{AD}{\Delta t} = AK$. Machen wir $AG = AC = A_1B_1 = v_1$,

$DF \parallel CG$ und zerlegen $\overline{\Delta v} = AD$ in zwei Geschwindigkeiten $\Delta' v = AF = BG$ und $\overline{\Delta'' v} = AE = CG$; die erstere derselben ruft eine algebraische Änderung, eine Gröfsenänderung der Geschwindigkeit ($\Delta' v = v_1 - v$) hervor, die zweite — eine geometrische Änderung, d. h. eine Richtungsänderung. Dementsprechend erhalten wir die mittlere Beschleunigung $w'_m = \frac{\Delta' v}{\Delta t} = \frac{AF}{\Delta t} = AH$, die das Mafs für die mittlere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit ihrer Gröfse nach abgiebt, und die mittlere Beschleunigung $w''_m = \frac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \frac{AE}{\Delta t} = AI$, welche die mittlere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit in Bezug auf die Richtung darstellt.

Da die drei Gröfsen $w_m = AK$, $w'_m = AH$ und $w''_m = AI$ den Geraden AD, AF und AE proportional sind, so ist es klar, dafs W_m durch die Diagonale des über w'_m und w''_m konstruierten Parallelogramms bestimmt wird. Nimmt die Zeit Δt unbegrenzt ab, so streben die drei Beschleunigungen gewissen Richtungen und Werten zu, die wir mit w, w_1 und w_2 bezeichnen wollen. Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} w &= \lim \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \\ w_1 &= \lim \frac{\Delta' v}{\Delta t} \\ w_2 &= \lim \frac{\overline{\Delta'' v}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Hier ist $\overline{\Delta v}$ der wahre, d. h. geometrische Geschwindigkeitszuwachs, $\Delta' v$ der algebraische Zuwachs; der Zuwachs $\overline{\Delta'' v}$ entspricht vollkommen der Gröfse $\overline{\Delta v} = AD$ (Fig. 13), die Beschleunigung w_2 der Gröfse w in Formel (29) und (30). Der Richtung nach fällt w_1 mit der Tangente im Punkt A und w_2 mit der Normalen im selben Punkte zusammen; hieraus folgt, dafs die Beschleunigungen w_1 und w_2 zu einander senkrecht sind. Die erste von ihnen heifst die tangentiale, die zweite — die normale Beschleunigung. Wir sehen, dafs w_m die Diagonale des aus w'_m und w''_m konstruierten Parallelogramms ist. Dasselbe mufs auch gelten, gleichviel wie klein Δt gewählt ist, also auch für den Grenzfall. In diesem Falle aber ist $\angle\, HAI = \pi : 2$ und das Parallelogramm verwandelt sich in ein Rechteck.

Aus Obigem geht Folgendes hervor: bei der krummlinigen ungleichförmigen Bewegung erfährt der bewegte Punkt in jedem gegebenen Augenblicke eine gewisse Beschleunigung w, die im allgemeinen einen gewissen Winkel mit der Bewegungsrichtung bildet und die als

Mafs für die totale Veränderlichkeit der Geschwindigkeit dient. Die Beschleunigung w_1 (Fig. 16) kann geometrisch in eine tangentiale Beschleunigung w_1, welche die Richtung der Tangente hat, und eine normale Beschleunigung w_2 zerlegt werden. Letztere ist senkrecht zur Bewegungsrichtung und gleich $v^2 : R$, wo R den Krümmungsradius im gegebenen Punkt darstellt. Die Beschleunigungen w_1 und w_2 geben ihrerseits das Mafs für die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung ab.

Aus dem Gesagten ergiebt sich

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{\left(lim \frac{\Delta' v}{\Delta t}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad . \quad . \quad (32)$$

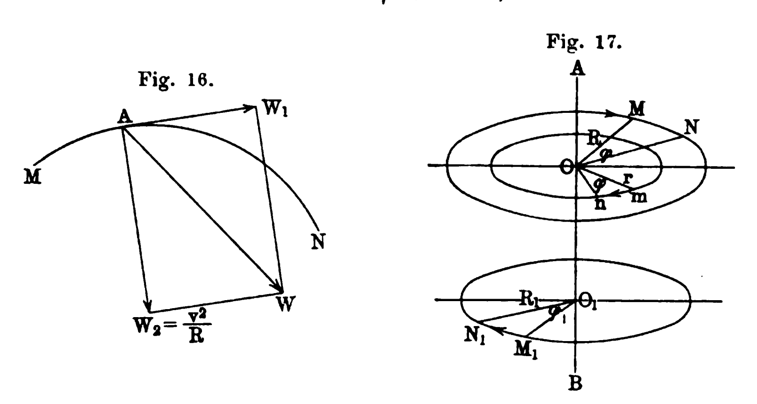


Fig. 16. Fig. 17.

§ 7. **Von der drehenden Bewegung.** Ein unveränderliches Punktsystem oder, wie wir der Kürze halber sagen wollen, ein „Körper" (obgleich schon früher gezeigt war, dafs ein physikalischer Körper kein Beispiel eines unveränderlichen Systems darstellt) kann sehr verschiedenartige Bewegungen haben. Wir wollen hier nur eine derselben, nämlich die drehende Bewegung, betrachten. Sie besteht in folgendem: Machen wir die Annahmen, es sei die Gerade AB (Fig. 17), welche Drehungsachse genannt wird, gegeben. Alle Punkte m, M, M_1 u. s. w. bewegen sich auf Kreislinien, deren Ebenen senkrecht zur Drehungsachse sind und deren Zentren auf dieser Achse liegen. Alle Radien Om, OM, O_1M_1 u. s. w. drehen sich im selben Zeitintervall um ein und denselben Winkel $\varphi = \angle\, m\,O\,n = \angle\, MON = \angle\, M_1\,O_1\,N_1$ u. s. w.

Wenn man den Winkel φ von irgend einer Anfangslage der Radien (der von den bewegten Punkten auf die Drehungsachse gefällten Senkrechten) an rechnet, so stellt derselbe im allgemeinen eine gewisse Funktion der Zeit dar. Setzen wir demnach

$$\varphi = F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Der vom entsprechenden Punkte durchlaufene Weg ist

$$s = r\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

wo r der Radius des Kreises ist, auf dessen Peripherie sich der Punkt bewegt.

Der einfachste Fall einer Drehbewegung tritt ein, wenn

$$\varphi = at \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

ist, wo a eine konstante Zahl und gleich dem Winkel ist, um welchen sich das System in der Zeiteinheit dreht. Diese Drehbewegung heifst **gleichförmig.** Der vom Punkte durchlaufene Weg ist in diesem Falle

$$s = r\varphi = rat \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Hieraus folgt, dafs sich alle Punkte des Systems gleichförmig bewegen. Die Geschwindigkeit v dieser Bewegung ist

$$v = ra \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte des Systems sind den Abständen derselben von der Drehungsaxe proportional. Die Punkte der Achse selbst sind unbeweglich.

Bezeichnen wir mit T die Zeit einer vollen Umdrehung des Systems um seine Achse; im Verlaufe dieser Zeit wächst φ um 2π. Die Formel (35) ergiebt $2\pi = aT$, also ist

$$T = \frac{2\pi}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Substituiert man hier an Stelle von a seinen Wert nach (37), so kommt $2\pi r = vT$ (einfacher ergiebt sich dies aus $s = vt$), also

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{und} \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \ldots \quad (39)$$

Die Schnelligkeit der Drehung wird durch eine besondere Gröfse charakterisiert, die man **Winkelgeschwindigkeit** nennt. Sie ist dem Winkel φ, um welchen sich das System im gegebenen Zeitintervall t dreht, direkt proportional und indirekt proportional der Zeit t, welche zur Drehung des Systems um den gegebenen Winkel φ erforderlich ist. Als Einheit der Winkelgeschwindigkeit kann man die Winkelgeschwindigkeit irgend einer gleichförmigen drehenden Bewegung annehmen, z. B. der Drehung der Erde. Aus dem Gesagten ergiebt sich, dafs der Zahlenwert Θ für die Winkelgeschwindigkeit allgemein durch folgende Formel bestimmt wird:

$$\Theta = C\frac{\varphi}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Setzt man $C = 1$, so mufs man als Einheit der Winkelgeschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit einer Bewegung annehmen, bei der

sich das System in der Zeiteinheit um die Winkeleinheit dreht (d. h. um $57^0{,}29 \ldots$ (34) S. 44).

In diesem Falle haben wir

$$\Theta = \frac{\varphi}{t} = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird somit durch den Winkel **gemessen**, um welchen sich das System in der Zeiteinheit dreht. Nimmt man als Einheit der Zeit die Sekunde an, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung $\Theta = 2\pi : 86\,164 = 0{,}0000\,729$, da eine volle Umdrehung der Erde in einem Sterntage erfolgt, welcher 86 164 Sekunden mittlerer Zeit enthält. Die Formel (37) ergiebt

$$v = r\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

Ein Punkt, welcher von der Achse um die Einheit der Entfernung absteht ($r = 1$), hat eine Geschwindigkeit v_1, welche numerisch gleich a ist, vergl. (37); somit folgt nach (41)

$$\Theta = v_1.$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird also auch durch die Geschwindigkeit eines Punktes **gemessen**, der von der Drehungsachse um die Einheit der Entfernung absteht. Die Winkelgeschwindigkeit kann, je nach der Drehungsrichtung, positiv oder negativ sein.

Bei der **ungleichförmigen drehenden Bewegung**, für $\varphi = F(t)$, ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\Theta_m = \varphi : t$; die mittlere Winkelgeschwindigkeit für das kleine Zeitintervall Δt, innerhalb welches das System sich um den kleinen Winkel $\Delta\varphi$ gedreht hat, ist $\Theta_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Der Grenzwert dieser Gröfse, d. h.

$$\Theta = \lim \Theta_m = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = F'(t) \quad \ldots \quad (43)$$

heifst die **Winkelgeschwindigkeit im gegebenen Moment**. Wie wir hieraus sehen, ist die Winkelgeschwindigkeit die Ableitung des Drehungswinkels nach der Zeit. Wenn z. B. $\varphi = bt^3 - ct^2$ ist, so ist $\Theta = 3bt^2 - 2ct$.

Der Punkt, welcher sich im Achsenabstande r befindet, legt in der Zeit Δt den Weg $\Delta s = r\Delta\varphi$ zurück. Folglich ist seine Geschwindigkeit $v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ oder $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$,

d. h.

$$v = r\Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

Für $r = 1$ haben wir, wie auch früher, $\Theta = v_1$.

Gleichförmig veränderliche Drehung heifst eine solche, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit Θ sich in gleichen Zeitintervallen

um ein und dieselbe positive oder negative Gröfse ändert. In diesem Falle hat Θ folgende Form

$$\Theta = \Theta_0 + bt.$$

Als **Winkelbeschleunigung** ϑ bezeichnet man eine besondere Gröfse, welche der Winkelgeschwindigkeit Θ, die in der gegebenen Zeit t erlangt worden ist, direkt und der Zeit t, die zur Erlangung der gegebenen Winkelgeschwindigkeit Θ erforderlich war, indirekt proportional ist. Somit ist allgemein $\vartheta = C\frac{\Theta}{t}$. Setzt man $C = 1$, so mufs man als Einheit der Winkelbeschleunigung die Winkelbeschleunigung einer solchen Bewegung wählen, bei welcher in der Zeiteinheit die Einheit der Winkelgeschwindigkeit erlangt wird. Es ist alsdann

$$\vartheta = \frac{\Theta}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Im allgemeinen ist die Winkelgeschwindigkeit Θ eine Funktion der Zeit $\Theta = f(t)$. Der Begriff der **Winkelbeschleunigung in einem gegebenen Moment** wird folgendermafsen erhalten. Wenn im Verlaufe der Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit Θ erlangt worden ist, so ist $\vartheta_m = \Theta : t$ die mittlere Winkelbeschleunigung, und der Grenzwert dieser mittleren Winkelbeschleunigung für ein unendlich kleines Zeitintervall ist die **Winkelbeschleunigung ϑ für einen gegebenen Moment:**

$$\vartheta = lim\, \vartheta_m = lim \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt} = f'(t) \quad \ldots \quad (46)$$

Die Winkelbeschleunigung ist die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit, ihr Vorzeichen hängt vom Zeichen der Gröfse $\Delta\Theta$ ab.

Zweites Kapitel.

Von der Kraft.

§ 1. Definition der „Kraft“. Auf S. 56 war auf die Eigenschaften des materiellen Punktes hingewiesen worden und unter anderem auf seine Fähigkeit, der Einwirkung seiner Umgebung zu unterliegen. Dieselbe Eigenschaft besitzt auch ein System von materiellen Punkten, also auch der physikalische Körper. Ist diese Einwirkung derart, dafs sie eine Geschwindigkeitsänderung nach Gröfse oder Richtung zur Folge haben kann, so sagt man, auf den Körper wirke eine Kraft. Auf das Vorhandensein einer Kraft

kann man nicht nur aus der in seiner Bewegung hervorgerufenen Beschleunigung schliefsen, sondern auch aus den äufseren Verhältnissen, unter welchen der Körper sich befindet und bei welchen, wie es besondere Beobachtungen gezeigt, der Körper unter der Einwirkung einer Kraft steht. Diese Verhältnisse sind bisweilen derart, dafs wir aus ihrer Änderung einen Schlufs darauf ziehen können, wieviel mal sich die auf den Körper wirkende Kraft vergröfsert oder verringert hat. Nehmen wir z. B. an, um eine feste Rolle laufe eine Schnur, an deren Enden zwei vollkommen gleichartige Körper A und B befestigt seien. Befestigt man nun an B den Körper C, so erlangt A eine Beschleunigung, auf ihn wirkt eine Kraft ein. Offenbar wird sich, sobald man an B zwei, drei u. s. w. gleiche Körper C befestigt, die auf A wirkende Kraft zweimal, dreimal u. s. w. vergröfsern.

Wenn an einer an einem Körper A befestigten Schnur anstatt eines zwei oder drei Arbeiter, zwei oder drei Pferde ziehen, so wird die auf A wirkende Kraft zwei- oder dreimal gröfser, vorausgesetzt, dafs die Kräfte der einzelnen Arbeiter oder der Pferde untereinander vollkommen gleich sind. Wenn man dem Pole einer Magnetnadel einen Magneten nähert, so wirkt auf ihn eine Kraft, die sich verdoppelt, sobald man ihm zwei eben solche Magnete nähert (wobei übrigens alle sekundären Einflüsse unberücksichtigt bleiben mögen).

Auf solche Weise erhält man eine Vorstellung von der „Kraft", als von einer Gröfse, und wird es möglich, verschiedene Kräfte miteinander zu vergleichen, sowie eine Krafteinheit auszuwählen. Es sei bereits an dieser Stelle bemerkt, dafs das zweite Bewegungsgesetz, von dem weiter unten die Rede sein soll, nur dann als Gesetz gelten kann (und nicht als blofse Definition der „Kraft"), wenn man die Möglichkeit zugiebt, Kräfte unabhängig von den durch sie hervorgerufenen Wirkungen vergleichen zu können.

§ 2. **Die Trägheit.** Die drei fundamentalen Gesetze der Bewegung sind zuerst von Newton in seinen „Principia Philosophiae Naturalis" im Abschnitte „Axiomata sive leges motus" aufgestellt und formuliert worden. Wir wollen dieselben der Reihe nach betrachten.

Das erste Bewegungsgesetz (das Trägheits- oder Beharrungsgesetz) lautet nach Newton folgendermafsen: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare, d. h. ein jeder Körper verharrt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, so lange keine Kraftwirkung ihn veranlafst, seinen (Bewegungs-) Zustand zu ändern. Dieses Gesetz, welches eine besondere Eigenschaft der Materie zum Ausdruck bringt und Trägheits- oder Beharrungsgesetz genannt wird, ist bereits von Galilei entdeckt worden. Es besagt, dafs

ein sich selbst überlassener Körper, der also keiner Kraft unterworfen ist, sich entweder geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe bleibt.

Das Trägheitsgesetz stellt der Erkenntnis unüberwindliche Schwierigkeit entgegen, sobald man sich bemüht, seinen inneren Sinn zu ergründen. In ihm wird von einer geraden Linie gesprochen; auf welche Koordinatenachsen die gerade Linie zu beziehen ist, auf welcher sich ein keiner einzigen Kraft unterworfener Körper bewegen würde, ist nicht zu verstehen. Eine zusammenfassende Behandlung dieses Gegenstandes, über den Newton, Euler, Kant, Mach, C. Neumann und andere geschrieben haben, findet man in den „physikalischen Grundlagen der Mechanik" von H. Streintz, Leipzig 1883.

§ 3. Das zweite Bewegungsgesetz. Das Trägheitsgesetz kann nicht experimentell geprüft werden; wir erlangen Kenntnis von ihm nur dadurch, dafs zu jeder Geschwindigkeitsänderung eine Kraft erforderlich ist, mit deren Abnahme sich auch die Geschwindigkeitsänderung vermindert. Auf die Frage nach dem Zusammenhange zwischen Kraft und Beschleunigung antwortet das zweite Bewegungsgesetz: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur, d. h. die Bewegungsänderung ist proportional der bewegenden Kraft und hat mit ihr gleiche Richtung. Unter der Bewegungsänderung eines gegebenen Körpers hat man die Geschwindigkeitsänderung desselben in der gegebenen Zeit, z. B. in der Zeiteinheit, zu verstehen. Ist die Kraft konstant, so ist diese Änderung nichts anderes als die Beschleunigung, welche in diesem Falle ebenfalls konstant ist. Ist jedoch die Kraft veränderlich, so ist ihr mittlerer Wert f für das kleine Zeitintervall Δt der mittleren Beschleunigung für dasselbe Zeitintervall proportional, d. h. proportional der Geschwindigkeitsänderung in der Zeiteinheit. Somit kann das zweite Bewegungsgesetz durch folgende Formel zum Ausdruck gebracht werden:

$$f = c\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo c ein Proportionalitätsfaktor ist, der sich auf den gegebenen, in Betracht gezogenen Körper bezieht. Die Gröfse der Kraft in jedem gegebenen Moment ist

$$f = c \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = cw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei w die Beschleunigung im gegebenen Moment ist. Die Kraft f und die Beschleunigung w haben in jedem Augenblick einerlei Richtung.

Man kann das zweite Bewegungsgesetz auch folgendermafsen formulieren: Die Beschleunigung ist in jedem gegebenen

Moment der wirkenden Kraft proportional und hat mit ihr gleiche Richtung.

Die Formel (1) giebt

$$\overline{\Delta v} = \frac{1}{c} f \Delta t \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wodurch die Gröfse der geometrischen Geschwindigkeitszunahme in der Zeit Δt bestimmt wird.

Sehr verbreitet ist die Ansicht, man müsse unter „mutatio motus" die Änderung des Bewegungsinhaltes (Bewegungsgröfse s. u.) in der Zeiteinheit verstehen. Dieser Meinung kann sich der Verfasser nicht anschliefsen.

Folge des zweiten Gesetzes (Gesetz der Unabhängigkeit der Kraftwirkung von dem Zustande des Körpers und dem Vorhandensein anderer Kräfte; Unabhängigkeitsprinzip). Das zweite Bewegungsgesetz hat, indem es zeigt, von welchen Gröfsen die geometrische Geschwindigkeitsänderung abhängt, auch sozusagen eine negative Seite.

Indem es der Frage, wovon die Gröfse $\overline{\Delta v}$ für einen gegebenen Körper abhängt, auf den Grund geht, zeigt uns das Gesetz zugleich die Unabhängigkeit der Gröfse $\overline{\Delta v}$ vom Bewegungszustande des Körpers selbst und von der Anwesenheit anderer Kräfte. Somit bringt die Kraft f in der Zeit Δt den gleichen geometrischen Geschwindigkeitszuwachs $\overline{\Delta v}$ hervor, einerlei, ob sich der Körper selbst in Ruhe oder in beliebigem Bewegungszustande befindet und ob die Kraft f die einzige ist oder aufser ihr noch andere Kräfte wirken. Dieses Gesetz von der unabhängigen Kraftwirkung kann man auch als ein besonderes Gesetz betrachten.

§ 4. Masse. Krafteinheit. Dichte. Die Formeln (1) und (3), welche den Koeffizienten c enthalten, beziehen sich auf einen gegebenen bestimmten Körper. Experiment und Beobachtung lehren uns, dafs verschiedene Körper unter vollkommen gleichen Verhältnissen, d. h. wenn wir überzeugt sein können, dafs auf sie die gleichen Kräfte wirken, verschiedene Beschleunigungen erfahren. Daraus geht hervor, dafs der Koeffizient c für verschiedene Körper verschieden ist; er hängt von einer besonderen individuellen Eigenschaft des Körpers ab, welche man seine Masse nennt. Man sagt, zwei Körper haben die gleiche Masse, wenn sie unter Einwirkung der gleichen Kraft dieselbe Beschleunigung erhalten. Ein Körper hat eine 2, 3, 4 und allgemein n mal gröfsere Masse als ein gegebener, wenn eine 2, 3, 4 ... n mal gröfsere Kraft, als für den gegebenen Körper erforderlich ist, um beiden dieselbe Beschleunigung zu erteilen, oder wenn ein und dieselbe Kraft dem ersten Körper eine 2, 3, 4 ... n mal geringere Beschleunigung erteilt als dem gegebenen Körper. Bestimmt man die Kräfte, welche erforderlich sind, verschiedenen Körpern dieselbe Beschleunigung zu

erteilen oder betrachtet man die Beschleunigungen, welche von verschiedenen Körpern durch Einwirkung derselben Kraft erlangt werden, so kann man hierdurch die Massen verschiedener Körper miteinander vergleichen. Die Masse irgend eines beliebigen Körpers A kann man als **Einheit der Masse** wählen. Bezeichnet man sodann den Zahlenwert der Masse irgend eines anderen Körpers mit m, so sieht man, dafs die Kraft f, welche diesem Körper die Beschleunigung w erteilen mufs, den Zahlen m und w proportional sein mufs, und dafs man daher setzen kann

$$f = Cmw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In dieser Formel kommen Kraft, Masse und Beschleunigung vor, von denen jede einzelne durch ihre besondere, vollkommen willkürliche Einheit gemessen werden kann. Der Proportionalitätskoeffizient C ist gleich der Anzahl Krafteinheiten, welche nötig sind, um der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung zu erteilen (für $m = 1$ und $w = 1$ ist $f = C$).

Setzt man $C = 1$ und schreibt somit statt (4)

$$f = mw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so können von den drei Einheiten der Kraft, Masse und Beschleunigung nur noch zwei willkürlich gewählt werden. Wählt man z. B. die Einheiten der Masse und Beschleunigung willkürlich, so mufs man als **Einheit der Kraft** unbedingt diejenige **Kraft** wählen, welche der **Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung** erteilt. Man kann indes auch anders verfahren und die Einheiten der Kraft und Beschleunigung willkürlich wählen; in diesem Falle mufs man als **Masseneinheit diejenige Masse annehmen, welche von der Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung erhält.** Die Masseneinheiten haben verschiedene Benennungen erhalten. Eine der wichtigsten von ihnen ist das **Gramm**; nach der ursprünglichen Definition ist dies die **Masse eines Kubikcentimeters reinen Wassers bei 4° C.**

Man kann nun Körper von beliebiger Form aus Eisen, Kupfer, Aluminium, Platin oder Quarz derart herstellen, dafs ihre Masse einer der angenommenen Masseneinheiten resp. einem Teile oder Vielfachen derselben gleich wird.

Solche **Etalons** oder **Massenprototype** heifsen **Gewichte**, obgleich diese Bezeichnung unrichtig ist, denn es sind eben nur Massenprototype. In Paris befindet sich ein aus Platin angefertigter Körper, dessen Masse **Kilogramm** heifst; der tausendste Teil dieser Masse gilt gegenwärtig als Masseneinheit mit der Benennung **Gramm**; es hat sich ergeben, dafs diese Einheit der oben genannten theoretischen Definition nicht vollkommen entspricht, und dafs ein Kubikcentimeter reinen Wassers bei 4° C. eine Masse nat, die etwas gröfser ist als das

Gramm. Die Masse eines homogenen Körpers ist seinem Volumen proportional.

Bei homogenen Körpern kann man von einer „Stoffmenge" sprechen und sind die in homogenen Körpern enthaltenen Stoffmengen selbstverständlich den von diesen Körpern eingenommenen Volumina proportional. Hieraus folgt, daſs die Massen gleichartiger Körper (d. h. solcher, die aus ein und demselben Stoffe bestehen) der Menge des in ihnen enthaltenen Stoffes proportional sind. Wenn man als Einheit der Stoffmenge diejenige Menge annimmt, welche in einem Körper, dessen Masse als Einheit gilt, enthalten ist, so folgt daraus: die Masse homogener Körper wird durch die Menge des in ihnen enthaltenen Stoffes gemessen.

Bei ungleichartigen Körpern kann man nicht ohne weiteres von einer Vergleichung der in ihnen enthaltenen Stoffmengen reden. Hat man es z. B. mit Körpern zu thun, von denen der eine aus Kupfer, der andere aus Glas, oder der eine aus Quecksilber, der andere aus Wasserstoff besteht, so können wir es uns offenbar nicht einmal vorstellen, was man unter den Worten „gleiche oder ungleiche Mengen verschiedenartiger Stoffe" zu verstehen hat. Es hängt jedoch von uns ab, diese Ausdrucksweise dennoch einzuführen und sie wissenschaftlich zu definieren. Danach wollen wir übereinkommen, solche Mengen ungleichartiger Stoffe gleich zu nennen, welche gleiche Masse haben, d. h. welche sich unter Einwirkung gleicher Kräfte mit gleicher Beschleunigung bewegen. Wenn man diesen durchaus von unserem Übereinkommen abhängigen Begriff der gleichen Stoffmengen einführt und die Einheit der Stoffmenge, wie oben gesagt, wählt, so erhält man in verallgemeinerter Form eine Beziehung zwischen der Masse und der Stoffmenge und zwar die folgende: Die Masse eines Körpers wird durch die Menge des in ihm enthaltenen Stoffes gemessen. Aus obigem geht hervor, daſs die ursprüngliche Definition des Ausdrucks „Masse", als einer Stoffmenge, unzulässig ist, denn für ungleichartige Stoffe fehlt uns, wie gesagt, a priori sogar die Vorstellung von gleichen oder ungleichen Stoffmengen.

Im § 9 des ersten Abschnittes haben wir das Prinzip von der Erhaltung der Materie kennen gelernt. Wir können jetzt hinzufügen, daſs es wohl richtiger wäre, es das Prinzip der Erhaltung der Massen zu nennen, denn das, was bei allen physikalischen und chemischen Erscheinungen unverändert bleibt, ist die Masse der an diesen Erscheinungen teilnehmenden Körper.

Die Masse m eines gleichartigen Körpers hängt von seinem Volumen v und auſserdem von der Art des Stoffes ab, aus dem er besteht. Dies weist uns auf das Vorhandensein einer gewissen Eigenschaft hin, die für verschiedenartige Stoffe verschieden ist und welche noch neben dem eingenommenen Volumen die Masse eines Körpers

bestimmt. Diese Eigenschaft wird durch eine Gröfse besonderer Art definiert, die wir Dichte nennen und von der wir annehmen, dafs sie der Masse m eines Körpers bei gegebenem Volumen v direkt proportional und dem von der gegebenen Masse m eingenommenen Volumen v indirekt proportional sei. Als Einheit der Dichte können wir die Dichte irgend eines Stoffes (z. B. diejenige von Wasser, Quecksilber, Luft, Wasserstoff) wählen, der sich in einem ganz bestimmten Zustande (z. B. bei gegebener Temperatur und Druck) befindet. Der Zahlenwert δ für die Dichte wird durch die Formel

$$\delta = C \frac{m}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

ausgedrückt, wo C der Proportionalitätsfaktor ist. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$\delta = \frac{m}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

oder

$$m = \delta v \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

so mufs man als Einheit der Dichte die Dichte eines solchen Stoffes annehmen, dessen Volumeneinheit die Einheit der Masse enthält.

Nachdem wir das Gramm und das Kubikcentimeter als Einheiten der Masse und des Volumens bereits angenommen haben, müssen wir als Einheit der Dichte die Dichte des Wassers bei derjenigen Temperatur wählen, bei welcher ein Kubikcentimeter desselben die Masse von einem Gramm hat.

Formel (8) zeigt uns, dafs für $v = 1$ die Masse $m = \delta$ wird; hieraus folgt, dafs die Dichte eines homogenen Stoffes durch die Masse, welche in seiner Volumeneinheit enthalten ist, gemessen wird.

Für ungleichartige Körper bestimmt die Gröfse

$$\delta_m = \frac{m}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

die mittlere Dichte. Wenn die mittlere Dichte δ_m gegeben ist, so findet man die Masse des Körpers nach der Formel

$$m = v\,\delta_m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Der Grenzwert für die Dichte eines unendlich kleinen Volumens Δv, welches die Masse Δm enthält, heifst die Dichte δ im gegebenen Punkte:

$$\delta = \lim \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

In theoretischen physikalischen Fragen werden wir es fast immer mit der durch die Formeln (7), (9) und (11) bestimmten Dichte, welche durch die Masse der Volumeneinheit gemessen wird, zu thun haben. Zum Unterschiede von einer anderen Gröfse, mit der

wir uns im ersten Abschnitt bekannt machten und welche durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird, kann man die hier betrachtete Gröfse Massendichte nennen.

Wenn man das Kubikcentimeter und das Gramm als Einheiten des Volumens und der Masse annimmt, so erhält man als Einheit der Massendichte die Dichte eines Stoffes, von welchem ein Gramm das Volumen eines Kubikcentimeters hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs reines Wasser bei 4^0 diese Einheit der Massendichte nicht besitzt.

§ 5. Druck. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir in der Kraft die Ursache des geometrischen Zuwachses $\overline{\Delta v}$ der Geschwindigkeit und der Beschleunigung w kennen gelernt. Die Formel (5) gab uns die Möglichkeit, auch die Einheit der Kraft festzusetzen; die Vergleichung und Messung von Kräften haben wir hierbei auf die Vergleichung der von ihnen hervorgerufenen Beschleunigungen gegründet. Eine derartige Messung der Kräfte heifst dynamische Messung. Es kommen jedoch sehr oft Fälle vor, wo auf irgend einen Körper A zweifellos eine bestimmte Kraft wirkt und der Körper trotzdem in Ruhe bleibt, weil er einen anderen Körper B berührt, welcher ihn daran verhindert, diejenige Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ zu erlangen, die durch die Gröfse f der Kraft, ihre Wirkungsdauer Δt und die Masse m des Körpers A selbst bestimmt wird, und welche in Wirklichkeit zu Tage tritt, sobald man den Körper B entfernt. Die Erfahrung lehrt, dafs der Körper A in diesem Falle einen Druck auf B ausübt. Auf S. 15 war der Druck als ein ursprünglicher Begriff bezeichnet worden, der uns aus der täglichen Erfahrung bekannt ist (Empfindung einer Muskelspannung). Wir sagen in diesem Falle, die Kraft werde durch den Widerstand des Körpers B, auf welchen A einen Druck ausübt, aufgehoben. Wenn man vorläufig die Frage nach dem mechanischen Vorgange bei dieser Kraftvernichtung bei Seite läfst, so kann man auf Grund der Beobachtung sagen, dafs der Druck proportional der aufgehobenen Kraft ist. Nimmt man als Einheit des Druckes denjenigen Druck an, welchen der Körper B erfährt, wenn auf A die Krafteinheit wirkt, so erhält man im betrachteten Falle gleiche Zahlenwerte für Druck und Kraft. Bezeichnet man sie mit demselben Buchstaben, so kann man sagen, dafs Formel (5) $f = mw$ uns den Zahlenwert für den von A auf B ausgeübten Druck ergiebt. Die Kraft und der durch sie hervorgerufene Druck haben bei dieser Wahl der Einheiten gleiche Zahlenwerte, daher kann die Messung von Kräften auch durch Messung des von ihnen ausgeübten Druckes geschehen. Eine solche Messung der Kräfte heifst statische Messung.

§ 6. Gewicht. Auf jeden auf der Erdoberfläche befindlichen Körper wirkt eine Kraft ein, welche (angenähert) nach dem Erdzentrum

hin gerichtet ist. Eine zur Richtung dieser Kraft senkrechte Ebene heifst horizontal. Diese Kraft nennt man das Gewicht des Körpers; wir werden sie mit p bezeichnen. Da das Gewicht eine besondere Kraft ist, so ist es klar, dafs die Einheit des Gewichtes identisch ist mit der Krafteinheit. Körper, die sich auf keine anderen stützen können, bewegen sich (fallen) im luftleeren Raume unter dem Einflufs ihres eigenen Gewichtes, oder, wie man diese Kraft sonst noch zu nennen pflegt, — der „Schwerkraft", mit einer Beschleunigung, die wir mit g bezeichnen wollen. Die allgemeine Formel (5) nimmt in diesem Sonderfalle folgende Gestalt an

$$p = mg \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

Entsprechende Versuche zeigen uns, dafs g für alle Körper die gleiche Gröfse hat. Hieraus folgt, dafs die auf die Körper wirkende Schwerkraft, d. h. dafs das Gewicht derselben eine Kraft ist, welche die besondere Eigenschaft besitzt, der Masse der Körper proportional zu sein. Nun haben wir gesehen, dafs eine Kraft durch den Druck gemessen werden kann, welchen ein Körper auf einen anderen ihm als Unterlage dienenden unter ihrem Einflusse ausübt. Hieraus folgt, dafs der von einem Körper auf einen anderen unter ihm befindlichen an der Erdoberfläche ausgeübte Druck als Mafs für sein Gewicht dienen kann. Wenn man aber, wie oben, als Einheit des Druckes denjenigen Druck gelten läfst, den ein Körper unter dem Einflusse der Krafteinheit ausübt, also ein Körper, der die Einheit des Gewichts besitzt, so wird der Druck numerisch gleich dem Gewichte. Deshalb kann man auch unter „Gewicht" den Druck verstehen, der von einem in Ruhe befindlichen Körper ausgeübt wird. Unter „Wägung" versteht man das Verfahren, den Druck der Körper auf eine horizontale Unterlage zu vergleichen. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dafs die Wägung das Massenverhältnis der Körper ergiebt, und dafs ungleichartige Körper, welche gleiches Gewicht besitzen, auch gleiche Masse haben.

Aufser der oben erwähnten dynamischen Methode der Massenvergleichung ungleichartiger Körper haben wir auf diese Weise noch eine Methode der statischen Vergleichung für sie gefunden.

In Formel (12) hat g einen bestimmten Zahlenwert, der von der zu Grunde gelegten Einheit der Beschleunigung abhängt. Es ist bereits gesagt worden, dafs bei Benutzung der Formel (5) und ihrer Specialform (12) wir die Einheiten für Beschleunigung und Masse oder Beschleunigung und Kraft willkürlich wählen können. Formel (12) zeigt, dafs für $m = 1$ das Gewicht $p = g$ wird, d. h. dafs das Gewicht eines Körpers, welcher die Einheit der Masse besitzt, g Gewichtseinheiten enthält. Wenn man die Einheit der Masse willkürlich wählt, so mufs man als Einheit des Gewichtes (oder der Kraft) das Gewicht eines

Körpers annehmen, der $\frac{1}{g}$ Masseneinheiten enthält. Wenn man z. B. eine der folgenden Massen: das Gramm, Pfund u. s. w. als Einheit der Masse annimmt, so wird die Einheit des Gewichtes (oder der Kraft) gleich $\frac{1}{g}$ Gramm, Pfund u. s. w.

Formel (12) ergiebt weiter, dafs für $p = 1$ die Masse $m = \frac{1}{g}$ wird, d. h. ein Körper, dessen Gewicht gleich ist der Gewichts- oder Krafteinheit, hat eine Masse, welche $\frac{1}{g}$ der Masseneinheit ist. Wenn man die Gewichtseinheit willkürlich wählt, so mufs man als Einheit der Masse die Masse eines Körpers wählen, der g Gewichtseinheiten enthält. Unter der Bezeichnung Gramm, Pfund u. s. w. versteht man bisweilen das Gewicht von einem Kubikcentimeter reinen Wassers und gewisser anderer Körper, die in Wirklichkeit nur Massenetalons sind. Nimmt man jedoch das Gramm oder Pfund als Gewichtseinheit an (oder als Krafteinheit), so mufs man als Masseneinheit g Gramm oder g Pfund annehmen.

Bereits im ersten Abschnitte, S. 38 und 39, sind wir mit den Begriffen der Dichte D eines Körpers, welche durch das Gewicht der Volumeneinheit gemessen wird, mit der mittleren Dichte und der Dichte in einem gegebenen Punkte bekannt geworden. Die Dichte D werden wir bisweilen zum Unterschiede von der Massendichte δ als Gewichtsdichte bezeichnen. Nach (12) ist

$$D = g\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, a)$$

§ 7. **Das dritte Bewegungsgesetz** ist von Newton folgendermafsen ausgesprochen worden: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi, d. h. Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander der Gröfse nach gleich und (der Richtung nach) entgegengesetzt; oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind immer gleich und nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wenn zwei Körper A und B einander beeinflussen, so sind die zwei Kräfte, welche infolgedessen auf diese Körper wirken, einander gleich und nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Man hat bei der Wechselwirkung von Körpern zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Zwei Körper berühren einander und üben aufeinander einen Druck aus. Ein Druck auf einen physikalischen Körper ruft in jedem Falle eine Gestaltsänderung, z. B. eine Volumenverminderung desselben, hervor; in diesem Falle suchen die Moleküle des Körpers in ihre

ursprüngliche Lage zurückzukehren, d. h. die frühere Gestalt des Körpers wieder herzustellen. In diesem Bestreben liegt die Quelle für die Reaktion oder den Gegendruck des einem Drucke ausgesetzten Körpers. Eine Gestaltsänderung erfährt auch der den Druck ausübende Körper, auf welchen die gegebene Kraft f unmittelbar wirkt. Somit drückt also jeder der beiden sich berührenden Körper auf den anderen und diese beiden Drucke sind der Gröfse nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt.

Wenn die Last A auf die horizontale Oberfläche des Körpers B mit einer gewissen Kraft f drückt, so wird das Bestreben des Körpers B, seine Gestalt wieder herzustellen (z. B. die entstandene Vertiefung zu beseitigen), zur Quelle eines Druckes dieses Körpers (von unten nach oben) auf A, welcher ebenfalls gleich f ist. Wenn ein Körper A an einer Schnur B hängt, so wird letztere mit einer gewissen, dem Gewichte von A gleichen Kraft gespannt; mit derselben Kraft wirkt auch die ausgereckte Schnur B auf den Körper A, indem sie sich bis auf die ursprüngliche Länge zu verkürzen strebt. Wenn ein Gas in einem Gefäfse eingeschlossen ist, so bringt es in seinem Bestreben, sich auszudehnen, auf jede Oberflächeneinheit der Gefäfswandung einen gewissen Druck f hervor. Unter dem Einflusse dieses Druckes dehnt sich das Gefäfs etwas aus und sein Bestreben das frühere Volumen wieder herzustellen, äufsert sich durch einen Druck f auf jede Oberflächeneinheit des Gases.

2. Die Körper berühren einander nicht, jedoch mufs die Anwesenheit des Körpers A an einer bestimmten Stelle des Raumes als Ursache für das Auftreten der Kraft f, welche auf den Körper B wirkt, gelten. Die Beobachtungen führen uns zu der Überzeugung, dafs in diesem Falle das Vorhandensein von B an der von ihm eingenommenen Stelle die Ursache für das Auftreten einer auf A wirkenden Kraft abgiebt, welche der Gröfse nach gleich f, der Richtung nach ihr entgegengesetzt ist. Dieses bezieht sich auf alle diejenigen Fälle einer Wechselwirkung, für welche die Rolle des zwischenliegenden Mediums, welches die Wirkung eines Körpers auf den anderen überträgt, noch nicht klargelegt ist, nämlich auf die Erscheinungen der allgemeinen Gravitation, die elektrischen und die magnetischen Erscheinungen. Die Kraft, mit welcher die Erde einen Stein oder etwa den Mond anzieht, ist gleich der Kraft, mit welcher zur selben Zeit die Erde nach entgegengesetzter Richtung vom Steine oder vom Monde angezogen wird; freilich erlangt hierbei die Erde eine soviel mal geringere Beschleunigung, als ihre Masse diejenige des Steines resp. Mondes übertrifft. Ebendasselbe bezieht sich auch auf die Wechselwirkung elektrisierter, magnetischer oder vom elektrischen Strom durchflossener Körper, sowie endlich auf die Wechselwirkung von elektrischen Strömen und Magneten.

Aus dem dritten Bewegungsgesetz ergiebt sich als Folge: Wenn

die aufeinander wirkenden Körper frei sind, und jeder von ihnen nur unter dem Einflusse des anderen steht, so bewegen sie sich mit Beschleunigungen, die ihren Massen umgekehrt proportional sind.

§ 8. **Kraftimpuls und Bewegungsmenge.** Nehmen wir an, die Kraft f, welche nach Gröfse und Richtung konstant ist, wirke während einer gewissen Zeit t auf den Körper A. In diesem Falle sagen wir, der Körper A erfahre einen Kraftimpuls (Antrieb). Der Kraftimpuls ist eine Gröfse besonderer Art, für welche wir festsetzen, dafs sie der Kraft f und der Zeit t proportional sei. Als Einheit des Impulses K kann man den Impuls irgend einer beliebigen Kraft gelten lassen, welche während einer beliebigen Zeit gewirkt hat. In diesem Falle haben wir im allgemeinen $K = Cft$. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$K = ft \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

so mufs man als Einheit des Kraftimpulses den Impuls der Krafteinheit annehmen, welche während der Zeiteinheit gewirkt hat. Wenn sich die Kraft nach Gröfse und Richtung ändert, so teilen wir die Zeit, während welcher sie wirkte, in eine überaus grofse Zahl sehr kleiner Teile Δt. Die Kraft f können wir während eines jeden dieser kleinen Zeitintervalle als konstant ansehen, wobei wir einen Fehler begehen, der um so kleiner wird, je gröfser die Anzahl der Teile ist, in welche wir die Zeit t geteilt haben, d. h. je kleiner Δt ist. Den Impuls während der Zeit Δt, d. h. die Gröfse $f\Delta t$, wollen wir Elementarimpuls nennen. Bezeichnen wir ihn symbolisch mit ΔK, so ist

$$\Delta K = f \Delta t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Den Grenzwert, welchem die algebraische Summe der Gröfsen $\Delta K = f\Delta t$ bei unbegrenzter Zunahme der Anzahl Teile Δt zustrebt, wollen wir den Impuls K der variablen Kraft für die Zeit t nennen. Symbolisch kann dies folgendermafsen bezeichnet werden

$$K = lim\, \Sigma \Delta K = lim\, \Sigma f \Delta t = \int f dt\ ^{1)} \quad \ldots \quad (15)$$

Wir führen ferner noch eine besondere Gröfse ein, die wir Bewegungsmenge (Bewegungsgröfse) nennen. Wir setzen diese Gröfse proportional der Masse m und der Geschwindigkeit v. Als Einheit der Bewegungsmenge kann man die Bewegungsmenge einer beliebigen Masse, die sich mit beliebiger Geschwindigkeit bewegt, gelten lassen. In diesem Falle wird der Zahlenwert L der Bewegungsmenge einer mit der Geschwindigkeit v begabten Masse m durch die Formel $L = Cmv$ wiedergegeben. Setzt man $C = 1$, so mufs man als Einheit die Be-

[1]) Für den Grenzwert einer Summe wird in der Integralrechnung das Zeichen $\int$ gebraucht.

wegungsmenge der sich mit der Einheit der Geschwindigkeit bewegenden Masseneinheit annehmen. Es ist dann

$$L = mv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Gröfse L ist ein Vektor, der die Richtung der Geschwindigkeit v hat. Wenn die Geschwindigkeit v den geometrischen Zuwachs $\overline{\Delta v}$ erfährt, so erhält auch die Bewegungsmenge einen geometrischen Zuwachs

$$\overline{\Delta L} = m \overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

welcher die Richtung der Geschwindigkeit $\overline{\Delta v}$ hat. Der neue Wert für die Bewegungsmenge wird durch die Diagonale des aus L und $\overline{\Delta L}$ konstruierten Parallelogramms dargestellt.

Wenden wir uns nunmehr dem zweiten Bewegungsgesetze zu, das durch Formel (1), welcher wir die Form (3) geben, ausgedrückt wird. Vergleicht man Formel (5) mit Formel (2), so sieht man, dafs $c = m$ gleich der Masse des Körpers ist. Daher kann man (3) folgende Form geben

$$f \Delta t = m \overline{\Delta v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Vergleicht man jetzt (18) mit (14) und (17), so sieht man, dafs man die erste dieser Formeln wie folgt schreiben kann

$$\Delta K = \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

dafs somit das zweite Bewegungsgesetz zu folgendem neuen Satz führt: Der Elementarimpuls einer Kraft wird durch den geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge gemessen.

Bildet man die algebraische Summe der Ausdrücke für die Gröfsen $f \Delta t$ und $m \overline{\Delta v}$ der Formel (18) unter Berücksichtigung von (15) und (17), so erhält man

$$K = \lim \Sigma f \Delta t = \lim \Sigma m \overline{\Delta v} = \lim \Sigma \overline{\Delta L} \quad . \quad . \quad (20)$$

d. h. der Kraftimpuls während eines beliebigen Zeitintervalls wird durch die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge gemessen. Dieser Satz vereinfacht sich in zwei Sonderfällen.

1. Die Bewegung sei geradlinig; die Kraft habe die Richtung der Bewegung. In diesem Falle ist $\overline{\Delta v}$ gleich dem algebraischen Geschwindigkeitszuwachs Δv, die Summe der algebraischen Zunahmen aber ist nichts anderes, als der volle Zuwachs dieser Gröfse, d. h. die Differenz zwischen ihrem neuen und früheren Werte. Wenn sich die Geschwindigkeit während der Zeit t von v_1 bis v_2 geändert hat, so giebt Formel (20)

$$K = \lim \Sigma f \Delta t = m v_2 - m v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Bei der geradlinigen Bewegung wird der Kraftimpuls für einen beliebigen Zeitraum durch den algebraischen Zuwachs der Bewegungsmenge gemessen.

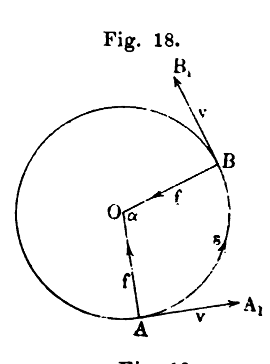
2. Die Kraft habe konstante Richtung. In diesem Falle haben alle geometrischen Zunahmen $\overline{\Delta v}$ die gleiche Richtung, und ist ihre Summe offenbar nichts anderes als der vollständige geometrische Geschwindigkeitszuwachs.

Wenn die Kraft eine konstante Richtung hat, welche übrigens mit der Bewegungsrichtung einen veränderlichen Winkel bilden kann, so wird der Kraftimpuls für einen beliebigen Zeitraum durch den geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge im selben Zeitraum gemessen.

Für den allgemeinen Fall, wo die Kraft keine konstante Richtung hat, ist obige Vereinfachung nicht zulässig, da die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen offenbar nicht gleich dem vollständigen geometrischen Zuwachs ist. Wir wollen nun Formel (21) für die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung prüfen, für welche die Beschleunigung w, also auch die Kraft f eine konstante Gröfse, die erlangte Geschwindigkeit $v_2 - v_1 = wt$ ist. Unsere allgemeine Formel $f = mw$ giebt in diesem Falle $ft = mwt = mv_2 - mv_1$.

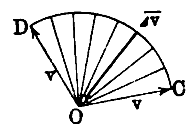
Prüfen wir ferner die allgemeine Formel (20) für den Fall einer gleichförmigen Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit v. (Der Kreisradius sei $= R$.) Berechnen wir zunächst den totalen Kraftimpuls für die Zeit t, während welcher der Punkt den Bogen $AB = s = R\alpha$ (Fig. 18), wo $\alpha = \angle AOB$ ist, durchlaufen hat. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung wird w nach Formel (30) S. 68 bestimmt, d. h. $w = \frac{v^2}{R}$; die Beschleunigung ist nach dem Zentrum gerichtet. Hieraus folgt, dafs auch die Kraft f beständig nach dem Zentrum gerichtet ist sie ist gleich

Fig. 18.



$$f = \frac{mv^2}{R} \quad \cdots \quad (22$$

Fig. 19.



Der vollständige Kraftimpuls ist $ft = \frac{mv^2t}{R}$. Führt man anstatt der Zeit den Winkel α ein, so hat man aus $R\alpha = s$, $\alpha = s : R = vt : R$, also

$$K = lim\, \Sigma f \Delta t = ft = \frac{mv^2t}{R} = mv\alpha \quad \cdots\cdots \quad (22, a)$$

Um $\lim \Sigma m \overline{\Delta v}$, d. h. die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge zu finden, ziehen wir von einem beliebigen Punkte O aus (Fig. 19) die Geraden OC und OD gleich und parallel $AA_1 = BB_1 = v$ und eine große Zahl zwischenliegender Geraden, die den Geschwindigkeiten v des Punktes während seiner Bewegung auf dem Bogen AB gleich und parallel sind. Offenbar ist $\angle COD = \angle AOB = \alpha$. Die Endpunkte dieser von O aus gezogenen Geraden liegen auf einem Kreisbogen; die Elemente dieses Bogens sind nichts anderes als die geometrischen Geschwindigkeitszunahmen $\overline{\Delta v}$. Die algebraische Summe dieser Zunahmen ist gleich dem Bogen CD, d. h. gleich $v\alpha$, daher ist die algebraische Summe der geometrischen Zunahmen für die Bewegungsmenge

$$\lim \Sigma \Delta L = \lim \Sigma m \overline{\Delta v} = m v \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (22, b)$$

(22, a) und (22, b) ergeben die Richtigkeit der Formel (20) für den betrachteten Fall. Als Kraftimpuls für einen vollständigen Umlauf des Punktes auf der Kreislinie erhalten wir $K = 2\pi m v$.

§ 9. Momentane Kräfte. Als „momentane“ Kraft bezeichnet man eine Kraft, deren Wirkung eine so kurze Zeit τ andauert, dafs nur unter besonderen Umständen, d. h. mit Hülfe besonderer, komplizierter Vorrichtungen die Wirkung derselben in den verschiedenen Momenten der Zeit τ beobachtet werden kann. Im Verlaufe dieser Zeit ändert die Kraft f bei gleichbleibender Richtung ununterbrochen ihre Gröfse; diese beginnt mit dem Werte Null zu Anfang der Zeit τ und kehrt zu Ende derselben wieder zum Werte Null zurück. Kräfte dieser Art treten auf beim Zusammenstofs von Körpern, bei Wirkung eines Stromimpulses (z. B. eines Induktionsstromes) auf die Magnetnadel u. s. w. Da sich die Kraft f in der Zeit τ ändert, so ruft sie eine ebenfalls kontinuierlich sich ändernde Beschleunigung hervor. Wegen der aufserordentlich geringen Zeitdauer der Kraftwirkung gelangt man nicht zur Beobachtung dieser Beschleunigungen und werden deshalb auch die veränderlichen Werte der Kraft f oft gar nicht berücksichtigt. Wir können aber die Geschwindigkeit, also auch die Bewegungsmenge vor und nach Wirkung der momentanen Kraft beobachten. Bezeichnet man jetzt den Gesamtimpuls der veränderlichen Kraft f in der Zeit τ mit F und nimmt man an, dafs sich f während dieser Zeit τ der Richtung nach nicht ändere, so kann man F dem vollständigen geometrischen Zuwachs der Bewegungsmenge gleichsetzen. Sehr oft wird der Impuls F als Mafs für die Wirkung der momentanen Kraft gewählt und bisweilen auch „die Gröfse der momentanen Kraft“ genannt.

Die Gröfse einer momentanen Kraft wird durch die geometrische Änderung der Bewegungsmenge des Körpers, auf welchen sie wirkt, gemessen.

Wenn die Geschwindigkeit des Körpers während der Zeit τ die Richtung der Kraft f selbst hat, wird die „Gröfse“ F der momentanen Kraft durch die Differenz der Bewegungsmengen der Körper vor und nach der Wirkung gemessen; vergl. (21).

§ **10. Das C. G. S.-System.** Wir haben gesehen, dafs, sobald man dem Proportionalitätskoeffizienten C in den Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Zahlenwerten der verschiedenen physikalischen Gröfsen feststellen, einen bestimmten Wert zuerteilt, z. B. $C = 1$ setzt, die Einheit einer dieser Gröfsen sich ganz von selbst ergiebt, wenn die Einheiten für die anderen Gröfsen bereits gewählt sind. Setzt man in der Reihe der physikalischen Formeln, von denen jede folgende eine neue in den vorhergehenden Formeln nicht vorkommende Gröfse enthält, die Proportionalitätsfaktoren gleich Eins, so kann man ein „System von Einheiten aufstellen“. Man mufs dabei die Einheiten für drei Gröfsen willkürlich wählen, welche übrigens unter sich unabhängig sein müssen, so dafs eine von ihnen nicht etwa durch die beiden anderen bestimmt werden kann. Diese drei Einheiten heifsen die Grundeinheiten. Die Einheiten der übrigen Gröfsen, welche dadurch erhalten werden, dafs man den Proportionalitätsfaktor gleich Eins setzt, heifsen abgeleitete Einheiten; man nennt sie auch absolute Einheiten, doch ist dieser Ausdruck kein treffender. Die drei Grundeinheiten kann man auf sehr verschiedene Weise auswählen; so ist es beispielsweise möglich, ein System von absoluten Einheiten auf die Grundeinheiten der Länge, Geschwindigkeit und Kraft zu gründen, oder auf diejenigen der Masse, Zeit und Beschleunigung u. s. w. Ausgehend von drei solchen Grundeinheiten bestimmter Art, kann man wiederum unendlich viele verschiedene Systeme von abgeleiteten Einheiten erhalten, indem man die absoluten Werte der drei Grundeinheiten ändert.

Im folgenden werden wir voraussetzen, dafs als Grundeinheiten die Einheiten der Länge l, der Masse m und der Zeit t angenommen sind. Besondere Aufmerksamkeit wenden wir hierbei dem Falle zu, wo als Längeneinheit das Centimeter (C), als Masseneinheit das Gramm (G) und als Zeiteinheit die Sekunde (S) gewählt sind. Das System absoluter Einheiten, welches sich auf diese drei Einheiten der Länge, Masse und Zeit gründet, heifst das C. G. S.-System, die abgeleiteten Einheiten aber — C. G. S.-Einheiten. Die C. G. S.-Einheit der Oberfläche ist das Quadratcentimeter; die C. G. S.-Einheit des Volumens ist das Kubikcentimeter.

Geschwindigkeit. Setzt man in Formel (3) auf Seite 58 den Koeffizienten $C = 1$, d. h. nimmt man Formel (4) an, so mufs man als absolute Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit eines

Punktes annehmen, welcher die Längeneinheit in der Zeiteinheit durchläuft. Die C. G. S.-Einheit der Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher ein Centimeter in einer Sekunde durchläuft. Das Licht durchläuft in einer Sekunde 300 000 km, also ist

die Lichtgeschwindigkeit $v = 3.10^{10}$ C. G. S.-Einheiten der Geschwindigkeit . . (23)

Beschleunigung. Setzt man $C = 1$ in (17) auf Seite 64, d. h. bestimmt man w durch Formel (18), so mufs man als absolute Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung einer solchen Bewegung annehmen, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt. Die C. G. S.-Einheit der Beschleunigung ist die Beschleunigung einer solchen Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit in einer Sekunde um die C. G. S.-Einheit der Geschwindigkeit, d. h. um einen Centimeter pro Sekunde vergröfsert. Beim freien Fall nimmt die Geschwindigkeit in einer Sekunde um 981 Centimeter pro Sekunde zu. Bezeichnet man die Beschleunigung beim freien Fall mit g, so hat man

$g = 981$ C. G. S.-Einheiten der Beschleunigung . . (24)

Formel (30) auf Seite 68 zeigt, dafs die C. G. S.-Einheit der Beschleunigung auch gleich ist der Beschleunigung eines Punktes, welcher sich mit einer Geschwindigkeit von einem Centimeter pro Sekunde auf einer Kreislinie, deren Radius gleich einem Centimeter ist, bewegt.

Drehung. Die absolute Einheit der Winkelgeschwindigkeit [vergl. (40) und (41), Seite 71 u. 72] besitzt ein Körper, welcher sich in der Zeiteinheit um den Einheitswinkel (57,29°) dreht. Die C. G. S.-Einheit der Winkelgeschwindigkeit hat ein Körper, der sich in einer Sekunde um den Einheitswinkel dreht. Die absolute Einheit der Winkelbeschleunigung [vergl. (45) auf Seite 73] besitzt ein Körper, dessen Winkelgeschwindigkeit sich in der Zeiteinheit um deren absolute Einheit vergröfsert. Die C. G. S.-Einheit der Winkelbeschleunigung hat ein Körper, dessen Winkelgeschwindigkeit um die C. G. S.-Einheit der Winkelgeschwindigkeit pro Sekunde zunimmt.

Kraft. Setzt man $C = 1$ in Formel (4) auf Seite 77, d. h. läfst man Formel (5) gelten, so mufs man als absolute Krafteinheit eine Kraft annehmen, unter deren Einflufs die Grundeinheit der Masse die absolute Einheit der Beschleunigung erhält. Die C. G. S.-Einheit der Kraft (also auch des Gewichts) ist eine Kraft, unter deren Einflufs die Grammmasse die C. G. S.-Einheit der Beschleunigung erlangt, so dafs ihre Geschwindigkeit sich um „einen Centimeter pro Sekunde" in jeder Sekunde vergröfsert. Diese Kraft wird „Dyne" genannt. Eine Million Dynen heifst Megadyne. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Dyne mit der bekannten französischen Kraft-

oder Gewichtseinheit, welche Gramm heifst, vergleichen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Wirkungen beider Kräfte, einerseits der Dyne und andererseits des Grammes, auf ein und denselben Körper, nämlich auf einen solchen, der die Masse von einem Gramm hat, miteinander vergleichen. Aus der Definition selbst folgt, dafs die Grammmasse unter dem Einflusse der Kraft einer Dyne die C. G. S.-Einheit der Beschleunigung erfährt. Dieselbe Grammmasse erlangt unter dem Einflusse der Grammkraft, d. h. unter dem Einflusse des Gewichts eines Grammes an der Erdoberfläche eine Beschleunigung von $g = 981$ C. G. S.-Einheiten der Beschleunigung [vergl. (24)]. Hieraus folgt, dafs

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ Gramm} & = 981 \text{ Dynen} \\ 1 \text{ Dyne} & = 0{,}00102 \text{ Gramm} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Hierbei ist es nicht nötig, hinzuzufügen, dafs die Rede von der Kraft, nicht von der Masse „Gramm" ist, denn die Dyne ist eine Kraft und man kann nur gleichartige Gröfsen miteinander vergleichen. Angenähert (bis auf 2 Proc. genau) kann man die Dyne gleich einem Milligramm setzen. Eine Megadyne ist gleich 1,02 kg.

Massendichte. Setzt man in Formel (6) auf Seite 79 $C = 1$, d. h. nimmt man (7) an, so hat als absolute Einheit der Dichte die Dichte eines Körpers zu gelten, welcher in der Volumeneinheit die Masseneinheit enthält. Die C. G. S.-Einheit der Dichte ist die Dichte eines Körpers, welcher die Masse eines Gramms in einem Kubikcentimeter enthält. Hieraus folgt, dafs die C. G. S.-Einheit der Dichte angenähert der Dichte des Wassers bei 4^0 gleich ist und die sogenannte tabellarische Dichte (vergl. Seite 40) der verschiedenen Stoffe, d. h. ihre auf Wasser von 4^0 bezogenen Dichten bei 0^0 in Einheiten ausgedrückt sind, die sich von den C. G. S.-Einheiten der Dichte nur wenig unterscheiden.

Gewichtsdichte. Die absolute Gewichtsdichte ist eine veränderliche Gröfse, denn sie ist gleich dem (in absoluten Krafteinheiten ausgedrückten) Gewichte der absoluten Volumeneinheit des Stoffes; die C. G. S.-Gewichtsdichte des Wassers bei 4^0 ist gleich $1:g$, wo g in C. G. S.-Einheiten (z. B. $g = 981$) ausgedrückt sein mufs. Hiermit stimmt (12, a) auf Seite 82 vollkommen überein.

Die tabellarische Gewichtsdichte, die numerisch der tabellarischen Massendichte gleich ist (dieselbe ist nur wenig verschieden von der C. G. S.-Dichte), wird erhalten, wenn man das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser von 4^0 als Einheit des Gewichts, also auch als Krafteinheit annimmt. Es ist dies dasjenige Gewicht, das sich nur wenig von der französischen Gewichts- und Krafteinheit Gramm unterscheidet. Hieraus folgt, dafs die tabellarische Gewichtsdichte sich nicht ungezwungen in irgend welchen absoluten Einheiten ausdrücken läfst.

Kraftimpuls und Bewegungsmenge. Formel (13) auf Seite 84 zeigt, dafs die absolute Einheit des Kraftimpulses erhalten wird, wenn die absolute Krafteinheit während der Zeiteinheit wirkt. Die C. G. S.-Einheit des Kraftimpulses ist der Impuls einer Dyne, welche während einer Sekunde wirkt.

Aus Formel (16) auf Seite 85 folgt, dafs die mit der absoluten Geschwindigkeitseinheit sich bewegende Masseneinheit die absolute Einheit der Bewegungsmenge besitzt. Die C. G. S.-Einheit der Bewegungsmenge besitzt die Grammmasse, die sich mit einer Geschwindigkeit von einem Centimeter pro Sekunde bewegt.

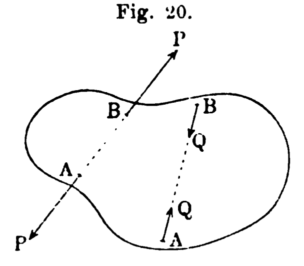
Unter dem Einflusse der C. G S.-Einheit des Kraftimpulses wird im allgemeinsten Falle [vergl. (20), Seite 85] die Summe der geometrischen Zunahmen der Bewegungsmenge erhalten, welche der C. G. S.-Einheit gleich ist. Wenn die Kraft gleiche Richtung mit der Bewegung selbst hat [vergl. (21), Seite 85], so ruft die Einheit des Kraftimpulses die C. G. S.-Einheit der Bewegungsmenge hervor.

Die absolute Einheit der momentanen Kraft ruft die absolute Einheit des geometrischen Zuwachses der Bewegungsmenge hervor.

§ 11. Zusammensetzung (Addition) und Zerlegung der Kräfte. Jede Kraft hat eine bestimmte Gröfse und Richtung. Der Punkt, auf welchen sie unmittelbar wirkt, heifst der Angriffspunkt. Die Kraft ist ein Vektor und kann daher durch einen Pfeil dargestellt werden.

Wenn auf einen physikalischen festen Körper zwei Kräfte wirken deren Gröfse gleich und deren mit der Verbindungsgeraden ihrer Angriffspunkte A und B (z. B. P und P oder Q und Q in Fig. 20) zusammenfallende Richtung entgegengesetzt ist, so bringen sie eine gewisse Lageänderung der Teilchen im Inneren des Körpers hervor: entweder recken sie denselben aus (P, P), oder sie drücken ihn zusammen (Q, Q). Alles folgende jedoch soll sich auf einen sogenannten unveränderlichen (starren) festen Körper beziehen, d. h. auf einen solchen, in welchem

Fig. 20.



die erwähnten inneren Verschiebungen und die dadurch hervorgerufenen Änderungen der Entfernungen AB entweder gar nicht existieren (idealer Fall) oder so gering sind, dafs man sie vernachlässigen kann. In diesem Falle sagen wir, die beiden gegebenen Kräfte heben einander gegenseitig auf. Ein unveränderlicher fester Körper hat folgende Fundamentaleigenschaft: Man kann den Angriffspunkt einer auf einen unveränderlichen festen Körper wirkenden Kraft nach irgend einem neuen Punkte desselben, der in der Richtung

der Kraft liegt, verlegen, ohne dafs sich dadurch die Wirkung der Kraft auf den Körper ändert.

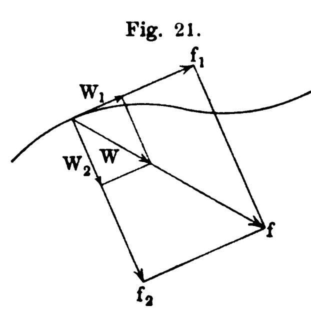
Alle Schlüsse, die sich aus dem Umstande ergeben, dafs man eine oder mehrere Kräfte durch eine oder mehrere neue Kräfte ersetzt hat, wobei die neuen Angriffspunkte mit den früheren nicht zusammenfallen, gelten ausschliefslich für unveränderliche Körper, was stets im Auge zu behalten ist.

Wenn mehrere Kräfte durch eine neue ersetzt werden können, so heifsen die ersteren Seitenkräfte (Komponenten), die letztere — Resultante.

Die Resultante einer beliebigen Anzahl Kräfte mit demselben Angriffspunkte ist gleich der geometrischen Summe der gegebenen Kräfte. Sie wird dargestellt durch die letzte Seite desjenigen Vielecks, dessen übrige Seiten den gegebenen Kräften parallel sind (vergl. die Regel vom Polygon der Vektoren auf Seite 52). Die Resultante zweier Kräfte wird durch die Diagonale des Parallelogramms, dreier Kräfte durch die Diagonale des Parallelepipedons dargestellt, die aus den beiden Kräften als Seiten, beziehungsweise aus den drei Kräften als Kanten konstruiert sind. Eine gegebene Kraft kann man in zwei, drei oder mehrere Kräfte zerlegen, welche denselben Angriffspunkt wie die gegebene Kraft haben. So kann man z. B. eine gegebene Kraft f durch die drei Kräfte f_x, f_y und f_z, welche den Koordinatenachsen im Raume parallel sind, ersetzen.

Wir hatten gesehen, dafs man im allgemeinen Falle der Bewegung eines Punktes auf einer Kurve die Beschleunigung w in eine tangentiale w_1 und eine normale w_2 zerlegen kann (vergl. Formel (31) auf Seite 69). Die wirkende Kraft f (Fig. 21), welche gleich mw ist und der Richtung nach mit w zusammenfällt, kann man in die tangentiale Komponente f_1 und die normale Komponente f_2 zerlegen. Aus Fig. 21 ist ersichtlich, dafs die drei Kräfte f, f_1 und f_2 den drei Beschleunigungen w, w_1 und w_2 proportional sind. Hieraus folgt, dafs $f_1 = m\,w_1$ und $f_2 = m\,w_2$ ist, d. h. man kann die tangentiale und die normale Komponente der Kraft als Ursachen der tangentialen, resp. normalen Beschleunigungen ansehen; die erste dieser Kräfte bringt eine Geschwindigkeitsänderung der Gröfse nach, die zweite eine Geschwindigkeitsänderung der Richtung nach hervor. Formel (31) auf Seite 69 ergiebt für die normale Komponente:

Fig. 21.



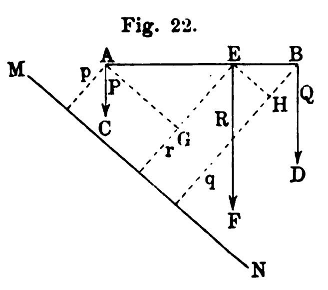
$$f_2 = \frac{m v^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, a)$$

Der Impuls $f_1 \Delta t$ der Kraft f_1 ist gleich dem algebraischen Zuwachs $m \Delta v$ der Bewegungsmenge. Hieraus folgt, dafs der Impuls der tangentialen Komponente für ein beliebiges Zeitintervall gleich dem algebraischen Zuwachs der Bewegungsmenge ist, d. h.

$$L_1 = lim \Sigma f_1 \Delta t = m v_2 - m v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Aus der Elementarphysik ist bekannt, dafs die Resultante zweier parallelen nach derselben Seite gerichteten Kräfte $P = AC$ und $Q = BD$ (Fig. 22) gleich ihrer Summe ($R = EF = P + Q$) ist und dieselbe Richtung wie sie hat. Ihr Angriffspunkt E teilt die Entfernung AB in zwei den anliegenden Kräften indirekt proportionale Teile, d. h. $EB : EA = P : Q$. Wir wollen nun eine neue Gröfse einführen, die wir das Moment der Kraft in Bezug auf eine gegebene Ebene nennen und durch das Produkt aus der Kraft und derjenigen Senkrechten messen wollen, die vom Angriffspunkte aus auf die Ebene gefällt ist. Beweisen wir, dafs das Moment der Resultante zweier paralleler Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Momente ihrer Komponenten ist.

Fig. 22.



Es gelte als Zeichnungsebene der Fig. 22 die durch AEB gehende und zur gegebenen Ebene MN senkrechte; die Kräfte P, Q und R brauchen in dieser Zeichnungsebene nicht zu liegen. Die Senkrechten, welche aus A, B und E auf die Ebene MN gefällt sind, bezeichnen wir mit p, q und r. Es soll bewiesen werden, dafs $Pp + Qq = Rr$ ist. Aus der Figur ist ersichtlich, dafs $Pp + Qq = P(r - GE) + Q(r + HB) = (P + Q)r + Q.HB - P.GE$ ist. Es ist aber $\frac{P}{Q} = \frac{EB}{AE} = \frac{HB}{GE}$; hieraus folgt $Q.HB = P.GE$. Daher kommt

$$Pp + Qq = (P + Q)r = Rr.$$

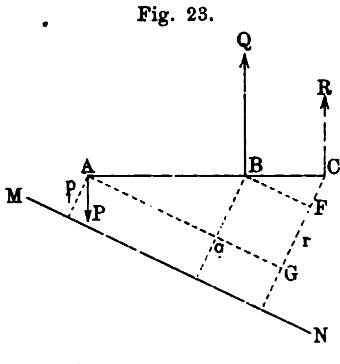
Wenn wir ein System von parallelen Kräften P_i haben und ihre Resultante mit R, die von den Angriffspunkten der Kräfte auf eine beliebige Ebene gefällten Senkrechten mit p_i und r bezeichnen, so ist

$$\left. \begin{aligned} R &= \Sigma P_i \\ Rr &= \Sigma P_i p_i \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Aus der Elementarphysik ist ferner bekannt, dafs die Resultante R zweier parallelen Kräfte P und Q (Fig. 23 a. f. S.), die nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, gleich ihrer Differenz

$R = Q - P$ und nach der Seite der gröfseren Kraft gerichtet ist. Ihr Angriffspunkt C liegt auf der Verlängerung der Geraden AB näher zur gröfseren Kraft, wobei $P : Q = CB : CA$ ist. Giebt man den Kräften P und Q entgegengesetztes Vorzeichen, so läfst sich beweisen, dafs auch in diesem Falle das Moment der Resultante gleich der (algebraischen) Summe der Momente ihrer Komponenten, d. h. $Rr = Qq - Pp$ ist, wo p, q und r die Längen der aus A, B und C auf die Ebene MN gefällten Senkrechten sind.

Fig. 23.



Aus der Figur ist ersichtlich, dafs $Qq - Pp = Q(r - CF) - P(r - CG) = (Q - P)r + P.CG - Q.CF$ ist. Aus $\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} = \frac{CF}{CG}$ folgt $P.CG = Q.CF$. Mithin ist $Qq - Pp = (Q - P)\, r = Rr$. Es folgt hieraus, dafs die Formeln (27) auch für ein beliebiges System von parallelen Kräften gelten, von welchen die einen diese, die anderen die entgegengesetzte Richtung haben.

Der Angriffspunkt der Resultante eines Systems von parallelen Kräften heifst **Mittelpunkt des Systems der parallelen Kräfte.** Nehmen wir an, es sei ein System von parallelen Kräften P_i gegeben; der Angriffspunkt der Kraft P_i habe die Koordinaten x_i, y_i, z_i und die Resultante $R = \Sigma P_i$ habe einen Angriffspunkt mit den Koordinaten X, Y, Z. Sei nun ferner die Koordinatenebene yz zugleich die Ebene der Momente, so kommt anstatt (27)

$$RX = \Sigma P_i x_i.$$

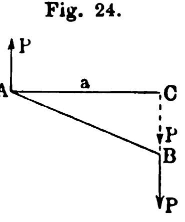
Zwei ähnliche Formeln erhält man, wenn man die Momente auf die Koordinatenebenen xz und xy bezieht. Ersetzt man sodann R durch ΣP_i, so kommt

$$X = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i}; \quad Y = \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i}; \quad Z = \frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Wir sehen somit, dafs die Koordinaten des Mittelpunktes nur von der Gröfse der Kräfte P_i und von der Lage ihrer Angriffspunkte abhängen; dagegen **hängt die Lage des Mittelpunktes der parallelen Kräfte nicht von der Richtung der Kräfte selbst ab und bleibt unverändert, wenn man alle Kräfte P_i eine gleiche Anzahl Male gröfser oder kleiner werden läfst.**

§ 12. Kräftepaar. Kräftepaar (Drehpaar) nennt man ein System von zwei Kräften $P = AP$ und $P = BP$ (Fig. 24), die einander gleich und parallel, jedoch entgegengesetzt gerichtet sind. Man kann die beiden Kräfte, aus denen das Paar besteht, immer derart anbringen, dafs sie zu der Verbindungsgeraden ihrer Angriffspunkte senkrecht sind. Zu diesem Zwecke hat man $AC \perp AP$ zu machen und den Angriffspunkt der Kraft BP von B nach C zu verlegen. Die Gerade $AC = a$ heifst der Arm des Kräftepaares. Wir wollen hierbei wieder eine neue physikalische Gröfse einführen, die wir das Moment des Kräftepaares nennen, sie sei den Kräften P des Drehpaares und ihrem Arm a direkt proportional. Nimmt man als Einheit für das Moment des Kräftepaares das Moment eines beliebigen Kräftepaares an, so erhält man als Zahlenwert M des Moments $M = CPa$. Setzt man $C = 1$, d. h.

Fig. 24.



$$M = Pa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

so mufs man als absolute Einheit für das Moment eines Kräftepaares das Moment eines solchen Paares annehmen, dessen Komponenten der absoluten Krafteinheit, dessen Arm der linearen Einheit gleich sind. Die C.G.S.-Einheit für das Moment eines Kräftepaares ist das Moment eines Paares, das aus zwei um einen Centimeter voneinander entfernten Dynen besteht. Das Kräftepaar strebt danach dem Körper, auf welchen es wirkt, eine drehende Bewegung zu erteilen.

Errichtet man zur Ebene des Kräftepaares eine Senkrechte, welche gleich dem Momente desselben ist und nach der Seite geht, von der aus gesehen die durch das Kräftepaar bewirkte Drehung im Sinne der Uhrzeigerdrehung erfolgt, so heifst obige Senkrechte die Achse des Kräftepaares. Mit Hülfe dieser Achsen lassen sich zwei Kräftepaare zu einem einzigen zusammensetzen, wobei sich die Achse des resultierenden Kräftepaares als Diagonale eines Parallelogramms ergiebt, dessen Seiten die Achsen der gegebenen Kräftepaare bilden.

§ 13. Zentrifugalkraft. Bewegt sich ein Körper krummlinig, so geht von ihm eine Kraft aus, die auf denjenigen Körper, der die Abweichung von der geradlinigen Bahn bewirkt, gerichtet ist. Diese Kraft nennt man Zentrifugalkraft. Es bewege sich z. B. der Körper M (Fig. 25 a. f. S.) an einer Schnur AM befestigt gleichförmig im Kreise um den festen Endpunkt der Schnur. Damit sich nun M nicht auf einer Geraden bewege, ist eine Kraft erforderlich, die in der Richtung des Radius nach dem Zentrum A hin wirkt. Es ist dies die Kraft MB der um einen kleinen Betrag ausgereckten Schnur, welche das Bestreben hat, sich wiederum zu verkürzen. Die Gegenwirkung des Körpers M auf die Schnur AM, welche gleich der Wirkung letzterer

auf den Körper, jedoch von entgegengesetzter Richtung ist, ist die Zentrifugalkraft MC. Dieselbe wirkt somit auf die Schnur, nicht aber auf den Körper, wie bisweilen fälschlich gesagt wird. Unter Einwirkung dieser Kraft kann die Schnur zerreifsen; dann bewegt sich der Körper, indem er von A fortfliegt, in der Richtung der **Tangente** und nicht etwa in der Richtung des Radius.

Nehmen wir an, der Körper M (Fig. 26) bewege sich ohne Reibung gleichförmig längs der krummen Wandung AB. Eine solche Bewegung

Fig. 25. Fig. 26.

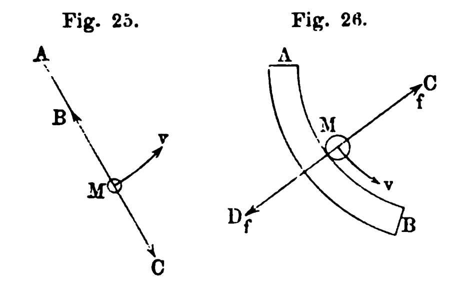
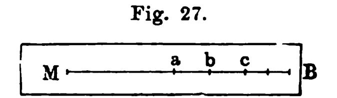


Fig. 27.



ist nur möglich, wenn eine Kraft $f = MC$ vorhanden ist, welche senkrecht zur Wandung wirkt und vom Druck der Wandung auf den Körper M herrührt. Ein dem letzteren gleicher Gegendruck MD des Körpers auf die Wand ist im gegebenen Falle die Zentrifugalkraft.

Die beiden betrachteten Beispiele beziehen sich genau genommen auf materielle Punkte, nicht auf Körper. Bei der Drehung eines physikalischen Körpers um seine Achse wirkt die Zentrifugalkraft auf alle Teilchen desselben, mit Ausnahme der Teilchen in der Oberflächenschicht. Nehmen wir an, der Körper B (Fig. 27) drehe sich um seine durch M gehende Achse. Ein beliebiges Teilchen b bewegt sich dabei im Kreise unter dem Einflusse einer Kraft, die gewissermafsen von dem Nachbarteilchen a ausgeht und es daran verhindert, sich von a zu entfernen; diese Kraft ist von b nach M gerichtet. Umgekehrt wirkt das Teilchen b auf a mit einer Kraft, die von a nach b gerichtet ist und nichts anderes darstellt als die Zentrifugalkraft selbst. Wendet man das Gesagte auf alle Teilchen an, so sieht man, dafs sie alle, mit Ausnahme der an der Oberfläche B liegenden, einer Zentrifugalkraft unterliegen. Man sieht leicht ein, dafs der Körper B um so stärker ausgereckt ist, je näher der betrachtete Ort zu M liegt.

Für die Gröfse der Zentrifugalkraft haben wir den Ausdruck

$$f = \frac{mv^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29, a)$$

vergl. Formel (25, a) auf S. 92.

§ 14. Kraftfeld. Ein **Medium** (s. S. 9), welches die Eigenschaft besitzt, dafs auf einen an einen beliebigen Ort innerhalb desselben gebrachten Körper **eine der Masse des Körpers proportio-**

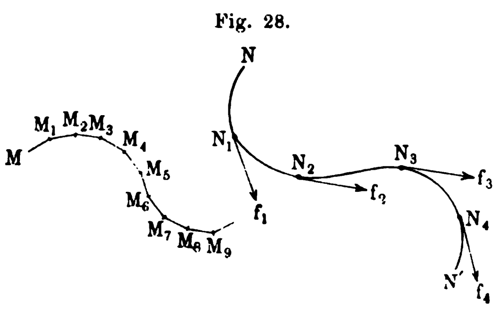
nale Kraft wirkt, nennen wir ein Kraftfeld. Der Raum, welcher den Erdball umgiebt, ist offenbar ein derartiges Kraftfeld.

Wir wollen nun eine besondere (sui generis) physikalische Gröfse einführen, die wir Intensität des Kraftfeldes im gegebenen Punkte nennen; wir setzen sie derjenigen Kraft proportional, welche auf die an diesem Punkte vorhanden gedachte Masseneinheit wirken würde. Wenn auf die Masse m im gegebenen Punkte des Feldes eine Kraft f wirkt, und wenn man als Einheit der Feldintensität die Intensität an irgend einem Orte eines beliebigen Feldes annimmt, so wird der Zahlenwert ψ der Feldintensität durch die Formel $\psi = C\frac{f}{m}$ gegeben. Setzt man $C = 1$, d. h.

$$\psi = \frac{f}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

so mufs man als absolute Einheit der Feldintensität die Intensität eines solchen Punktes gelten lassen, in welchem auf die Masseneinheit die absolute Krafteinheit wirkt. Die C. G. S.-Einheit der Feldintensität ist die Intensität in einem Punkte, wo auf die Masse eines Gramms eine Dyne wirkt. Die Feldintensität, welche an der Erdoberfläche durch die Schwerkraft hervorgerufen wird, ist gleich 981 C. G. S.-Einheiten der Feldintensität. Die Intensität ψ ist ein Vektor, er hat die Richtung der Kraft f, welche im gegebenen Punkte des Feldes auf die Masse m wirkt. Ein Kraftfeld heifst homogen, wenn die Intensität in allen Punkten desselben die gleiche Gröfse und Richtung hat. Als ein homogenes Kraftfeld kann ein kleiner Teil des Raumes, welcher den Erdball umgiebt, gelten. Stellen wir uns nunmehr irgend ein im allgemeinen inhomogenes Kraftfeld vor. Von irgend einem Punkte M (Fig. 28) des Feldes aus ziehen wir eine ganz kurze Gerade MM_1 in der Richtung der auf einen in M befindlichen materiellen Punkt wirkenden Kraft; von M_1 aus ziehen wir die Gerade M_1M_2 in der Richtung der in M_1 wirkenden Kraft, darauf M_2M_3 in der Richtung einer Kraft, die in M_2 wirkt u. s. w. So erhält man die gebrochene Linie $MM_1M_2 \ldots M_9$. Wenn man die Strecken MM_1, M_1M_2 u. s. w. unbegrenzt abnehmen läfst, so nähert sich die gebrochene Linie unbegrenzt einer gewissen Kurve, welche durch M geht. Die Richtung dieser Kurve, d. h. ihrer Tangente in jedem Kurvenpunkte, fällt

Fig. 28.



mit der Richtung der in diesem Punkte wirkenden Kraft zusammen. Eine solche Kurve heifst Kraftlinie. Die Tangenten der Kraftlinie NN' (in N_1, N_2, N_3, N_4 . . .) geben die Richtungen der wirkenden Kräfte an. Im homogenen Kraftfelde sind die Kraftlinien lauter parallele Geraden.

§ 15. **Trägheitszentrum.** Trägheitszentrum eines physikalischen Körpers nennt man den Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte, welche auf diesen Körper im homogenen Kraftfelde ψ wirken. Zerlegt man das Volumen eines Körpers in sehr kleine Teile Δv und bezeichnet man die Masse, welche einen dieser Teile erfüllt, mit Δm, so kann man sagen, dafs auf sie die Kraft $f = \psi \Delta m$ wirkt. Alle Kräfte sind hier einander parallel, und der Faktor ψ ist allen gemeinsam. Aus den Definitionen geht hervor, dafs das Trägheitszentrum nichts anderes ist als der Mittelpunkt eines Systems von parallelen Kräften f (vergl. S. 94), die auf einen im homogenen Felde befindlichen Körper wirken. Die Eigenschaften des Mittelpunktes paralleler Kräfte (vergl. § 11 auf S. 94) zeigen uns, dafs die Lage des Trägheitszentrums eines Körpers weder von der Feldintensität ψ, noch auch von der Lage des Körpers im Felde abhängt, denn man kann jede Lagenänderung des Körpers sich durch eine Richtungsänderung der auf den Körper wirkenden Kräfte ersetzt denken. Die Lage des Trägheitszentrums eines Körpers hängt nur von der Verteilung der den Körper zusammensetzenden Massenteile ab.

Auf Grund der Formeln (28) auf S. 94 können wir die Koordinaten X, Y, Z des Trägheitszentrums finden. Zerlegen wir das Volumen v des Körpers in eine sehr grofse Anzahl Teile Δv_i, welche die Massen Δm besitzen. Da P_i in (28) gleich $\psi \Delta m_i$ ist, so kann man die Brüche durch ψ kürzen; bezeichnet man die ganze Masse des Körpers mit $m = \Sigma m_i$, so kommt

$$X = \frac{\lim \Sigma x_i \Delta m_i}{m};\quad Y = \frac{\lim \Sigma y_i \Delta m_i}{m};\quad Z = \frac{\lim \Sigma z_i \Delta m_i}{m} \quad . \; . \quad (31)$$

Für einen homogenen Körper, dessen Dichte k ist, haben wir $\Delta m_i = k \Delta v_i$ und $m = kv$; setzt man dies ein, so fällt der Faktor k fort und man erhält

$$X = \frac{\lim \Sigma x_i \Delta v_i}{v};\quad Y = \frac{\lim \Sigma y_i \Delta v_i}{v};\quad Z = \frac{\lim \Sigma z_i \Delta v_i}{v} \quad . \; . \quad (32)$$

Die Lage des Trägheitszentrums eines homogenen Körpers hängt von seiner Dichte nicht ab.

Das Trägheitszentrum eines Körpers kann gefunden werden, wenn die Lagen der Trägheitszentren von zwei, drei oder mehr Teilen, in welche man sich den Körper zerlegt denken kann, bekannt sind. Zu diesem Zwecke mufs man an die Trägheitszentren der Teile Kräfte

angreifen lassen, die parallel und den Massen der Teile proportional sind und schliefslich den Angriffspunkt der Resultante aller so erhaltenen Kräfte suchen.

§ 16. Trägheitsmoment. Trägheitsmoment eines materiellen Teilchens in Bezug auf eine gegebene Achse nennt man eine Gröfse besonderer Art, die wir als proportional der Masse $\varDelta m$ dieses Teilchens und dem Quadrate der Entfernung r des Teilchens von der Achse definieren. Setzt man den Proportionalitätsfaktor gleich Eins, so erhält man für den Zahlenwert K des Trägheitsmomentes den Ausdruck $K = r^2 \varDelta m$. Das Trägheitsmoment eines Punktsystems wird gleich der Summe der Trägheitsmomente dieser Punkte gesetzt, d. h. $K = \Sigma r^2 \varDelta m$. Das Trägheitsmoment eines physikalischen Körpers wird folgendermafsen erhalten: Zerlegen wir den Körper in eine sehr grofse Anzahl kleiner Teile; sei $\varDelta m$ die Masse, r der Achsenabstand irgend eines geometrischen Punktes eines der Teile. Bilden wir ferner die Summe der Gröfsen $r^2 \varDelta m$. Der Grenzwert, welchem diese Summe bei unbegrenzter Zunahme der Anzahl der Teile zustrebt, heifst dann das Trägheitsmoment K des physikalischen Körpers. Sonach ist

$$K = lim\, \Sigma r^2 \varDelta m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

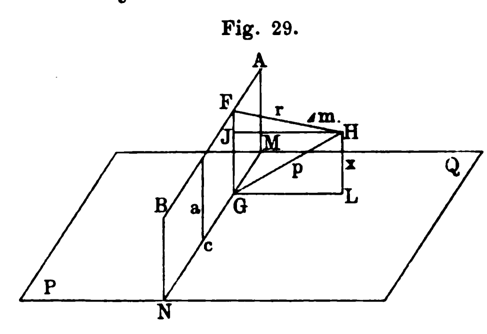
Die absolute Einheit des Trägheitsmomentes als Trägheitsmoment der Masseneinheit, welche um die Einheit der Entfernung von der Achse absteht, zu definiren, wäre mifslich, da man sich die Masseneinheit nicht um einen geometrischen Punkt konzentriert denken kann. Wir sagen deshalb, dafs ein Körper, für den Formel (33) den Wert $K = 1$ ergiebt, wobei $\varDelta m$ und r in den Grundeinheiten der Masse und Länge ausgedrückt sein müssen, die absolute Einheit des Trägheitsmomentes besitze. Angenähert ist die Einheit des Trägheitsmomentes gleich demjenigen der Masseneinheit, welche in dünner Schicht auf der Oberfläche eines Kreiscylinders verteilt ist, wobei der Grundflächenradius gleich der Längeneinheit und das Moment auf die Cylinderachse bezogen ist.

Die C. G. S.-Einheit des Trägheitsmomentes wird dargestellt durch die Masse von einem Gramm, welche auf einer Cylinderfläche im Abstande eines Centimeters von der Achse verteilt ist. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen: Das Trägheitsmoment K eines Körpers mit der Masse m, bezogen auf eine Achse, die sich in der Entfernung a vom Trägheitszentrum des Körpers befindet, ist gleich dem Trägheitsmoment K_0 bezogen auf eine Achse, die durch das Trägheitszentrum geht und der ersten parallel ist, plus einer Gröfse ma^2, d. h. addiert mit dem auf die erste Achse bezogenen Trägheitsmoment, welches erhalten würde, wenn die ganze Masse m des Körpers im Trägheitszentrum vereint wäre. Also

$$K = K_0 + ma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Beweis: Es sei AB (Fig. 29) diejenige Achse, in Bezug auf welche wir das Trägheitsmoment K suchen; die andere Achse ist $MN \parallel AB$; die Entfernung der Achsen ist $NB = a$. Legen wir durch MN die Ebene PQ senkrecht zu NB und nehmen sie als Koordinatenebene der yz an. Das Teilchen $\varDelta m$ befindet sich in den Entfernungen $HF = r$, $HG = p$ und $HL = x$ von den Achsen AB, MN und der Ebene PQ. Wir haben $K = \lim \Sigma r^2 \varDelta m$ und $K_0 = \lim \Sigma p^2 \varDelta m$. Aus der Figur ist ersichtlich, dafs $r^2 = p^2 + a^2 - 2ax$ ist, denn es ist $JG = HL$, wenn $HJ \perp FG$ ist. Multipliziert man mit $\varDelta m$ und nimmt den Grenzwert der Summe, so erhält man

Fig. 29.



$$\lim \Sigma r^2 \varDelta m = \lim \Sigma p^2 \varDelta m + \lim \Sigma a^2 \varDelta m - \lim \Sigma 2ax \varDelta m.$$

Die erste Summe ist K, die zweite K_0; in der dritten kann man a^2 vor das Summenzeichen und $\lim \Sigma \varDelta m = m$ setzen; im vierten Gliede setzt man $2a$ vor das Summenzeichen. Dann kommt

$$K = K_0 + ma^2 - 2a \lim \Sigma x \varDelta m.$$

Formel (31) zeigt, dafs $\lim \Sigma x \varDelta m = mX$ ist, wo X der Wert der x-Koordinate des Trägheitszentrums ist. Das Trägheitszentrum C liegt aber in der xy-Ebene der Koordinaten, folglich ist $X = 0$, und daher erhält man Formel (34), was zu beweisen war. Diese Formel gestattet, das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Achse zu bestimmen, wenn das Trägheitsmoment bezüglich einer ihr parallelen durchs Trägheitszentrum gehenden Achse bekannt ist. Aus Formel (34) folgt weiter, dass das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich aller Seitenlinien eines Cylinders, dessen Achse durchs Trägheitszentrum geht, ein und denselben Wert hat. Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Körpers nach Formel (33) mufs man sich der Methoden der Integralrechnung bedienen, deshalb müssen diejenigen Leser, welche dieselbe noch nicht kennen, die Endresultate der weiteren Rechnungen vorläufig auf Treu und Glauben hinnehmen.

Das Trägheitsmoment wird durch ein dreifaches Integral über das ganze Körpervolumen ausgedrückt. Sei dv das Differential des Volumens, dm das Differential der Masse und k die Dichte, so hat man im allgemeinen $dm = k dv$ und erhält daher für das Trägheitsmoment

$$K = \iiint r^2 k \, dv \quad \cdots\cdots \quad (35)$$

I. **Das Trägheitsmoment eines hohlen homogenen Kreiscylinders in Bezug auf seine geometrische Achse.** Es sei l die Länge des Cylinders, R_1 sein innerer, R_2 sein äufserer Radius; die Dichte k sei eine konstante Gröfse. Wir führen cylindrische Koordinaten ein: x sei die Entfernung des Punktes von der Ebene einer der Grundflächen des Cylinders, r der Abstand des Punktes von der Achse und φ der Winkel zwischen r und einem gewissen Anfangsradius r_0. Das Element des Volumens ist $dv = r\,dx\,dr\,d\varphi$ und daher

$$K = k \int_{x=0}^{l} \int_{r}^{R_2} \int_{R_1\ \varphi=0}^{2\pi} r^3\,dx\,dr\,d\varphi = 2\pi k l \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$

oder

$$K = \frac{1}{2}\,\pi k l\,(R_2^4 - R_1^4).$$

Die Masse m des Hohlcylinders ist gleich $\pi k l\,(R_2^2 - R_1^2)$; folglich ist

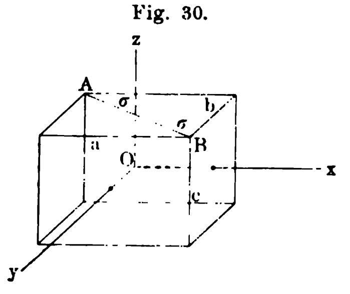
$$K = m\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Für einen **massiven** Cylinder, dessen Grundflächenradius gleich R ist, haben wir aus (36), wenn $R_2 = R$ und $R_1 = 0$ gesetzt wird

$$K = \frac{1}{2}\,mR^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Wenn l klein ist, so verwandelt sich der Hohlcylinder in einen **Ring mit rechteckigem Durchschnitt** und der massive in eine **runde Platte**. Auf sie beziehen sich die Formeln (36) und (37). Formel (37) zeigt, dafs die C. G. S.-Einheit des Trägheitsmomentes z. B. gleich dem Trägheitsmoment eines Cylinders in Bezug auf seine Achse ist, dessen Masse zwei Gramm beträgt und dessen Grundflächenradius gleich einem Centimeter ist.

Fig. 30.



II. **Das Trägheitsmoment eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedons** in Bezug auf eine Achse, welche durch seinen geometrischen Mittelpunkt geht und einer der Kanten (c) parallel ist. Es seien a, b, c die Kanten eines Parallelepipedons (Fig. 30); ziehen wir die Koordinatenachsen mit dem Anfangspunkt im Zentrum O des Parallelepipedons parallel den Kanten und suchen wir nun die Gröfse K in Bezug auf die Achse Oz. Das Volumenelement $dv = dx\,dy\,dz$ hat die Koordinaten x, y, z und befindet sich von Oz in einer Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Folglich ist

$$K = k \int\limits_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int\limits_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Integriert man nach z, so kommt

$$K = kc \left\{ \int\limits_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int\limits_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy + \int\limits_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int\limits_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \right\} = \frac{k\,abc}{12} (a^2 + b^2).$$

Es ist aber die Masse unseres Körpers gleich $k\,abc$, folglich ist

$$K = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} m \sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wo σ (vergl. Fig. 30) die Hälfte der Diagonale, d. h. der Achsenabstand des von der Achse entferntesten Körperpunktes ist.

III. Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel in Bezug auf eine durch ihr Zentrum gehende Achse. Es sei R der Kugelradius. Verlegen wir den Anfangspunkt der Koordinatenachsen ins Kugelzentrum und bezeichnen wir mit K_x, K_y und K_z die Trägheitsmomente der Kugel in Bezug auf die Koordinatenachsen. Infolge der Symmetrie der Kugel ist klar, dafs im allgemeinen $K = K_x = K_y = K_z$ ist. Offenbar ist

$$K_x = \lim \Sigma \Delta m\, (y^2 + z^2);$$
$$K_y = \lim \Sigma \Delta m\, (x^2 + z^2);$$
$$K_z = \lim \Sigma \Delta m\, (x^2 + y^2);$$

oder

$$K_x = \int\!\!\int\!\!\int (y^2 + z^2)\, dm;$$
$$K_y = \int\!\!\int\!\!\int (x^2 + y^2)\, dm;$$
$$= \int\!\!\int\!\!\int (x^2 + y^2)\, dm.$$

Summiert man diese drei Gröfsen und beachtet die vorhergehenden Gleichheiten, so erhält man

$$3\,K = 2 \lim \Sigma \Delta m\, (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \lim \Sigma\, \varrho^2 \Delta m$$

oder

$$3\,K = 2 \int\!\!\int\!\!\int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = 2 \int\!\!\int\!\!\int \varrho^2\, dm,$$

wo ϱ der Abstand eines Punktes vom Kugelzentrum ist. Zerlegt man die Kugel in unendlich dünne Schichten mit dem Radius ϱ und der

Dicke $d\varrho$ und nimmt man $dm = 4\pi\varrho^2 k\, d\varrho$, so kommt

$$K = \frac{8\pi}{3} k \int_0^R \varrho^4 d\varrho = \frac{8\pi k R^5}{15}$$

Die Gesamtmasse m der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi k R^3$, folglich ist

$$K = \frac{2}{5} m R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Drittes Kapitel.

Arbeit und Energie.

§ 1. Die Wucht oder lebendige Kraft. Wir wollen uns nunmehr mit einer weiteren selbständigen physikalischen Gröſse bekannt machen. Nehmen wir an, ein Körper mit der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit v. Unter der Wucht dieser Bewegung verstehen wir dann eine Gröſse, welche der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Nimmt man die Wucht der Bewegung irgend eines in Bewegung befindlichen Körpers als Einheit an, so erhält man für den Zahlenwert J der Wucht die allgemeine Formel $J = Cmv^2$. Aus gewissen Gründen, die aus dem Weiteren ersichtlich sein werden, setzen wir $C = \frac{1}{2}$, d. h. wir setzen

$$J = \frac{1}{2} m v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die absolute Einheit der Wucht ist die Wucht eines Körpers, dessen Masse $m = 2$ ist und der sich mit der Einheit der Geschwindigkeit bewegt. Die C. G. S.-Einheit der Wucht ist die Wucht einer Masse von 2 g, welche sich mit einer Geschwindigkeit gleich der C. G. S.-Einheit der Geschwindigkeit (1 cm pro Sekunde) bewegt.

Besitzen die Teilchen, aus denen der physikalische Körper besteht, verschiedene Geschwindigkeiten, so wird seine Wucht durch die Formel

$$J = lim \sum \frac{1}{2} \Delta m \,.\, v^2 = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gegeben, wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Masse Δm ist. Die Wucht eines rotierenden Körpers wird aus der allgemeinen Formel (2) durch Substitution von $r\omega$ an Stelle von v erhalten (nach Formel (42) auf Seite 72), wo ω die Winkelgeschwindigkeit im ge-

gebenen Augenblick und r die Entfernung des Teilchens von der Drehungsachse ist. Man erhält danach $J = lim \sum \frac{1}{2} \Delta m \, . \, r^2 \Theta^2$. Den Faktor $\frac{1}{2} \Theta^2$ kann man, als allen Teilchen gemeinsam, vor das Summenzeichen setzen: $J = \frac{1}{2} \Theta^2 lim \sum r^2 \Delta m = \frac{1}{2} \Theta^2 \int r^2 dm$.

Der Grenzwert dieser Summe ist nichts anderes als das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf seine Rotationsachse (vergl. (33) auf Seite 99); somit ist

$$J = \frac{1}{2} K \Theta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Wucht eines sich drehenden Körpers ist numerisch gleich dem halben Produkte aus dem Quadrate seiner Winkelgeschwindigkeit und seinem auf die Drehungsachse bezogenen Trägheitsmomente. Setzt man in (3) anstatt K einen der Ausdrücke (36), (37), (38) und (39) (vergl. die vorhergehenden Seiten), so erhält man die Wucht eines homogenen Hohlcylinders oder Ringes mit rechtwinkligem Durchschnitt, eines massiven Cylinders oder einer runden Platte, eines Parallelepipedons und einer Kugel, die um Achsen rotieren, für welche bereits Ausdrücke des Trägheitsmomentes abgeleitet worden sind. Formel (34) gestattet uns die Wucht dieser Körper bei ihrer Rotation um Achsen, die den oben bezeichneten parallel sind, zu bestimmen.

§ 2. **Arbeit.** Wenn eine Kraft auf einen sich aus irgend welchem Grunde bewegenden Körper so wirkt, dafs sich der Angriffspunkt der Kraft verschiebt, so übt diese Kraft im allgemeinen einen gewissen Einflufs auf die Bewegung aus oder sie leistet, wie man sagt, eine Arbeit. Eine Kraft leistet stets Arbeit, wenn sich ihr Angriffspunkt verschiebt, es sei denn, dafs die Bewegung senkrecht zur Richtung der Kraft erfolgt. Betrachten wir zunächst zwei Sonderfälle der Einwirkung einer Kraft auf einen sich bewegenden Körper; von ihnen können wir leicht zum allgemeineren Falle übergehen.

I. Der erste Fall tritt ein, wenn aufser der Kraft f eine ihr der Gröfse nach gleiche, jedoch der Richtung nach entgegengesetzte Kraft f' vorhanden ist, und wenn der Körper infolge eines Anfangsstofses oder aus einem anderen Grunde sich mit einer gewissen Geschwindigkeit v in der Richtung der Kraft f bewegt. Die Kraft f' nennen wir Widerstand; es ist bemerkenswert, dafs sie bisweilen nur während der Bewegung selbst auftritt (Reibung, Widerstand des Mediums). Wäre die Kraft f nicht da, so wäre die Bewegung des Körpers eine verzögerte, seine Geschwindigkeit würde abnehmen. Der Ein-

flufs der Kraft f besteht in diesem Falle darin, dafs sie die verzögernde Wirkung des Widerstandes f' aufhebt und die Geschwindigkeit v unverändert erhält. Nehmen wir an, der Körper habe den Weg s in der Richtung der Kraft f, welche auf diesem Wege die Wirkung des Widerstandes f' überwunden hat, durchlaufen. Die Arbeit R der Kraft f mufs als Mafs der Einwirkung dieser Kraft auf die Bewegung des Körpers dienen; wir setzen daher diese Arbeit R natürlicherweise dem Widerstande f' und dem Wege s proportional. Somit ist $R = Cf's$, wo C der Proportionalitätsfaktor ist. Der Gröfse nach aber ist $f' = f$ und daher $R = Cfs$. Setzt man $C = 1$, so kommt

$$R = fs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die absolute Einheit der Arbeit ist die Arbeit der Krafteinheit, welche auf einem Wege von der Einheit der Länge gewirkt hat, d. h. bei der sich der Angriffspunkt der Kraft in der Richtung der Kraft um die Längeneinheit verschoben hat. Die C. G. S.-Einheit der Arbeit ist die Arbeit einer Dyne auf einem Wege von 1 cm Länge, sie heifst Centimeterdyne oder Erg. Eine Million Erg heifst Megaerg. Zehn Megaerg oder 10^7 Erg heifsen Joule.

Den hier betrachteten Fall von Arbeit haben wir vor uns, wenn wir an der Erdoberfläche einen Körper vom Gewichte p in vertikaler Richtung auf die Höhe h heben, unter der Bedingung, dafs er weder eine positive noch auch negative Beschleunigung erfahre. Die Arbeit ist

$$R = ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4, a)$$

Wenn das Gewicht (der Widerstand, welcher gleich der hebenden Kraft ist) in Kilogrammen und die Höhe in Metern ausgedrückt ist, so wird in (4, a) als Arbeitseinheit die zum Heben von einem Kilogramm auf ein Meter Höhe ohne gleichzeitige Änderung der Anfangsgeschwindigkeit erforderliche Arbeit angenommen; diese Arbeitseinheit heifst Meterkilogramm. In ähnlicher Weise erhält man die Arbeitseinheiten Fufspfund, Centimetergramm u. s. w., deren Bedeutung sich aus der Benennung leicht ergiebt. Wir sahen auf Seite 90, dafs eine Dyne = 1,02 Milligramm ist. Hieraus folgt, dafs ein Megaerg = 10^6 Erg = 10^6 . 1,02 Centimetermilligramm = 1,02 Centimeterkilogramm = 0,0102 Meterkilogramm ist. Somit haben wir

1 Joule = 10 Megaerg = 10^7 Erg = 0,102 Meterkilogramm
1 „ = 10^6 „ = 0,0102 „

II. Den zweiten Fall von Arbeit haben wir vor uns, wenn die Kraft f auf einen Körper wirkt, der bei seiner Bewegung von der Aufsenwelt keinerlei Widerstand erfährt. Nehmen wir an, dafs die Kraft f auch hier die Bewegungsrichtung hat, so müssen wir sagen,

dafs als **Resultat der Kraftwirkung eine algebraische Geschwindigkeitszunahme, d. h. eine Beschleunigung auftritt.** Das Beharrungsvermögen des Körpers, d. h. sein passives Aufrechterhalten der Geschwindigkeit, spielt hier die Rolle desjenigen Widerstandes, welcher von der aktiven bewegenden Kraft überwunden wird; dieser Widerstand gegen die wirkende Kraft f geht indes nicht von der Aufsenwelt, sondern von dem sich bewegenden Körper selbst aus. Unter der Arbeit der Kraft f werden wir auch hier eine Gröfse verstehen, deren Zahlenwert gegeben wird durch Formel (4), d. h. durch das Produkt aus der Kraft f und dem Wege s, welcher vom Körper in der Kraftrichtung durchlaufen ist.

Somit mufs man zwei Fälle der Hervorbringung von Arbeit unterscheiden: Beim ersten besteht das Wesen der Arbeit in der Überwindung eines äufseren Bewegungswiderstandes, welche ohne Steigerung der Geschwindigkeit des Körpers erfolgt; im zweiten Falle tritt die Wirkung der Arbeit in einer Steigerung der Geschwindigkeit hervor, der gegenüber sich die Aufsenwelt indifferent verhält. In Wirklichkeit haben wir gewöhnlich eine **Kombination beider Fälle** vor uns: die Kraft f überwindet irgend welche Widerstände und ändert gleichzeitig die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers.

Es sei nun f' nicht gleich f, sondern $f' < f$; in diesem Falle wirkt auf den Körper die Kraft $f - f'$, deren Arbeit ϱ eine Geschwindigkeitszunahme des Körpers hervorruft. Wir haben $\varrho = (f - f')s$ und hieraus

$$fs = f's + \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Arbeit $r = fs$ besteht aus zwei Teilen: $f's$ wird zur Überwindung des äufseren Widerstandes, ϱ zur Steigerung der Geschwindigkeit des Körpers verbraucht.

Der zweite von den eben betrachteten Sonderfällen ist an der Erdoberfläche nicht realisierbar, denn es tritt bei jeder Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche ein Bewegungswiderstand auf, der von den benachbarten Körpern ausgeht, so z. B. der Luftwiderstand, die Reibung an der Oberfläche der Räderachsen u. s. w. Hieraus folgt, dafs **an der Erdoberfläche bei jeder Einwirkung einer Kraft auf einen Körper ein Teil der Arbeit zur Überwindung äufserer Widerstände verbraucht wird** (oder wie man sagt, **verloren geht, verschwindet**). Die Entstehung der Ausdrücke: die Arbeit wird verbraucht, geht verloren, verschwindet u. s. w., wird später klar werden.

Unvermeidliche Widerstände nennt man **schädliche,** im Gegensatz zu solchen Widerständen, zu deren Überwindung wir uns bisweilen einer uns zur Verfügung stehenden Kraft bedienen, indem wir von letzterer zum Beispiel eine Säge, eine zur Bearbeitung von Holz,

Metallen u. s. w. dienende Drehbank in gleichförmige Bewegung versetzen lassen.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dafs die Kraft in der Richtung der Verschiebung s wirke. Betrachten wir nunmehr den allgemeinen Fall, wo die Richtung der Kraft f und diejenige der Verrückung s einen gewissen Winkel $(f, s) = \alpha$ einschliefsen. Ist $\alpha = 90^0$, so ist die Arbeit der Kraft f gleich Null, denn diese Kraft kann weder eine Geschwindigkeitsänderung nach einer Richtung hervorrufen, noch auch Widerstände überwinden, welche eine der Bewegungsrichtung des Körpers entgegengesetzte Richtung haben. Für einen beliebigen Winkel α wird als Zahlenwert der Arbeit R die Gröfse

$$R = fs \cos \alpha = fs \cos (f, s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

angenommen, welche bei $\alpha = 0$ die Formel (4) und bei $\alpha = 90^0$ den Ausdruck $R = 0$ ergiebt. Bezeichnet man mit f_1 die tangentiale Komponente der Kraft f, so hat man $f_1 = f \cos \alpha$; ferner sei $s_1 = s \cos \alpha$ gesetzt. Die Kraft f_1 ist die Projektion der wirkenden Kraft f auf die Verschiebungsrichtung s; s_1 dagegen ist die Projektion der Verschiebung s auf die Richtung der Kraft f. Wir haben

$$R = fs \cos \alpha = f_1 s = f s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6, a)$$

Im allgemeinen ändern sich die Gröfsen der Kraft f und des Winkels α ununterbrochen. Zerlegen wir den Weg s in sehr kleine Abschnitte Δs; dann ist die Arbeit, die einer solchen kleinen Verschiebung Δs entspricht, das sogenannte „Arbeitselement“

$$\Delta R = f \Delta s \cos (f. \Delta s).$$

Die ganze von der variablen Kraft f bei der krummlinigen Bewegung des Körpers geleistete Arbeit wird ausgedrückt durch die Formel

$$R = \lim \Sigma f \Delta s \cos (f, \Delta s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

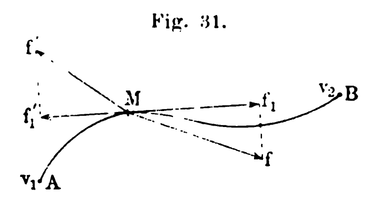
oder

$$R = \lim \Sigma f_1 \Delta s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7, a)$$

wo f_1 die tangentiale Komponente der wirkenden Kraft ist.

Nunmehr können wir dazu übergehen, die Arbeit im allgemeinsten Falle zu betrachten, wo die Kraft f und der Widerstand f' beliebige variable Winkel mit der Bewegungsrichtung des Punktes M (Fig. 31), welcher sich auf einer gewissen Kurve AB bewegt, bilden. Bezeichnen wir die tangentialen Komponenten der Kräfte f und f' mit f_1 und f_1', so erhalten wir für das Arbeitselement einen Ausdruck ähn-

Fig. 31.



lich Formel (5), nämlich

$$f_1 \Delta s = f_1' \Delta s + \Delta \varrho,$$

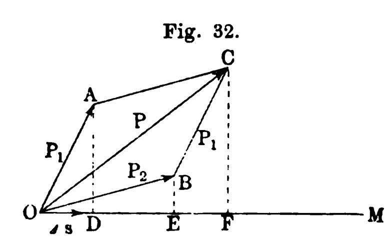
wo $\Delta \varrho$ derjenige Teil des Arbeitselementes ist, welcher zur Vergröfserung der Geschwindigkeit des Körpers verbraucht wird. Für die Gesamtarbeit haben wir

$$R = lim\, \Sigma f_1 \Delta s = lim\, \Sigma f_1' \Delta s + \varrho \quad . \quad . \quad . \quad (7, \text{b})$$

$$R = \int f_1 ds = \int f_1' ds + \varrho,$$

wo ϱ die ganze zur Geschwindigkeitsvergröfserung verbrauchte Arbeit ist. Wir wollen nun folgenden überaus wichtigen Lehrsatz beweisen: Wenn mehrere Kräfte einen gemeinsamen sich verschiebenden Angriffspunkt haben, so ist die Arbeit der Resultante gleich der algebraischen Summe der von den Komponenten geleisteten Arbeiten. Beweisen wir diesen Satz für zwei wirkende Kräfte $P_1 = OA$ und $P_2 = OB$ (Fig. 32), deren Resultante $P = OC$ ist. Nehmen wir an, der Punkt O habe sich um die sehr kleine Wegstrecke Δs in der Richtung von OM verschoben. Fällt man von den Punkten A, B und C aus die Senkrechten auf OM, so hat man $OF = OE + EF$; es ist aber $EF = OD$, folglich ist $OF = OD + OE$ oder $P cos (P, \Delta s) = P_1 cos (P_1, \Delta s) + P_2 cos (P_2, \Delta s)$. Multipliziert man diese Gleichung mit Δs, so kommt

Fig. 32.



$$P \Delta s\, cos (P, \Delta s) = P_1 \Delta s\, cos (P_1, \Delta s) + P_2 \Delta s\, cos (P_2, \Delta s),$$

welche Gleichung unseren Satz für zwei Kräfte ausdrückt. Von zwei Kräften ist es leicht zu drei und mehr Kräften überzugehen und den Satz für den allgemeinsten Fall zu beweisen.

Formel (6) giebt für die Arbeit R einen positiven Zahlenwert, wenn α ein spitzer Winkel ist. Ist α ein stumpfer Winkel (Fig. 33), so ist die Arbeit R negativ, wobei wieder zwei Fälle möglich sind:

Fig. 33.

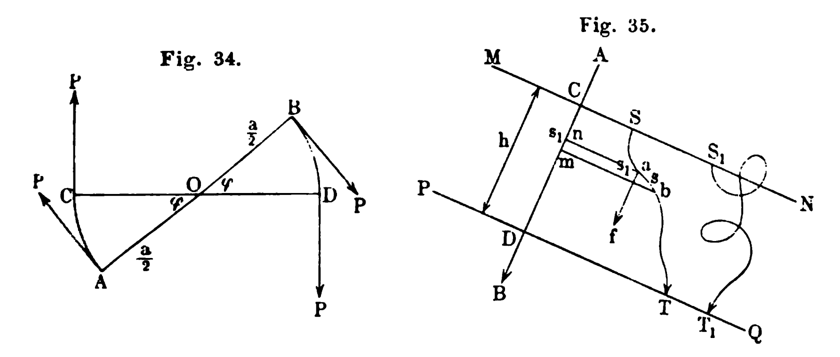
1. Es ist eine andere Kraft f' vorhanden, welche mit Δs einen spitzen Winkel bildet, wobei die Projektionen f_1' und f_1 beider Kräfte auf die Bewegungsrichtung einander gleich sind; der Körper, dem von einer Nebenkraft eine gewisse Geschwindigkeit erteilt ist, bewegt sich gleichförmig. Alsdann spielt unsere Kraft die Rolle eines Widerstandes, dessen Arbeit negativ und numerisch gleich der Arbeit der anderen wirkenden Kraft ist. Als Resultat dieser Arbeit ergiebt sich die Aufhebung der be-

schleunigenden Wirkung der Kraft f_1', das Aufrechterhalten einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit der Bewegung.

2. Die Kraft f (Fig. 33) wirkt auf den sich bewegenden Körper, der keinen Nebeneinflüssen unterworfen ist. In diesem Falle erscheint als Resultat der negativen Arbeit dieser Kraft eine Verzögerung der Bewegung, d. h. eine Geschwindigkeitsabnahme. Im allgemeinen Falle, wenn die Projektion der Kraft f auf die Bewegungsrichtung gröfser ist als die Projektion der Kraft f', bringt der Überschufs der von Kraft f geleisteten Arbeit über die Arbeit der Kraft f' eine Verlangsamung der Bewegung hervor.

Wir wollen die Gröfse der Arbeit für einige Sonderfälle bestimmen.

I. Die Arbeit eines Kräftepaares. Nehmen wir an, auf einen Körper wirke ein Kräftepaar $PA\ BP$ (Fig. 34), dessen Moment $M = Pa$ sei, wo $a = AB$ ist [vergl. (29) auf Seite 95] und nehmen wir ferner an, der Körper habe sich um den Winkel φ um den Punkt O



gedreht. Da beide Kräfte P bei dieser Drehung beständig die Bewegungsrichtung der Punkte A und B haben, so ist klar, dafs die gesuchte Arbeit $R = P \times AC + P \times BD = 2P \times AC$ ist. Es ist aber $\smile AC = \frac{a}{2}\varphi$, folglich $R = Pa\varphi$, oder

$$R = M\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

d. h. die Arbeit eines Kräftepaares ist gleich dem Produkte aus dem Kräftepaarmoment und dem Drehungswinkel.

II. Die Arbeit bei Bewegung eines Körpers im homogenen Kraftfelde. Es sei AB (Fig. 35) die Richtung der Kraftlinien im vorliegenden homogenen Kraftfelde und es bewege sich ein Körper auf einer beliebigen Bahnlinie vom Punkte S nach T. Ziehen wir durch S und T zwei Ebenen MN und PQ senkrecht zur Kraftrichtung. Diese Ebenen werden die Gerade AB in den Punkten C und D schneiden; es sei nun $CD = h$, und f die Kraft, welche auf den Körper im vorliegenden homogenen Felde wirkt. Zerlegen wir

den Weg in kleine Strecken; eine derselben (ab) bezeichnen wir mit s, ihre Projektion auf die Kraftrichtung mit $s_1 = mn$, wo an und bm senkrecht zu AB sind. Die gesuchte Arbeit ist $R = \lim \Sigma fs \cos(f, s)$ $= \lim \Sigma fs_1$. Im homogenen Felde ist die Kraft f konstant, und kann man daher den Faktor f vor das Summenzeichen setzen. Man erhält dann $R = f \lim \Sigma s_1$; jedoch die letztere Summe ist offenbar $CD = h$, also

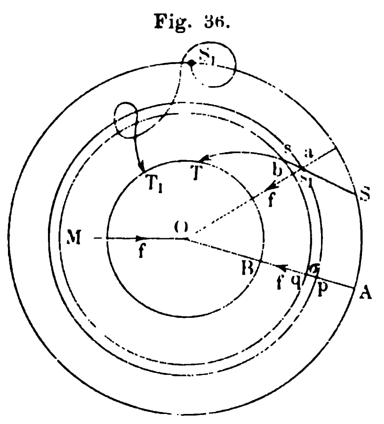
$$R = fh.$$

Diese Formel zeigt uns, dafs die Arbeit, welche bei Bewegung eines gegebenen Körpers im homogenen Kraftfelde von den in diesem Felde wirkenden Kräften geleistet wird, weder von der Form des Weges noch von der Lage des Anfangs- und Endpunktes dieses Weges auf Ebenen, welche zur Richtung der Kraftlinien senkrecht stehen, abhängt, sondern nur von dem Abstande dieser Ebenen untereinander. Es ist leicht einzusehen, dafs man dieselbe Arbeit erhielte, wenn unser Körper von MN zu PQ auf der Kurve $S_1 T_1$ hingelangte.

Wenn Anfangs- und Endpunkt des Weges auf ein und derselben zur Richtung der Kraftlinien senkrechten Ebene liegen, so ist die Arbeit gleich Null.

III. Die Arbeit von Zentralkräften. Kräfte, welche von jedem beliebigen Raumpunkte M aus stets nach demselben Punkte O (Fig. 36) hin wirken und nur von der Entfernung des Punktes M von O abhängen, heifsen Zentralkräfte. Nehmen wir zunächst an, ein Körper bewege sich auf einer durch O gehenden Geraden von A nach B. Zerlegt man den ganzen Weg in lauter Elemente $\sigma = pq$, so erhält man für die gesuchte Arbeit

Fig. 36.



$$R = \lim \sum_A^B f\sigma,$$

denn die Kraft f hat in jedem Punkte p die Richtung der Verschiebung σ. Die Buchstaben A und B bezeichnen symbolisch die Grenzen, innerhalb derer sich die kleinen Wegstrecken σ befinden.

Es seien durch A und B Kugelflächen mit dem Zentrum in O gelegt und werde angenommen, dafs sich der Körper auf einer beliebigen Kurve von S nach T bewegt, wobei S und T auf den soeben erwähnten Kugelflächen liegen. Legt man dann durch die Endpunkte p und q

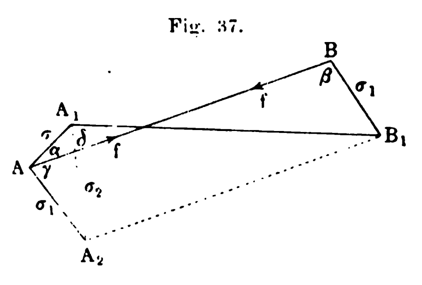
des Wegelements σ Kugelflächen, deren Zentrum in O liegt, so schneiden dieselben aus der Wegkurve ST den kleinen Abschnitt $ab = s$ heraus. Bemerkt sei noch, dafs die Kraft f der Voraussetzung nach in a und p dieselbe Gröfse hat. Die Arbeit ist $R_1 = lim\, \Sigma f s \cos(f, s)$; bei sehr kleinem s kann man $s \cos(f, s) = s_1 = \sigma$ setzen, folglich ist

$$R_1 = lim \sum_A^B f\sigma = R.$$

Somit hängt bei der Wirkung von Zentralkräften die Arbeit nur von den beiden konzentrischen Kugelflächen (deren Zentrum mit demjenigen der Kräfte zusammenfällt) ab, auf denen der Anfangs- und Endpunkt des Weges liegen; sie hängt nicht ab von der besonderen Lage dieser Punkte auf den Kugelflächen, noch auch von der Form der Bahnlinie. Dieselbe Arbeit würde auch geleistet, wenn die Bewegung auf der Kurve $S_1 T_1$ erfolgte.

IV. Arbeit innerer Kräfte. Kräfte, mit denen die materiellen, ein Punktsystem bildenden Punkte aufeinander wirken, heifsen innere Kräfte. Nehmen wir an, es seien dies Zentralkräfte. Wir können beweisen, dafs die Arbeit der inneren Kräfte gleich Null ist, wenn sich die gegenseitige Lage der Punkte nicht ändert, d. h. wenn sich das System als Ganzes bewegt. Betrachten wir zwei Punkte A und B (Fig. 37), die, ohne dafs sich ihre Entfernung geändert, nach A_1 und B_1 gelangt sind. Ihre Wechselwirkung wird durch zwei Kräfte f und f_1 ausgedrückt, die nach dem dritten Bewegungsgesetze einander gleich sind, $f = f_1$. Es mögen die Verschiebungen $AA_1 = \sigma$ und $BB_1 = \sigma_1$ unendlich klein sein. Die Arbeit ist $R = f\sigma \cos\alpha + f_1 \sigma_1 \cos\beta$. Wir ziehen nun

Fig. 37.



$AA_2 \parallel BB_1$ und $B_1A_2 \parallel BA$ und verbinden A_2 mit A_1. Dann ist $AA_2 = BB_1 = \sigma_1$; ferner sei $A_1A_2 = \sigma_2$. Offenbar ist $\sigma \cos\alpha = \sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta$, also haben wir, da $f = f_1$ ist, $R = f\,[\sigma_1 \cos\gamma + \sigma_2 \cos\delta + \sigma_1 \cos\beta]$. Nun ist aber $\cos\beta = -\cos\gamma$ und nähert sich $\angle\,\delta = \angle\,A_1A_2B_1$ im Grenzfalle einem Rechten, denn es ist $A_1B_1 = A_2B_1$; für unendlich kleine Verschiebungen hat man $\cos\delta = 0$ zu setzen, so dafs $R = 0$ wird. Bezieht man dieselbe Herleitung auf alle Punktpaare, so sieht man, dafs die Arbeit aller inneren Kräfte gleich Null ist, sobald sich das System als ein Ganzes bewegt.

Beweisen wir nunmehr folgenden zweiten Satz: Die Arbeit, welche von inneren Kräften beim Übergange aus einer Anordnung

der Teilchen in eine andere geleistet wird, hängt nicht davon ab, auf welche Weise sich dieser Übergang vollzogen hat, d. h. auf welchen Wegen jeder der Punkte aus seiner Anfangslage in die Endlage gelangt ist. Betrachten wir zwei Punkte A und B (Fig. 38), die nach A_1 und B_1 gelangt sind; es sei $AB = \varrho$, $A_1B_1 = \varrho_1$. Verleihen wir den beiden zusammengehörig gedachten Punkten eine Bewegung, die in jedem gegebenen Augenblick der Bewegung des Punktes B an Gröfse gleich, jedoch der Richtung nach entgegengesetzt ist. Bei dieser hinzugedachten Bewegung wird die Arbeit der inneren Kräfte auf Grund des eben bewiesenen Satzes gleich Null. Der Punkt B bleibt hierbei in Ruhe, während Punkt A nach A', wo $BA' \parallel$ und $= B_1A_1$ ist, gelangt. Die Arbeit der auf A wirkenden Kraft hängt nicht von dem Wege ab, auf welchem der Punkt von A nach A' gelangt ist, denn die auf ihn wirkende Kraft, welche ununterbrochen nach dem festen Punkte B gerichtet ist, ist eine Zentralkraft. Das Gesagte bezieht sich auf alle Punktpaare des Systems, folglich ist unser

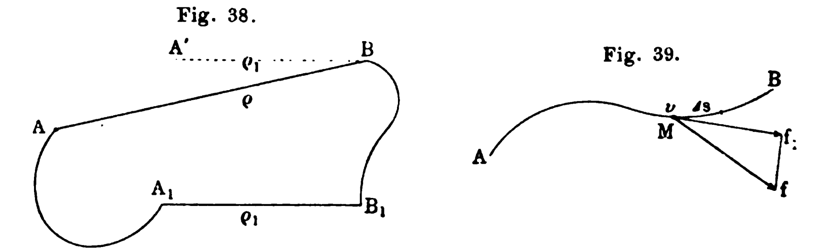


Fig. 38. Fig. 39.

Satz bewiesen. Aus ihm folgt: Wenn ein Punktsystem von irgend einer Anordnung der Teilchen ausgehend nach einiger Zeit zur selben Anordnung zurückkehrt, so ist die ganze während dieser Zeit von den inneren Kräften geleistete Arbeit gleich Null.

§ 3. **Arbeit und Wucht.** Setzen wir den Fall, ein gewisser Körper befinde sich, während er den Weg AB (Fig. 39) durchläuft, unter der Einwirkung eines Systems von Kräften, deren Resultante f ist; nimmt man an, die Quellen dieser Kräfte befinden sich aufserhalb des vom Körper eingenommenen Raumes, so nennt man auch die Kräfte selbst äufsere. Auf Grund eines früher bewiesenen Satzes finden wir die bei der Bewegung eines Körpers geleistete Arbeit R eines Systems von Kräften, wenn wir die Arbeit der Resultante f bestimmen. Diese Arbeit ist nach (7, a) auf Seite 107 gleich

$$R = \lim \Sigma f_1 \Delta s,$$

wo Δs eine der Teilstrecken ist, in welche wir den Weg zerlegen und $f_1 = f \cos(f, \Delta s)$ die tangentiale Komponente der Resultante f, d. h. die

Komponente der Bewegungsrichtung. Wir haben gesehen, dafs die tangentiale Komponente die Ursache der tangentialen Beschleunigung w_1 und dafs $f_1 = m w_1$ ist, somit ist

$$R = \lim \Sigma m w_1 . \Delta s.$$

Es möge unser Körper im Anfangspunkte A seines Weges die Geschwindigkeit v_1, im Endpunkte die Geschwindigkeit v_2 besessen haben; die entsprechenden Werte für die Wucht sind nach (1) auf Seite 103 $J_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ und $J_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte M bezeichnen wir mit v, die Wucht mit $J = \frac{1}{2} m v^2$. Nachdem der Körper das Wegelement Δs durchlaufen, besitzt er die neue Geschwindigkeit $v + \Delta v$ und die neue Wucht $\frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2$. Die Änderung der lebendigen Kraft bezeichnen wir mit ΔJ; sie ist offenbar gleich $\Delta J = \frac{1}{2} m [(v + \Delta v)^2 - v^2] = \frac{1}{2} m [2 v \Delta v + (\Delta v)^2]$. Denkt man sich Δs, mithin auch Δv als unendlich kleine Gröfsen, so kann man das zweite Glied in der Klammer vernachlässigen und $\Delta J = m v \Delta v$ setzen. Die totale Änderung der Wucht während der Zurücklegung des Weges AB ist $J_2 - J_1 = \lim \Sigma \Delta J = \lim \Sigma m v \Delta v$. Aber es ist $\Delta v = w_1 \Delta t$, wo Δt die Zeit zum Durchlaufen des Weges Δs ist; folglich ist $J_2 - J_1 = \lim \Sigma m w_1 v \Delta t$; ferner ist das Produkt $v \Delta t = \Delta s$ und daher

$$J_2 - J_1 = \lim \Sigma m v_1 \Delta s.$$

Vergleicht man diese Formel mit dem letzten Ausdruck für R, so kommt

$$R = \lim \Sigma f \Delta s \cos (f, \Delta s) = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Formel ist eine der wichtigsten physikalischen Formeln; sie drückt folgenden Satz aus: Wenn sich ein Körper unter dem Einfluss äufserer Kräfte bewegt, so ist die Arbeit derselben numerisch gleich dem Zuwachs der Wucht des Körpers.

Für den Fall der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten oder eines physikalischen Körpers kann man für jeden einzelnen Punkt die Formel (9) gelten lassen; nimmt man die Summe dieser Gleichungen und bezeichnet die Summe der Arbeiten aller Kräfte, welche während der Fortbewegung des Systems auf alle Punkte desselben gewirkt hatten, mit R, so erhält man

$$R = J_2 - J_1 = \lim \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \lim \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad (9, a)$$

Für den Fall der Drehung eines Körpers um eine Achse ergiebt die Formel (3)

$$R = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} K \Theta_2^2 - \frac{1}{2} K \Theta_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (9,b)$$

wobei K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsachse, Θ_1 und Θ_2 die Winkelgeschwindigkeiten für den Anfang und das Ende des Zeitintervalls sind, während dessen die äufseren Kräfte die Arbeit R geleistet haben.

Nehmen wir an, es wirke auf den rotierenden Körper ein Kräftepaar, dessen Kräfte in einer zur Drehachse senkrechten Ebene liegen und sei M das Moment dieses Kräftepaares. Wenn sich der Körper während des kurzen Zeitintervalls dt um den Winkel $d\varphi$ dreht, so ist die kleine vom Kräftepaare geleistete Arbeit des Kräftepaares $dR = M d\varphi$ [vergl. (8) auf Seite 109]. Diese Arbeit mufs dem Zuwachs der Wucht gleich sein $J = \frac{1}{2} K \Theta^2$ [vergl. (9)]. Somit ist $M d\varphi = d\left(\frac{1}{2} K \Theta^2\right) = K \Theta d\Theta$. Dividiert man beide Seiten durch dt, so erhält man $M \frac{d\varphi}{dt} = K\Theta \frac{d\Theta}{dt}$. Es ist aber $\Theta = \frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\Theta}{dt} = \vartheta$, d. h. gleich der Winkelbeschleunigung. Somit ist

$$M = K\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Das Moment eines Kräftepaares, welches in einer zur Drehungsachse des Körpers senkrechten Ebene liegt, ist gleich dem Produkte aus dem Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Achse und seiner Winkelbeschleunigung.

Wenn die Punkte, aus denen ein System besteht, mit irgend welchen Kräften aufeinander wirken, so heifsen solche Kräfte für das gegebene System innere Kräfte. Für jeden einzelnen Punkt aber sind die Kräfte, mit denen auf ihn die übrigen Punkte des Systems wirken, äufsere Kräfte, bei Änderung in der gegenseitigen Lage der Systempunkte kann man daher auf jeden von ihnen Formel (9) anwenden; auch (9, b) bleibt in Geltung. Hieraus geht aber hervor, dafs, wenn ein Punktsystem, welches keiner Aufsenkraft unterworfen ist, von einer Anordnung der Punkte zu einer anderen gelangt, die Arbeit der inneren Kräfte gleich dem Zuwachs der Wucht des Systems ist.

Wir hatten bewiesen, dafs diese Arbeit unabhängig davon ist, auf welchen Wegen die Punkte des Systems aus der Anfangslage in die neue gelangt sind; hieraus ergiebt sich nun folgender Satz: Wenn ein Punktsystem keinen äufseren Kräften unterworfen ist, so hängt die Änderung seiner Wucht beim Übergang von einer Anordnung der Punkte zu einer anderen nicht davon ab, auf welchen Wegen die Punkte aus der Anfangs- in die

Endlage gelangt sind. Kehrt das System zur ursprünglichen Anordnung zurück, so nimmt auch die Wucht ihren Anfangswert an.

Betrachten wir den allgemeinen Fall der Bewegung eines Punktes unter dem Einflusse einer beliebigen bewegenden Kraft f (vergl. Fig. 31) in Gegenwart des beliebigen Widerstandes f'. Bezeichnen wir mit f_1 und f_1' die tangentialen Komponenten der Kräfte f und f' und seien v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Punktes in den Lagen A und B. Die tangentiale Komponente der Resultante aller auf unseren Punkt wirkenden Kräfte ist gleich $f_1 - f_1'$, und ist nach (9)

$$lim\, \Sigma\, (f_1 - f_1')\Delta s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Wir wollen auch in diesem Falle $f_1 \Delta s$ das Arbeitselement und $lim\, \Sigma f_1 \Delta s$ die totale Arbeit der bewegenden Kraft nennen. Die vorhergehende Formel ergiebt

$$lim\, \Sigma f_1 \Delta s = lim\, \Sigma f_1' \Delta s + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

Wir sehen, dafs die Arbeit der bewegenden Kraft im allgemeinsten Falle aus zwei Teilen besteht: der eine wird zur Überwindung eines Widerstandes „verbraucht“, der andere zur Änderung der Wucht des Punktes. Wenn $f_1 > f_1'$ ist, so ist $v_2 > v_1$ und der Punkt bewegt sich mit einer Beschleunigung; er erwirbt dabei eine Wucht. Wenn $f_1 < f_1'$ ist, so ist auch $v_2 < v_1$, die Bewegung des Punktes ist eine verzögerte, er verliert Wucht. Wenn endlich $f_1 = 0$, d. h. die bewegende Kraft gleich Null oder normal zur Bahnlinie des Punktes ist, so haben wir

$$lim\, \Sigma f_1' \Delta s = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11, a)$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt die verlorene Wucht dar. Im speziellen Falle, wo f und f' entgegengesetzt gerichtet sind und während der ganzen Dauer der Bewegung des Punktes nach Gröfse und Richtung unverändert bleiben, giebt Formel (11)

$$fh = f'h + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

wo (vergl. Formel $R = fh$ und Fig. 35) h die Projektion des durchlaufenen Weges auf die Richtung der Kräfte f und f' ist. Für $f = 0$ haben wir

$$f'h = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12, a)$$

Wir wollen nun die hergeleiteten Formeln auf die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche anwenden, wobei wir die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe und den Luftwiderstand aufser acht lassen.

1. Beim freien Fall befindet sich der Körper unter der Einwirkung der Schwerkraft, d. h. der Wirkung seines Gewichtes p, welches die Rolle einer bewegenden Kraft spielt. In diesem Falle ist $f' = 0$ und (12) ergiebt

$$ph = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, b)$$

Prüfen wir diese Formel für die Fallbewegung eines Körpers in der Richtung der Schwerkraft (also einer vertikalen Geraden). Die konstante Kraft ruft eine konstante Beschleunigung hervor, die wir bereits [vergl. (12) auf Seite 81] mit g bezeichnet haben: wir hatten $p = mg$. Für den Fall einer geradlinigen Bewegung hatten wir die Formel $v_2^2 - v_1^2 = 2ws$ [vergl. (22) auf Seite 65] hergeleitet, die in unserem Falle die Form $v_2^2 - v_1^2 = 2gh$ annimmt. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, dafs $p = mg$ ist, so erhält man (12, b).

2. Nehmen wir an, der Körper fange an, sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 aufwärts zu bewegen. In diesem Falle vertritt das Gewicht p den Widerstand f' in (12), während $f = 0$ ist; (12, a) ergiebt

$$ph = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, c)$$

Auch diese Formel läfst sich leicht prüfen. Der Körper bewegt sich unter dem Einflufs der konstanten Kraft p, deren Richtung der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt ist: also erfolgt die Bewegung mit einer Beschleunigung, die gleich $-g$ ist. Auf Seite 66 hatten wir Formel (24): $v_1^2 - v_2^2 = 2gs$. Multipliziert man mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, dafs $p = mg$ ist, so erhält man (12, c).

3. Der Körper bewege sich vertikal aufwärts unter der Wirkung einer Kraft f, welche die Richtung der Bewegung selbst hat; das Gewicht des Körpers sei p. Die allgemeine Formel (11) ergiebt für die Arbeit R der bewegenden Kraft den Ausdruck

$$R = lim \Sigma f \Delta h = ph + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \cdot \quad . \quad (12, d)$$

wo h die ganze Steighöhe, Δh das Wegelement ist.

Die beim Heben eines Körpers geleistete Arbeit besteht aus zwei Teilen; der erste ist die eigentliche „Hebearbeit“, der zweite wird durch den Zuwachs an Wucht des gehobenen Körpers gemessen. Nur wenn $v_2 = v_1$ ist, haben wir $R = ph$, d. h. die beim Heben des Körpers geleistete Arbeit ist nur dann gleich der „Hebearbeit“, wenn der gehobene Körper zu Anfang und Ende der Bewegung dieselbe Geschwindigkeit, z. B. die Geschwindigkeit Null,

besitzt. Die Kraft f kann an einigen Stellen des Weges h hierbei auch gröfser als p sein, doch mufs sie dafür an anderen Stellen kleiner als p, gleich Null oder negativ sein.

Beim Heben eines Kilogramm auf einen Meter Höhe wird nur dann eine Arbeit von einem Meterkilogramm geleistet, wenn die gehobene Masse vor und nach dem Heben die gleiche Geschwindigkeit besitzt, z. B. in Ruhe ist.

§ 4. Arbeit und Zeit. Arbeitsvermögen. Es existieren mannigfache Mechanismen und Maschinen, welche unter bestimmten Bedingungen im stande sind, eine bestimmte Arbeit R während einer bestimmten Zeit t zu leisten und diese Arbeitsleistung innerhalb einer im allgemeinen begrenzt langen Zeit für jedes darauffolgende Zeitintervall so lange zu wiederholen, als die hierzu erforderlichen Bedingungen erfüllt bleiben. So können z. B. ziemlich lange im Verlaufe jeder Minute eine ganz bestimmte Arbeit leisten — eine Dampfmaschine, welche beständig unter Dampf gehalten und geheizt wird, oder ein Wassermotor, zu dem ununterbrochen ein genügendes Wasserquantum binzuströmt. Nebenumstände, wie das notwendige Instandsetzen und Reinigen der Maschinenteile, können die Dauer der oben skizzierten Wirkung abkürzen. Mensch und Tier besitzen, gehörig ernährt, eine ähnliche Fähigkeit, doch ist hier die Wirkungsdauer enger begrenzt, weil hier Erholung unbedingt notwendig ist. In allen Fällen ähnlicher Art sagen wir, die Maschine, das Tier etc. besitzt eine gewisse Arbeitsfähigkeit (Arbeitsvermögen). Es wird diese Gröfse an derjenigen Arbeit gemessen, welche das Tier resp. die Maschine unter gewissen Voraussetzungen in jeder einzelnen von einer gröfseren Zahl aufeinander folgenden Zeiteinheiten zu leisten imstande ist. Hieraus folgt, dafs die absolute Einheit der Arbeitsfähigkeit die Fähigkeit einer solchen Maschine ist, die je eine Arbeitseinheit in der Zeiteinheit zu leisten vermag. So stellt z. B. ein Meterkilogramm pro Sekunde die Einheit der Arbeitsfähigkeit dar. In der Technik ist eine andere Einheit der Arbeitsfähigkeit gebräuchlich, die Pferdekraft genannt wird: es ist dies die Arbeitsfähigkeit einer Maschine, die eine Arbeit von 75 Meterkilogramm in der Sekunde zu leisten vermag.

Man pflegt einer Maschine eine gewisse Arbeitsfähigkeit auch dann zuzuschreiben, wenn die Bedingungen, unter denen sie Arbeit leistet, noch nicht erfüllt sind. So spricht man von einem „fünfpferdigen" Motor; das ist ein Motor, der unter gewissen Bedingungen in einer Sekunde 75 × 5 Meterkilogramm Arbeit leisten kann. Die C. G. S.-Einheit der Arbeitsfähigkeit ist die Fähigkeit einer Maschine, ein Erg pro Sekunde, ein Sekundenerg, zu leisten.

Gegenwärtig ist, insbesondere in der Elektrotechnik, eine Einheit

der Arbeitsfähigkeit, die Watt genannt wird, im Gebrauch. Es ist das die Fähigkeit, ein Joule pro Sekunde zu leisten. Auf S. 105 war der Wert von einem Joule gegeben; drückt man es in Meterkilogrammen aus und beachtet die Definition der Pferdekraft, so bekommt man folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule pro Sek.} = 10 \text{ Megaerg pro Sek.} \\ &= 10^7 \text{ Erg pro Sek.} = 0{,}102 \text{ Meterkilogramm pro Sek.} \\ &1 \text{ Watt} = \frac{1}{736} \text{ Pferdekraft} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

§ 5. Energie. I. Energieprinzip. Die Lehre von der Energie bildet einen der wichtigsten, wenn nicht gar den wichtigsten Teil der modernen Physik; sie bildet die unerschütterlich feste Grundlage, auf die wir uns stützen müssen, wenn wir danach streben, den Zusammenhang zwischen den Erscheinungen der uns umgebenden Natur aufzuhellen. Wenn ein Körper oder eine Gruppe von Körpern fähig ist, Arbeit zu leisten, so sagen wir, dafs sie Energie besitzen. Je gröfser die Arbeit ist, welche ein Körper oder ein System von Körpern leisten kann, um so gröfser ist, sagen wir, ihr „Energievorrat“.

Beispielsweise sei hier auf die Energie eines sich bewegenden Körpers oder Systems hingewiesen, welche, wie dies die tägliche Erfahrung lehrt, verschiedene Widerstände, darunter auch den „Trägheitswiderstand“ anderer Körper zu überwinden im stande sind. Nennen wir diese Energie die Energie der Bewegung. Sie ist offenbar um so gröfser, je gröfser die Geschwindigkeit ist, mit der sich der gegebene Körper oder das gegebene System bewegen. Wir wollen die Energie durch diejenige Arbeit messen, welche der Körper resp. das System zu leisten vermögen. Bezeichnet man die Energie mit J, die Arbeit mit R und setzt den Proportionalitätskoeffizienten gleich Eins, so kommt

$$J = R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Diese Formel giebt $J = 1$ für $R = 1$, d. h. die absolute Einheit der Energie ist die Energie eines solchen Körpers, der die Einheit der Arbeit zu leisten vermag. Man giebt dieser Energieeinheit gewöhnlich dieselbe Benennung wie der entsprechenden Arbeitseinheit. Somit sind das Meterkilogramm, das Erg, Megaerg und Joule nicht nur Arbeitseinheiten, sondern auch Energieeinheiten. Folglich ist auch das Erg die C. G. S.-Einheit der Energie. Nicht nur die Materie, auch der Äther kann Energie besitzen.

In der Energielehre gelten drei Prinzipien, von denen wir vorläufig nur zwei näher betrachten wollen.

I. Energieprinzip. Die Energie eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist eine endliche, eindeutige und stetige

Funktion seines Zustandes, d. h. die Energie wird durch den Zustand des Körpers oder Systems vollkommen bestimmt und einer unendlich kleinen Änderung des Zustandes entspricht eine ebenfalls unendlich kleine Änderung der Energie. Das Wort „Zustand" hat hier den allgemeinen Sinn, der ihm im früheren beigelegt wurde, so daſs also der Zustand eines Systems durch die Gesamtheit seiner physikalischen Eigenschaften, die gegenseitige Lage und Geschwindigkeit aller seiner Teile bestimmt wird. Aus dem I. Energieprinzip ergeben sich überaus wichtige Folgen.

Folgesatz 1. Wenn ein Körper oder System bei positiver Arbeitsleistung aus irgend einem Zustande A in einen anderen Zustand B übergeht, so hängt die gesamte von ihm geleistete Arbeit nicht ab von der Art, wie, oder dem Wege, auf dem sich dieser Übergang vollzogen hat. Wir hatten auf S. 43 gesehen, daſs der Übergang aus einem Zustande in den anderen auf unendlich viele verschiedene Arten erfolgen kann. Es sei J_1 die Energie, welche dem Zustande A entspricht, J_2 die Energie für den Zustand B. Es heiſst dieses, das System (resp. der Körper) hat, als es sich im Zustande A befand, die Fähigkeit besessen, eine Arbeit $R_1 = J_1$ zu leisten; nach Übergang in den Zustand B hat es nurmehr die Fähigkeit, die kleinere Arbeit $R_2 = J_2$ zu leisten. Wenn es für den Übergang von A nach B einen derartigen Weg gebe, auf dem die geleistete Arbeit R gröſser oder kleiner als die Differenz $R_1 - R_2 = J_1 - J_2$ würde, so daſs $R = R_1 - R_2 \pm \varrho$, so würde sich, falls man diesen Weg von A nach B einschlägt, und berücksichtigt, daſs das System im Zustande B die Arbeit R_2 zu leisten vermag, ergeben, daſs das System im Zustande A die Arbeitsfähigkeit $R_2 + R = R_2 + (R_1 - R_2 \pm \varrho) = R_1 \pm \varrho$ besitzt, folglich auch die Energie $J = R_1 \pm \varrho$. Dieses aber widerspricht dem I. Energieprinzip, nach welchem das System im Zustande A nur einen einzigen ganz bestimmten Energievorrat $J_1 = R_1$ besitzen kann.

Folgesatz 2. Ein „Perpetuum mobile" ist unmöglich. Ein Perpetuum mobile ist ein solches Körpersystem (z. B. eine Maschine), welches, einmal in Bewegung gesetzt, sich unbegrenzt lange zu bewegen fortfährt und hierbei unausgesetzt Arbeit leistet. Aus der Definition der Energie selbst, sowie aus dem I. Energieprinzip folgt, daſs, während das System Arbeit leistet, sich seine Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung verringert. Eine fortgesetzte Arbeitsleistung muſs von einer fortgesetzten Abnahme des Energievorrates (Geschwindigkeitsabnahme) begleitet sein, welcher Vorrat, da er ein endlicher ist, sich mit der Zeit verbrauchen muſs.

Ob die Himmelskörper bei ihren Bewegungen seitens des sie umgebenden Mediums einen Widerstand erfahren, wissen wir nicht mit

Gewifsheit. Existiert ein solcher Widerstand nicht, so würde das Vorhandensein einer „ewigen Bewegung“ mit der Nichtexistenz eines Perpetuum mobile nicht im Widerspruche stehen, denn bei der Bewegung der Himmelskörper würde kein Energieverlust stattfinden. An der Erdoberfläche ist aber die ewige Bewegung eines Systems nicht realisierbar, denn es ist, wie wir sahen (S. 106), nicht möglich die schädlichen Widerstände, zu deren Überwindung unausgesetzt Bewegungsenergie verbraucht werden mufs, zu vermeiden.

§ 6. Formen der Energie. Das Studium der physikalischen Erscheinungen hat gezeigt, dafs es eine ganze Reihe verschiedener Formen der Energie giebt. Sie alle gehören zweien Gruppen an: der kinetischen und der potentiellen Energie. Die kinetische Energie heifst auch offenbare oder Bewegungsenergie, die potentielle auch latente oder Energie der Lage.

A. Die kinetische Energie, offenbare Energie, Energie der Bewegung. Bei allen Formen der kinetischen Energie haben wir es mit der Bewegung irgend eines Stoffes — der Materie oder des Äthers — zu thun. Wir wollen hier den allgemeinen Ausdruck für die Bewegungsenergie ableiten. Es sei m die sich bewegende Masse und v ihre Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick. Um ihre Energie J zu bestimmen, müssen wir diejenige Arbeit R berechnen, die beim Übergange der Masse aus dem gegebenen Zustande (mit der Geschwindigkeit v) in einen anderen geleistet werden kann, in welchem der Bewegungsenergievorrat verbraucht, die Geschwindigkeit also gleich Null ist. Folgesatz 1 zeigt, dafs die Arbeit nicht davon abhängig ist, wie der Übergang von der Bewegung zur Ruhe sich vollzogen hat. Setzen wir daher voraus, auf den Körper habe eine gewisse konstante Kraft f' zu wirken begonnen, deren Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v direkt entgegengesetzt sei. Unter dem Einflusse der Kraft f' beginnt der Körper sich mit einer konstanten negativen Beschleunigung $-w = -(f':m)$ zu bewegen, d. h. seine Geschwindigkeit vermindert sich in der Zeiteinheit um w und wird schliefslich, wenn der Körper einen gewissen Weg h zurückgelegt hat, gleich Null. Die gesuchte Arbeit ist gleich $R = f'h$. Formel (12, a) auf S. 115, in welcher man jetzt die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = v$ und die Endgeschwindigkeit $v_2 = 0$ setzen mufs, ergiebt $R = f'h = \frac{1}{2} mv^2$; dasselbe erhält man unmittelbar, wenn man in $R = f'h$ die Ausdrücke $f' = mw$ und $h = \frac{v^2}{2w}$ [vergl. (22, b) auf S. 65] einsetzt. Somit ist die gesuchte Energie

$$J = R = \frac{1}{2} mv^2 \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Die Bewegungsenergie eines Körpers wird durch seine Wucht bestimmt. Hieraus folgt, dafs die in gegebener Zeit von einem sich bewegenden Körper geleistete Arbeit durch seinen Verlust an Wucht gemessen wird. Hat in dieser Zeit die Geschwindigkeit von v_1 bis v_2 abgenommen, so ist die geleistete Arbeit

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Vergleicht man diese Formel mit (9) auf S. 113, so erhält man folgenden Satz: **Wird die Arbeit von äufseren Kräften geleistet, so wird sie durch den Zuwachs an Wucht des Körpers gemessen; wird sie jedoch vom Körper selbst geleistet**, d. h. **auf Kosten seines Vorrates an Bewegungsenergie, so wird sie durch den Verlust an Wucht gemessen.** Die Bewegungsenergie eines **Punktsystems** wird durch seine Wucht gemessen, d. h. durch die Gröfse

$$J = \Sigma \frac{1}{2} m v^2.$$

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung der verschiedenen Formen von kinetischer Energie über.

I. **Kinetische Energie eines Körpers, der sich als Ganzes bewegt.** Hierher gehören alle die Fälle, wo die einander benachbarten materiellen Teilchen des Körpers gleiche oder nur sehr wenig verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Die Wucht der Bewegung eines Körpers dient als Mafs für die Arbeit, welche der Körper verrichten kann. Hierher gehören die Energie der fortschreitenden Bewegung einer Kanonenkugel, die Energie eines rotierenden Körpers, die Energie des Windes, des fliefsenden Wassers; ferner müssen die Energie der Schwingungsbewegung eines Körpers oder seiner Teile und die Schallenergie, wenigstens in bestimmten Stadien, ebenfalls hierher gerechnet werden.

II. **Wärmeenergie.** Die Wärme ist eine Form der Energie; auf Kosten eines Wärmevorrates kann Arbeit geleistet werden. Die Wärmeenergie wird durch die Wucht der regellosen Molekülbewegungen im Körper gemessen; bei diesen Bewegungen können die Nachbarteilchen nach Gröfse und Richtung verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Wenn auf Kosten der Wärmeenergie eines Körpers Arbeit geleistet wird, so verschwindet ein Teil dieser Energie, die Bewegung der Moleküle verlangsamt sich, und der Körper selbst kühlt sich ab. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs auch die Wärmeenergie eine endliche Gröfse ist, wennschon es bisher nicht gelungen ist, diesen Energievorrat zu erschöpfen, d. h. einem Körper seine ganze Wärmeenergie zu nehmen.

Die absolute Einheit der Wärmemenge ist diejenige Wärmemenge, die verbraucht werden mufs, um die absolute Arbeitseinheit zu erhalten.

Gewiſsheit. Existiert ein solcher Widerstand nicht, so würde das Vorhandensein einer „ewigen Bewegung“ mit der Nichtexistenz eines Perpetuum mobile nicht im Widerspruche stehen, denn bei der Bewegung der Himmelskörper würde kein Energieverlust stattfinden. An der Erdoberfläche ist aber die ewige Bewegung eines Systems nicht realisierbar, denn es ist, wie wir sahen (S. 106), nicht möglich die schädlichen Widerstände, zu deren Überwindung unausgesetzt Bewegungsenergie verbraucht werden muſs, zu vermeiden.

§ 6. Formen der Energie. Das Studium der physikalischen Erscheinungen hat gezeigt, daſs es eine ganze Reihe verschiedener Formen der Energie giebt. Sie alle gehören zweien Gruppen an: der kinetischen und der potentiellen Energie. Die kinetische Energie heiſst auch offenbare oder Bewegungsenergie, die potentielle auch latente oder Energie der Lage.

A. Die kinetische Energie, offenbare Energie, Energie der Bewegung. Bei allen Formen der kinetischen Energie haben wir es mit der Bewegung irgend eines Stoffes — der Materie oder des Äthers — zu thun. Wir wollen hier den allgemeinen Ausdruck für die Bewegungsenergie ableiten. Es sei m die sich bewegende Masse und v ihre Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick. Um ihre Energie J zu bestimmen, müssen wir diejenige Arbeit R berechnen, die beim Übergange der Masse aus dem gegebenen Zustande (mit der Geschwindigkeit v) in einen anderen geleistet werden kann, in welchem der Bewegungsenergievorrat verbraucht, die Geschwindigkeit also gleich Null ist. Folgesatz 1 zeigt, daſs die Arbeit nicht davon abhängig ist, wie der Übergang von der Bewegung zur Ruhe sich vollzogen hat. Setzen wir daher voraus, auf den Körper habe eine gewisse konstante Kraft f' zu wirken begonnen, deren Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v direkt entgegengesetzt sei. Unter dem Einflusse der Kraft f' beginnt der Körper sich mit einer konstanten negativen Beschleunigung $-w = -(f':m)$ zu bewegen, d. h. seine Geschwindigkeit vermindert sich in der Zeiteinheit um w und wird schlieſslich, wenn der Körper einen gewissen Weg h zurückgelegt hat, gleich Null. Die gesuchte Arbeit ist gleich $R = f'h$. Formel (12, a) auf S. 115, in welcher man jetzt die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = v$ und die Endgeschwindigkeit $v_2 = 0$ setzen muſs, ergiebt $R = f'h = \frac{1}{2}mv^2$; dasselbe erhält man unmittelbar, wenn man in $R = f'h$ die Ausdrücke $f' = mw$ und $h = \frac{v^2}{2w}$ [vergl. (22, b) auf S. 65] einsetzt. Somit ist die gesuchte Energie

$$J = R = \frac{1}{2}mv^2 \quad \ldots \quad (15)$$

Die Bewegungsenergie eines Körpers wird durch seine Wucht bestimmt. Hieraus folgt, dafs die in gegebener Zeit von einem sich bewegenden Körper geleistete Arbeit durch seinen Verlust an Wucht gemessen wird. Hat in dieser Zeit die Geschwindigkeit von v_1 bis v_2 abgenommen, so ist die geleistete Arbeit

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Vergleicht man diese Formel mit (9) auf S. 113, so erhält man folgenden Satz: *Wird die Arbeit von äufseren Kräften geleistet, so wird sie durch den Zuwachs an Wucht des Körpers gemessen; wird sie jedoch vom Körper selbst geleistet, d. h. auf Kosten seines Vorrates an Bewegungsenergie, so wird sie durch den Verlust an Wucht gemessen.* Die Bewegungsenergie eines *Punktsystems* wird durch seine Wucht gemessen, d. h. durch die Gröfse

$$J = \Sigma \frac{1}{2} m v^2.$$

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung der verschiedenen Formen von kinetischer Energie über.

I. *Kinetische Energie eines Körpers, der sich als Ganzes bewegt.* Hierher gehören alle die Fälle, wo die einander benachbarten materiellen Teilchen des Körpers gleiche oder nur sehr wenig verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Die Wucht der Bewegung eines Körpers dient als Mafs für die Arbeit, welche der Körper verrichten kann. Hierher gehören die Energie der fortschreitenden Bewegung einer Kanonenkugel, die Energie eines rotierenden Körpers, die Energie des Windes, des fliefsenden Wassers; ferner müssen die Energie der Schwingungsbewegung eines Körpers oder seiner Teile und die Schallenergie, wenigstens in bestimmten Stadien, ebenfalls hierher gerechnet werden.

II. *Wärmeenergie.* Die Wärme ist eine Form der Energie; auf Kosten eines Wärmevorrates kann Arbeit geleistet werden. Die Wärmeenergie wird durch die Wucht der regellosen Molekülbewegungen im Körper gemessen; bei diesen Bewegungen können die Nachbarteilchen nach Gröfse und Richtung verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Wenn auf Kosten der Wärmeenergie eines Körpers Arbeit geleistet wird, so verschwindet ein Teil dieser Energie, die Bewegung der Moleküle verlangsamt sich, und der Körper selbst kühlt sich ab. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs auch die Wärmeenergie eine endliche Gröfse ist, wennschon es bisher nicht gelungen ist, diesen Energievorrat zu erschöpfen, d. h. einem Körper seine ganze Wärmeenergie zu nehmen.

Die absolute Einheit der [illegible] ist diejenige Wärmemenge, die verbraucht werden mufs, um [illegible] Arbeitseinheit zu erhalten.

Die C.G.S.-Einheit der Wärmemenge ist das Erg. Zum Messen der Wärmeenergie oder einfacher ausgedrückt der Wärmemenge werden auch noch andere Einheiten gebraucht, z. B. die grofse oder die kleine Kalorie: es sind dies diejenigen Wärmemengen, welche dazu erforderlich sind, ein Kilogramm resp. ein Gramm Wasser um 1° C. zu erwärmen. Bezeichnen wir mit Q den Zahlenwert einer gewissen Wärmemenge und mit R diejenige Arbeit, welche durch ihren Verbrauch erhalten wird. Man pflegt zu sagen, dafs die Wärme Q und die Arbeit R einander äquivalent sind. In welchen Einheiten auch immer die Wärme Q und die Arbeit R gemessen sein mögen, diese beiden Zahlen sind einander proportional, so dafs man

$$R = EQ \quad \quad (17)$$

setzen kann, wo E den Proportionalitätsfaktor darstellt. Setzt man

$$A = \frac{1}{E} \quad \quad (18)$$

so kommt

$$Q = AR \quad \quad (19)$$

Der Koeffizient E heifst das mechanische Wärmeäquivalent; es ist dies die Zahl Arbeitseinheiten, die einer Wärmeeinheit äquivalent sind, denn (17) giebt uns $R = E$ für $Q = 1$. Der reciproke Koeffizient A heifst das thermische Arbeitsäquivalent; es ist dies diejenige Zahl Wärmeeinheiten, welche einer Arbeitseinheit äquivalent ist, denn nach (19) hat man $Q = A$ für $R = 1$. Versuche, auf welche wir in der Wärmelehre ausführlicher eingehen werden, haben gelehrt, dafs, wenn man als Einheit der Wärmemenge die grofse Kalorie, als Arbeitseinheit das Meterkilogramm gelten läfst, $E = 426$ wird, d. h.

die grofse (Kilogramm-) Kalorie ist 426 Meterkilogrammen äquivalent . . . (20)

Mit Hülfe früher gefundener Relationen erhalten wir leicht den Zusammenhang zwischen der Kalorie und den absoluten Wärmeeinheiten. Aus diesen Relationen folgt, dafs ein Meterkilogramm gleich 98,1 Megaerg = 9,81 Joule ist; andererseits ist eine kleine Kalorie (0,001 grofse Kalorie) 0,426 Meterkilogrammen äquivalent. Somit ist

eine kleine (Gramm-) Kalorie = 41,6 Megaerg = 4,16 Joule; ein Joule = 0,24 kleine Kalorieen . . . (21)

In der Lehre von der Wärme soll diese Frage genauer erörtert und eine strengere Definition der „Kalorie“ gegeben werden.

III. Die strahlende Energie des Äthers. Wir sahen auf S. 10, dafs im Äther Störungen auftreten können, die sich von einem Orte zum anderen fortpflanzen. Derjenige Teil des Äthers, in welchem solche Störungen erfolgen, besitzt einen Energievorrat, welcher durch die

Wucht der Bewegung der Ätherteilchen gemessen wird. Eine Ausbreitung der Störung ist nichts anderes, als eine Übertragung der Energie von den einen Ätherteilchen auf die anderen. Die Geschwindigkeit v dieser Übertragung im freien Äther (dem sogenannten Vakuum im gewöhnlichen Sinne des Wortes) hängt von der Art der Störung, d. h. von der Form der übertragenen Bewegung selbst nicht ab und ist gleich

$$v = 300\,000 \text{ km in der Sekunde} = 3.10^{10} \text{ cm pro Sek.} \quad . \quad (22)$$

Als Beispiele für die strahlende Energie des Äthers können dienen das sichtbare Licht, die unsichtbaren Strahlen (die sogenannten ultraroten, die man früher Wärmestrahlen nannte, und die ultravioletten Strahlen) und die Hertzschen elektrischen Strahlen, die später betrachtet werden sollen.

IV. Die kinetische Energie des Äthers, welche elektrischer Strom genannt wird (elektrische Stromenergie). Der elektrische Strom stellt eine Erscheinung dar, für welche die Bedingungen, unter welchen sie auftritt, sehr wohl bekannt sind, ebenso auch die Gesetze, denen sie unterworfen ist.

Vom inneren Wesen dieser Erscheinung besitzen wir noch keine klare, von der Wissenschaft endgültig angenommene Vorstellung. Mit Sicherheit können wir nur soviel sagen, dafs der elektrische Strom einen besonderen Fall der Bewegungsenergie des Äthers darstellt, die man zur Erzeugung von Arbeit verwenden kann (Elektromotoren). Über den Charakter dieser Ätherbewegung und selbst über den Ort, an dem sie erfolgt, weifs man ebenfalls nichts Bestimmtes. Früher glaubte man, die elektrische Stromenergie sei ganz und gar in jenen Leitern enthalten (z. B. den Drähten), durch welche, wie man sich ausdrückt, „der Strom fliefst". Es liegen aber Gründe vor, anzunehmen, dafs diese Energie gröfstenteils oder völlig in dem Äther des jene Leiter umgebenden Raumes enthalten sei.

B. Potentielle, latente Energie oder Energie der Lage. Wir finden in der Natur verschiedenartige Formen der Energie, d. h. der Fähigkeit, Arbeit zu leisten, die von der gegenseitigen Lage zweier oder mehrerer Körper abhängen. Theoretisch genommen kann ein einzelner materieller Punkt nur kinetische (Bewegungs-) Energie besitzen; potentielle Energie jedoch kann nur ein System von mindestens zwei materiellen Punkten besitzen. Hierbei ist es nötig, dafs zwischen den beiden materiellen Punkten das Bestreben, sich einander zu nähern, besteht, oder das Bestreben, sich voneinander zu entfernen, oder überhaupt, dafs die Anwesenheit eines Körpers eine auf den anderen Körper wirkende Kraft hervorrufe. Die Frage nach den Entstehungsursachen einer solchen Kraft möge dabei unberücksichtigt bleiben.

a) Wenn zwei Körper sich einander zu nähern streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „anziehen“, so kann dieses Streben zur Arbeitsquelle werden, die sich entweder im Überwinden äufserer, eine Annäherung hindernder Widerstände, oder im Überwinden der Trägheit dieser Körper zeigt, welche letzteren sodann eine beschleunigte Bewegung erhalten. Der Energievorrat ist offenbar um so gröfser, je weiter die Körper voneinander entfernt sind und nimmt ab, wenn sich die Körper, unter Arbeitsleistung, einander nähern. Somit sehen wir, dafs der Energievorrat in diesem Falle von der gegenseitigen Lage der Körper abhängt.

b) Wenn zwei Körper sich voneinander zu entfernen streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „abstofsen“, so kann auch dieses Bestreben zur Arbeitsquelle werden. Der Energievorrat ist hier um so gröfser, je näher die Körper einander sind; er nimmt in dem Mafse ab, als sich die Körper voneinander entfernen. Es ist klar, dafs der Energievorrat auch in diesem Falle von der wechselseitigen Lage der Körper abhängt.

Es ist auch leicht zu verstehen, weshalb die Energie in diesen beiden Fällen (verborgene) latente Energie oder Energie der Lage genannt wird. Die Frage nach der Ursache des Bestrebens der Körper, sich zu nähern oder zu entfernen, werden wir an dieser Stelle nicht erörtern. Wir wollen vielmehr die verschiedenen Formen der potentiellen Energie betrachten.

I. Die Energie von Massen, welche nach dem allgemeinen Gravitationsgesetze angezogen werden. Jedes sich nicht berührende Massenpaar besitzt, da zwischen ihnen die Schwere wirkt, Energie der Lage. So besitzen die Sonne und ein beliebiger Planet oder aber Erde und Mond zusammengenommen einen sehr grofsen Vorrat an potentieller Energie. Man pflegt von der Energie eines gehobenen Körpers zu reden, denn jeder auf eine gewisse Höhe über die Erdoberfläche gehobene Körper ist im stande, bei seinem Herabfallen Arbeit zu leisten. Streng genommen besitzt aber nicht der gehobene Körper diese Energie, sondern das System der beiden sich anziehenden Körper, nämlich die Erde und der gehobene Körper.

Die potentielle Energie der Anziehung eines Systems von Körpern oder materiellen Punkten hängt nur von ihrer gegenseitigen Lage ab (I. Energieprinzip). Bei jeder Verdichtung eines Systems wird eine Arbeit geleistet, deren Gröfse nur von der anfänglichen und endgültigen Anordnung der Teilchen abhängt. Beim Übergange der einen Weltkörper bildenden Substanz aus dem ursprünglichen Urnebelzustand in einen dichteren, erfolgt ein ungeheurer Verlust an potentieller Energie, auf deren Kosten eine äquivalente Arbeit geleistet wird. Die potentielle Energie der gehobenen Gewichte einer Wanduhr dient als Quelle

der von der Wanduhr zu leistenden Arbeit. Die potentielle Energie der Wolken dient als Quelle für die Arbeit der Wassermühlen u. s. w.

II. Die Energie der Lage homogener Teilchen. Zwischen den Teilchen homogener Körper wirken besondere Kräfte, deren Charakter noch wenig bekannt ist. Je nach den Bedingungen äufsern die Teilchen das Bestreben, sich zu nähern oder voneinander zu entfernen, und hierin liegt die Quelle für den potentiellen Energievorrat der Teilchen.

Hierher gehört die Energie eines elastisch veränderten Körpers. Eine Feder hat, je nach ihrer Formänderung, sei sie nun gebogen, zusammengedrückt, gereckt oder gedreht, die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wobei sie sich zurechtbiegt, ausdehnt, zusammenzieht oder losdreht, verliert aber hierbei einen Teil des früheren Energievorrates, d. h. der Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung. Die Änderung in der gegenseitigen Lage der Teilchen, welche die Deformation des elastischen Körpers begleitet, ist hier die Ursache für das Zustandekommen von potentieller Energie.

Hierher gehört auch jene Lagenenergie der Teilchen, welche sich besonders auffallend beim Übergang der Körper aus dem festen in den flüssigen und aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand, sowie bei den entgegengesetzten Vorgängen äufsert, weniger auffallend jedoch bei jeder Volumen- oder Temperaturänderung eines Körpers zu Tage tritt. Wir werden weiter unten sehen, dafs die aus der Elementarphysik unter dem Ausdrucke „latente Wärme“ bekannte Gröfse sich im engen Zusammenhang mit der betrachteten Form der potentiellen Energie befindet.

III. Chemische Energie. Ein System von zwei Körpern, die sich chemisch vereinigen können, vermag Arbeit zu leisten. Kohle und Sauerstoff, Wasserstoff und Chlor, Schwefelsäure und Wasser besitzen, paarweise genommen, einen Vorrat an chemischer Energie, den man zur Erzeugung von Arbeit benutzen kann (so ist z. B. das Verbrennen der Kohle die Arbeitsquelle in den Dampfmotoren). Bildet sich aus Atomen ein Molekül, so besitzt das letztere nicht mehr denjenigen Vorrat an chemischer Energie, der im Augenblicke, als sich das Molekül bildete, zur Erzeugung von Arbeit verbraucht wurde. Bemerkt sei hier noch, dafs zwei Atome ein und desselben Stoffes ebenfalls potentielle Energie besitzen, falls das Molekül dieses Stoffes zwei oder mehr Atome enthält. So besitzen z. B. zwei Wasserstoffatome vor ihrer Vereinigung zum Molekül H_2 eine besondere potentielle Energie; dasselbe bezieht sich auch auf zwei J-Atome, bevor sie sich zu J_2 verbunden haben. Es zeigt sich sogar, dafs die potentielle Energie, die bei der Bildung eines Moleküls H_2 und eines Moleküls J_2 verbraucht wird, gröfser ist, als die zur Bildung von zwei Molekülen der Verbindung HJ (Jodwasserstoff). Zur eben betrachteten Form

1. Beim freien Fall befindet sich der Körper unter der Einwirkung der Schwerkraft, d. h. der Wirkung seines Gewichtes p, welches die Rolle einer bewegenden Kraft spielt. In diesem Falle ist $f' = 0$ und (12) ergiebt

$$ph = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12, \text{b})$$

Prüfen wir diese Formel für die Fallbewegung eines Körpers in der Richtung der Schwerkraft (also einer vertikalen Geraden). Die konstante Kraft ruft eine konstante Beschleunigung hervor, die wir bereits [vergl. (12) auf Seite 81] mit g bezeichnet haben; wir hatten $p = mg$. Für den Fall einer geradlinigen Bewegung hatten wir die Formel $v_2^2 - v_1^2 = 2\,ws$ [vergl. (22) auf Seite 65] hergeleitet, die in unserem Falle die Form $v_2^2 - v_1^2 = 2\,gh$ annimmt. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, dafs $p = mg$ ist, so erhält man (12, b).

2. Nehmen wir an, der Körper fange an, sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 aufwärts zu bewegen. In diesem Falle vertritt das Gewicht p den Widerstand f' in (12), während $f = 0$ ist; (12, a) ergiebt

$$ph = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (12, \text{c})$$

Auch diese Formel läfst sich leicht prüfen. Der Körper bewegt sich unter dem Einflufs der konstanten Kraft p, deren Richtung der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt ist: also erfolgt die Bewegung mit einer Beschleunigung, die gleich $-g$ ist. Auf Seite 66 hatten wir Formel (24): $v_1^2 - v_2^2 = 2\,gs$. Multipliziert man mit $\frac{1}{2} m$ und beachtet, dafs $p = mg$ ist, so erhält man (12, c).

3. Der Körper bewege sich vertikal aufwärts unter der Wirkung einer Kraft f, welche die Richtung der Bewegung selbst hat; das Gewicht des Körpers sei p. Die allgemeine Formel (11) ergiebt für die Arbeit R der bewegenden Kraft den Ausdruck

$$R = lim\, \Sigma f \Delta h = ph + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \cdot \quad \cdot \quad (12, \text{d})$$

wo h die ganze Steighöhe, Δh das Wegelement ist.

Die beim Heben eines Körpers geleistete Arbeit besteht aus zwei Teilen; der erste ist die eigentliche „Hebearbeit“, der zweite wird durch den Zuwachs an Wucht des gehobenen Körpers gemessen. Nur wenn $v_2 = v_1$ ist, haben wir $R = ph$, d. h. die beim Heben des Körpers geleistete Arbeit ist nur dann gleich der „Hebearbeit“, wenn der gehobene Körper zu Anfang und Ende der Bewegung dieselbe Geschwindigkeit, z. B. die Geschwindigkeit Null,

besitzt. Die Kraft f kann an einigen Stellen des Weges h hierbei auch gröfser als p sein, doch mufs sie dafür an anderen Stellen kleiner als p, gleich Null oder negativ sein.

Beim Heben eines Kilogramm auf einen Meter Höhe wird nur dann eine Arbeit von einem Meterkilogramm geleistet, wenn die gehobene Masse vor und nach dem Heben die gleiche Geschwindigkeit besitzt, z. B. in Ruhe ist.

§ 4. Arbeit und Zeit. Arbeitsvermögen. Es existieren mannigfache Mechanismen und Maschinen, welche unter bestimmten Bedingungen im stande sind, eine bestimmte Arbeit R während einer bestimmten Zeit t zu leisten und diese Arbeitsleistung innerhalb einer im allgemeinen begrenzt langen Zeit für jedes darauffolgende Zeitintervall so lange zu wiederholen, als die hierzu erforderlichen Bedingungen erfüllt bleiben. So können z. B. ziemlich lange im Verlaufe jeder Minute eine ganz bestimmte Arbeit leisten — eine Dampfmaschine, welche beständig unter Dampf gehalten und geheizt wird, oder ein Wassermotor, zu dem ununterbrochen ein genügendes Wasserquantum hinzuströmt. Nebenumstände, wie das notwendige Instandsetzen und Reinigen der Maschinenteile, können die Dauer der oben skizzierten Wirkung abkürzen. Mensch und Tier besitzen, gehörig ernährt, eine ähnliche Fähigkeit, doch ist hier die Wirkungsdauer enger begrenzt, weil hier Erholung unbedingt notwendig ist. In allen Fällen ähnlicher Art sagen wir, die Maschine, das Tier etc. besitzt eine gewisse Arbeitsfähigkeit (Arbeitsvermögen). Es wird diese Gröfse an derjenigen Arbeit gemessen, welche das Tier resp. die Maschine unter gewissen Voraussetzungen in jeder einzelnen von einer gröfseren Zahl aufeinander folgenden Zeiteinheiten zu leisten imstande ist. Hieraus folgt, dafs die absolute Einheit der Arbeitsfähigkeit die Fähigkeit einer solchen Maschine ist, die je eine Arbeitseinheit in der Zeiteinheit zu leisten vermag. So stellt z. B. ein Meterkilogramm pro Sekunde die Einheit der Arbeitsfähigkeit dar. In der Technik ist eine andere Einheit der Arbeitsfähigkeit gebräuchlich, die Pferdekraft genannt wird; es ist dies die Arbeitsfähigkeit einer Maschine, die eine Arbeit von 75 Meterkilogramm in der Sekunde zu leisten vermag.

Man pflegt einer Maschine eine gewisse Arbeitsfähigkeit auch dann zuzuschreiben, wenn die Bedingungen, unter denen sie Arbeit leistet, noch nicht erfüllt sind. So spricht man von einem „fünfpferdigen“ Motor; das ist ein Motor, der unter gewissen Bedingungen in einer Sekunde 75×5 Meterkilogramm Arbeit leisten kann. Die C. G. S.-Einheit der Arbeitsfähigkeit ist die Fähigkeit einer Maschine, ein Erg pro Sekunde, ein Sekundenerg, zu leisten.

Gegenwärtig ist, insbesondere in der Elektrotechnik, eine Einheit

der Arbeitsfähigkeit, die Watt genannt wird, im Gebrauch. Es ist das die Fähigkeit, ein Joule pro Sekunde zu leisten. Auf S. 105 war der Wert von einem Joule gegeben; drückt man es in Meterkilogrammen aus und beachtet die Definition der Pferdekraft, so bekommt man folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{c} 1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule pro Sek.} = 10 \text{ Megaerg pro Sek.} \\ = 10^7 \text{ Erg pro Sek.} = 0{,}102 \text{ Meterkilogramm pro Sek.} \\ 1 \text{ Watt} = \dfrac{1}{736} \text{ Pferdekraft} \end{array}\right\} \quad (13)$$

§ 5. Energie. I. Energieprinzip. Die Lehre von der Energie bildet einen der wichtigsten, wenn nicht gar den wichtigsten Teil der modernen Physik; sie bildet die unerschütterlich feste Grundlage, auf die wir uns stützen müssen, wenn wir danach streben, den Zusammenhang zwischen den Erscheinungen der uns umgebenden Natur aufzuhellen. Wenn ein Körper oder eine Gruppe von Körpern fähig ist, Arbeit zu leisten, so sagen wir, dafs sie Energie besitzen. Je gröfser die Arbeit ist, welche ein Körper oder ein System von Körpern leisten kann, um so gröfser ist, sagen wir, ihr „Energievorrat“.

Beispielsweise sei hier auf die Energie eines sich bewegenden Körpers oder Systems hingewiesen, welche, wie dies die tägliche Erfahrung lehrt, verschiedene Widerstände, darunter auch den „Trägheitswiderstand“ anderer Körper zu überwinden im stande sind. Nennen wir diese Energie die Energie der Bewegung. Sie ist offenbar um so gröfser, je gröfser die Geschwindigkeit ist, mit der sich der gegebene Körper oder das gegebene System bewegen. Wir wollen die Energie durch diejenige Arbeit messen, welche der Körper resp. das System zu leisten vermögen. Bezeichnet man die Energie mit J, die Arbeit mit R und setzt den Proportionalitätskoeffizienten gleich Eins, so kommt

$$J = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Diese Formel giebt $J = 1$ für $R = 1$, d. h. die absolute Einheit der Energie ist die Energie eines solchen Körpers, der die Einheit der Arbeit zu leisten vermag. Man giebt dieser Energieeinheit gewöhnlich dieselbe Benennung wie der entsprechenden Arbeitseinheit. Somit sind das Meterkilogramm, das Erg, Megaerg und Joule nicht nur Arbeitseinheiten, sondern auch Energieeinheiten. Folglich ist auch das Erg die C. G. S.-Einheit der Energie. Nicht nur die Materie, auch der Äther kann Energie besitzen.

In der Energielehre gelten drei Prinzipien, von denen wir vorläufig nur zwei näher betrachten wollen.

I. Energieprinzip. Die Energie eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist eine endliche, eindeutige und stetige

Funktion seines Zustandes, d. h. die Energie wird durch den Zustand des Körpers oder Systems vollkommen bestimmt und einer unendlich kleinen Änderung des Zustandes entspricht eine ebenfalls unendlich kleine Änderung der Energie. Das Wort „Zustand“ hat hier den allgemeinen Sinn, der ihm im früheren beigelegt wurde, so dafs also der Zustand eines Systems durch die Gesamtheit seiner physikalischen Eigenschaften, die gegenseitige Lage und Geschwindigkeit aller seiner Teile bestimmt wird. Aus dem I. Energieprinzip ergeben sich überaus wichtige Folgen.

Folgesatz 1. Wenn ein Körper oder System bei positiver Arbeitsleistung aus irgend einem Zustande A in einen anderen Zustand B übergeht, so hängt die gesamte von ihm geleistete Arbeit nicht ab von der Art, wie, oder dem Wege, auf dem sich dieser Übergang vollzogen hat. Wir hatten auf S. 43 gesehen, dafs der Übergang aus einem Zustande in den anderen auf unendlich viele verschiedene Arten erfolgen kann. Es sei J_1 die Energie, welche dem Zustande A entspricht, J_2 die Energie für den Zustand B. Es heifst dieses, das System (resp. der Körper) hat, als es sich im Zustande A befand, die Fähigkeit besessen, eine Arbeit $R_1 = J_1$ zu leisten; nach Übergang in den Zustand B hat es nurmehr die Fähigkeit, die kleinere Arbeit $R_2 = J_2$ zu leisten. Wenn es für den Übergang von A nach B einen derartigen Weg gebe, auf dem die geleistete Arbeit R gröfser oder kleiner als die Differenz $R_1 - R_2 = J_1 - J_2$ würde, so dafs $R = R_1 - R_2 \pm \varrho$, so würde sich, falls man diesen Weg von A nach B einschlägt, und berücksichtigt, dafs das System im Zustande B die Arbeit R_2 zu leisten vermag, ergeben, dafs das System im Zustande A die Arbeitsfähigkeit $R_2 + R = R_2 + (R_1 - R_2 \pm \varrho) = R_1 \pm \varrho$ besitzt, folglich auch die Energie $J = R_1 \pm \varrho$. Dieses aber widerspricht dem I. Energieprinzip, nach welchem das System im Zustande A nur einen einzigen ganz bestimmten Energievorrat $J_1 = R_1$ besitzen kann.

Folgesatz 2. Ein „Perpetuum mobile“ ist unmöglich. Ein Perpetuum mobile ist ein solches Körpersystem (z. B. eine Maschine), welches, einmal in Bewegung gesetzt, sich unbegrenzt lange zu bewegen fortfährt und hierbei unausgesetzt Arbeit leistet. Aus der Definition der Energie selbst, sowie aus dem I. Energieprinzip folgt, dafs, während das System Arbeit leistet, sich seine Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung verringert. Eine fortgesetzte Arbeitsleistung mufs von einer fortgesetzten Abnahme des Energievorrates (Geschwindigkeitsabnahme) begleitet sein, welcher Vorrat, da er ein endlicher ist, sich mit der Zeit verbrauchen mufs.

Ob die Himmelskörper bei ihren Bewegungen seitens des sie umgebenden Mediums einen Widerstand erfahren, wissen wir nicht mit

Gewifsheit. Existiert ein solcher Widerstand nicht, so würde das Vorhandensein einer „ewigen Bewegung" mit der Nichtexistenz eines Perpetuum mobile nicht im Widerspruche stehen, denn bei der Bewegung der Himmelskörper würde kein Energieverlust stattfinden. An der Erdoberfläche ist aber die ewige Bewegung eines Systems nicht realisierbar, denn es ist, wie wir sahen (S. 106), nicht möglich die schädlichen Widerstände, zu deren Überwindung unausgesetzt Bewegungsenergie verbraucht werden mufs, zu vermeiden.

§ 6. Formen der Energie. Das Studium der physikalischen Erscheinungen hat gezeigt, dafs es eine ganze Reihe verschiedener Formen der Energie giebt. Sie alle gehören zweien Gruppen an: der kinetischen und der potentiellen Energie. Die kinetische Energie heifst auch offenbare oder Bewegungsenergie, die potentielle auch latente oder Energie der Lage.

A. Die kinetische Energie, offenbare Energie, Energie der Bewegung. Bei allen Formen der kinetischen Energie haben wir es mit der Bewegung irgend eines Stoffes — der Materie oder des Äthers — zu thun. Wir wollen hier den allgemeinen Ausdruck für die Bewegungsenergie ableiten. Es sei m die sich bewegende Masse und v ihre Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick. Um ihre Energie J zu bestimmen, müssen wir diejenige Arbeit R berechnen, die beim Übergange der Masse aus dem gegebenen Zustande (mit der Geschwindigkeit v) in einen anderen geleistet werden kann, in welchem der Bewegungsenergievorrat verbraucht, die Geschwindigkeit also gleich Null ist. Folgesatz 1 zeigt, dafs die Arbeit nicht davon abhängig ist, wie der Übergang von der Bewegung zur Ruhe sich vollzogen hat. Setzen wir daher voraus, auf den Körper habe eine gewisse konstante Kraft f' zu wirken begonnen, deren Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v direkt entgegengesetzt sei. Unter dem Einflusse der Kraft f' beginnt der Körper sich mit einer konstanten negativen Beschleunigung $-w = -(f':m)$ zu bewegen, d. h. seine Geschwindigkeit vermindert sich in der Zeiteinheit um w und wird schliefslich, wenn der Körper einen gewissen Weg h zurückgelegt hat, gleich Null. Die gesuchte Arbeit ist gleich $R = f'h$. Formel (12, a) auf S. 115, in welcher man jetzt die Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = v$ und die Endgeschwindigkeit $v_2 = 0$ setzen mufs, ergiebt $R = f'h = \frac{1}{2} mv^2$; dasselbe erhält man unmittelbar, wenn man in $R = f'h$ die Ausdrücke $f' = mw$ und $h = \frac{v^2}{2w}$ [vergl. (22, b) auf S. 65] einsetzt. Somit ist die gesuchte Energie

$$J = R = \frac{1}{2} mv^2 \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

Die Bewegungsenergie eines Körpers wird durch seine Wucht bestimmt. Hieraus folgt, dafs die in gegebener Zeit von einem sich bewegenden Körper geleistete Arbeit durch seinen Verlust an Wucht gemessen wird. Hat in dieser Zeit die Geschwindigkeit von v_1 bis v_2 abgenommen, so ist die geleistete Arbeit

$$R = J_1 - J_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (16)$$

Vergleicht man diese Formel mit (9) auf S. 113, so erhält man folgenden Satz: **Wird die Arbeit von äufseren Kräften geleistet, so wird sie durch den Zuwachs an Wucht des Körpers gemessen; wird sie jedoch vom Körper selbst geleistet, d. h. auf Kosten seines Vorrates an Bewegungsenergie, so wird sie durch den Verlust an Wucht gemessen.** Die Bewegungsenergie eines **Punktsystems** wird durch seine Wucht gemessen, d. h. durch die Gröfse

$$J = \Sigma \frac{1}{2} m v^2.$$

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung der verschiedenen Formen von kinetischer Energie über.

I. **Kinetische Energie eines Körpers, der sich als Ganzes bewegt.** Hierher gehören alle die Fälle, wo die einander benachbarten materiellen Teilchen des Körpers gleiche oder nur sehr wenig verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Die Wucht der Bewegung eines Körpers dient als Mafs für die Arbeit, welche der Körper verrichten kann. Hierher gehören die Energie der fortschreitenden Bewegung einer Kanonenkugel, die Energie eines rotierenden Körpers, die Energie des Windes, des fliefsenden Wassers; ferner müssen die Energie der Schwingungsbewegung eines Körpers oder seiner Teile und die Schallenergie, wenigstens in bestimmten Stadien, ebenfalls hierher gerechnet werden.

II. **Wärmeenergie.** Die Wärme ist eine Form der Energie; auf Kosten eines Wärmevorrates kann Arbeit geleistet werden. Die Wärmeenergie wird durch die Wucht der regellosen Molekülbewegungen im Körper gemessen; bei diesen Bewegungen können die Nachbarteilchen nach Gröfse und Richtung verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Wenn auf Kosten der Wärmeenergie eines Körpers Arbeit geleistet wird, so verschwindet ein Teil dieser Energie, die Bewegung der Moleküle verlangsamt sich, und der Körper selbst kühlt sich ab. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs auch die Wärmeenergie eine endliche Gröfse ist, wennschon es bisher nicht gelungen ist, diesen Energievorrat zu erschöpfen, d. h. einem Körper seine ganze Wärmeenergie zu nehmen.

Die absolute Einheit der Wärmemenge ist diejenige Wärmemenge, die verbraucht werden mufs, um die absolute Arbeitseinheit zu erhalten.

Die C.G.S.-Einheit der Wärmemenge ist das Erg. Zum Messen der Wärmeenergie oder einfacher ausgedrückt der Wärmemenge werden auch noch andere Einheiten gebraucht, z. B. die grofse oder die kleine Kalorie: es sind dies diejenigen Wärmemengen, welche dazu erforderlich sind, ein Kilogramm resp. ein Gramm Wasser um 1° C. zu erwärmen. Bezeichnen wir mit Q den Zahlenwert einer gewissen Wärmemenge und mit R diejenige Arbeit, welche durch ihren Verbrauch erhalten wird. Man pflegt zu sagen, dafs die Wärme Q und die Arbeit R einander äquivalent sind. In welchen Einheiten auch immer die Wärme Q und die Arbeit R gemessen sein mögen, diese beiden Zahlen sind einander proportional, so dafs man

$$R = EQ \qquad (17)$$

setzen kann, wo E den Proportionalitätsfaktor darstellt. Setzt man

$$A = \frac{1}{E} \qquad (18)$$

so kommt

$$Q = AR \qquad (19)$$

Der Koeffizient E heifst das mechanische Wärmeäquivalent; es ist dies die Zahl Arbeitseinheiten, die einer Wärmeeinheit äquivalent sind, denn (17) giebt uns $R = E$ für $Q = 1$. Der reciproke Koeffizient A heifst das thermische Arbeitsäquivalent; es ist dies diejenige Zahl Wärmeeinheiten, welche einer Arbeitseinheit äquivalent ist, denn nach (19) hat man $Q = A$ für $R = 1$. Versuche, auf welche wir in der Wärmelehre ausführlicher eingehen werden, haben gelehrt, dafs, wenn man als Einheit der Wärmemenge die grofse Kalorie, als Arbeitseinheit das Meterkilogramm gelten läfst, $E = 426$ wird, d. h.

die grofse (Kilogramm-) Kalorie ist 426 Meterkilogrammen äquivalent . (20)

Mit Hülfe früher gefundener Relationen erhalten wir leicht den Zusammenhang zwischen der Kalorie und den absoluten Wärmeeinheiten. Aus diesen Relationen folgt, dafs ein Meterkilogramm gleich 98,1 Megaerg = 9,81 Joule ist; andererseits ist eine kleine Kalorie (0,001 grofse Kalorie) 0,426 Meterkilogrammen äquivalent. Somit ist

eine kleine (Gramm-) Kalorie = 41,6 Megaerg = 4,16 Joule; ein Joule = 0,24 kleine Kalorieen . . . (21)

In der Lehre von der Wärme soll diese Frage genauer erörtert und eine strengere Definition der „Kalorie“ gegeben werden.

III. Die strahlende Energie des Äthers. Wir sahen auf S. 10, dafs im Äther Störungen auftreten können, die sich von einem Orte zum anderen fortpflanzen. Derjenige Teil des Äthers, in welchem solche Störungen erfolgen, besitzt einen Energievorrat, welcher durch die

Wucht der Bewegung der Ätherteilchen gemessen wird. Eine Ausbreitung der Störung ist nichts anderes, als eine Übertragung der Energie von den einen Ätherteilchen auf die anderen. Die Geschwindigkeit v dieser Übertragung im freien Äther (dem sogenannten Vakuum im gewöhnlichen Sinne des Wortes) hängt von der Art der Störung, d. h. von der Form der übertragenen Bewegung selbst nicht ab und ist gleich

$$v = 300\,000 \text{ km in der Sekunde} = 3.10^{10} \text{ cm pro Sek.} \quad (22)$$

Als Beispiele für die strahlende Energie des Äthers können dienen das sichtbare Licht, die unsichtbaren Strahlen (die sogenannten ultraroten, die man früher Wärmestrahlen nannte, und die ultravioletten Strahlen) und die Hertzschen elektrischen Strahlen, die später betrachtet werden sollen.

IV. Die kinetische Energie des Äthers, welche elektrischer Strom genannt wird (elektrische Stromenergie). Der elektrische Strom stellt eine Erscheinung dar, für welche die Bedingungen, unter welchen sie auftritt, sehr wohl bekannt sind, ebenso auch die Gesetze, denen sie unterworfen ist.

Vom inneren Wesen dieser Erscheinung besitzen wir noch keine klare, von der Wissenschaft endgültig angenommene Vorstellung. Mit Sicherheit können wir nur soviel sagen, dafs der elektrische Strom einen besonderen Fall der Bewegungsenergie des Äthers darstellt, die man zur Erzeugung von Arbeit verwenden kann (Elektromotoren). Über den Charakter dieser Ätherbewegung und selbst über den Ort, an dem sie erfolgt, weifs man ebenfalls nichts Bestimmtes. Früher glaubte man, die elektrische Stromenergie sei ganz und gar in jenen Leitern enthalten (z. B. den Drähten), durch welche, wie man sich ausdrückt, „der Strom fliefst“. Es liegen aber Gründe vor, anzunehmen, dafs diese Energie gröfstenteils oder völlig in dem Äther des jene Leiter umgebenden Raumes enthalten sei.

B. Potentielle, latente Energie oder Energie der Lage. Wir finden in der Natur verschiedenartige Formen der Energie, d. h. der Fähigkeit, Arbeit zu leisten, die von der gegenseitigen Lage zweier oder mehrerer Körper abhängen. Theoretisch genommen kann ein einzelner materieller Punkt nur kinetische (Bewegungs-) Energie besitzen; potentielle Energie jedoch kann nur ein System von mindestens zwei materiellen Punkten besitzen. Hierbei ist es nötig, dafs zwischen den beiden materiellen Punkten das Bestreben, sich einander zu nähern, besteht, oder das Bestreben, sich voneinander zu entfernen, oder überhaupt, dafs die Anwesenheit eines Körpers eine auf den anderen Körper wirkende Kraft hervorrufe. Die Frage nach den Entstehungsursachen einer solchen Kraft möge dabei unberücksichtigt bleiben.

a) Wenn zwei Körper sich einander zu nähern streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „anziehen“, so kann dieses Streben zur Arbeitsquelle werden, die sich entweder im Überwinden äufserer, eine Annäherung hindernder Widerstände, oder im Überwinden der Trägheit dieser Körper zeigt, welche letzteren sodann eine beschleunigte Bewegung erhalten. Der Energievorrat ist offenbar um so gröfser, je weiter die Körper voneinander entfernt sind und nimmt ab, wenn sich die Körper, unter Arbeitsleistung, einander nähern. Somit sehen wir, dafs der Energievorrat in diesem Falle von der gegenseitigen Lage der Körper abhängt.

b) Wenn zwei Körper sich voneinander zu entfernen streben, oder, wie man zu sagen pflegt, sich gegenseitig „abstofsen“, so kann auch dieses Bestreben zur Arbeitsquelle werden. Der Energievorrat ist hier um so gröfser, je näher die Körper einander sind; er nimmt in dem Mafse ab, als sich die Körper voneinander entfernen. Es ist klar, dafs der Energievorrat auch in diesem Falle von der wechselseitigen Lage der Körper abhängt.

Es ist auch leicht zu verstehen, weshalb die Energie in diesen beiden Fällen (verborgene) latente Energie oder Energie der Lage genannt wird. Die Frage nach der Ursache des Bestrebens der Körper, sich zu nähern oder zu entfernen, werden wir an dieser Stelle nicht erörtern. Wir wollen vielmehr die verschiedenen Formen der potentiellen Energie betrachten.

I. Die Energie von Massen, welche nach dem allgemeinen Gravitationsgesetze angezogen werden. Jedes sich nicht berührende Massenpaar besitzt, da zwischen ihnen die Schwere wirkt, Energie der Lage. So besitzen die Sonne und ein beliebiger Planet oder aber Erde und Mond zusammengenommen einen sehr grofsen Vorrat an potentieller Energie. Man pflegt von der Energie eines gehobenen Körpers zu reden, denn jeder auf eine gewisse Höhe über die Erdoberfläche gehobene Körper ist im stande, bei seinem Herabfallen Arbeit zu leisten. Streng genommen besitzt aber nicht der gehobene Körper diese Energie, sondern das System der beiden sich anziehenden Körper, nämlich die Erde und der gehobene Körper.

Die potentielle Energie der Anziehung eines Systems von Körpern oder materiellen Punkten hängt nur von ihrer gegenseitigen Lage ab (I. Energieprinzip). Bei jeder Verdichtung eines Systems wird eine Arbeit geleistet, deren Gröfse nur von der anfänglichen und endgültigen Anordnung der Teilchen abhängt. Beim Übergange der einen Weltkörper bildenden Substanz aus dem ursprünglichen Urnebelzustand in einen dichteren, erfolgt ein ungeheurer Verlust an potentieller Energie, auf deren Kosten eine äquivalente Arbeit geleistet wird. Die potentielle Energie der gehobenen Gewichte einer Wanduhr dient als Quelle

der von der Wanduhr zu leistenden Arbeit. Die potentielle Energie der Wolken dient als Quelle für die Arbeit der Wassermühlen u. s. w.

II. Die Energie der Lage homogener Teilchen. Zwischen den Teilchen homogener Körper wirken besondere Kräfte, deren Charakter noch wenig bekannt ist. Je nach den Bedingungen äufsern die Teilchen das Bestreben, sich zu nähern oder voneinander zu entfernen, und hierin liegt die Quelle für den potentiellen Energievorrat der Teilchen.

Hierher gehört die Energie eines elastisch veränderten Körpers. Eine Feder hat, je nach ihrer Formänderung, sei sie nun gebogen, zusammengedrückt, gereckt oder gedreht, die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wobei sie sich zurechtbiegt, ausdehnt, zusammenzieht oder losdreht, verliert aber hierbei einen Teil des früheren Energievorrates, d. h. der Fähigkeit zu weiterer Arbeitsleistung. Die Änderung in der gegenseitigen Lage der Teilchen, welche die Deformation des elastischen Körpers begleitet, ist hier die Ursache für das Zustandekommen von potentieller Energie.

Hierher gehört auch jene Lagenenergie der Teilchen, welche sich besonders auffallend beim Übergang der Körper aus dem festen in den flüssigen und aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand, sowie bei den entgegengesetzten Vorgängen äufsert, weniger auffallend jedoch bei jeder Volumen- oder Temperaturänderung eines Körpers zu Tage tritt. Wir werden weiter unten sehen, dafs die aus der Elementarphysik unter dem Ausdrucke „latente Wärme“ bekannte Gröfse sich im engen Zusammenhang mit der betrachteten Form der potentiellen Energie befindet.

III. Chemische Energie. Ein System von zwei Körpern, die sich chemisch vereinigen können, vermag Arbeit zu leisten. Kohle und Sauerstoff, Wasserstoff und Chlor, Schwefelsäure und Wasser besitzen, paarweise genommen, einen Vorrat an chemischer Energie, den man zur Erzeugung von Arbeit benutzen kann (so ist z. B. das Verbrennen der Kohle die Arbeitsquelle in den Dampfmotoren). Bildet sich aus Atomen ein Molekül, so besitzt das letztere nicht mehr denjenigen Vorrat an chemischer Energie, der im Augenblicke, als sich das Molekül bildete, zur Erzeugung von Arbeit verbraucht wurde. Bemerkt sei hier noch, dafs zwei Atome ein und desselben Stoffes ebenfalls potentielle Energie besitzen, falls das Molekül dieses Stoffes zwei oder mehr Atome enthält. So besitzen z. B. zwei Wasserstoffatome vor ihrer Vereinigung zum Molekül H_2 eine besondere potentielle Energie; dasselbe bezieht sich auch auf zwei J-Atome, bevor sie sich zu J_2 verbunden haben. Es zeigt sich sogar, dafs die potentielle Energie, die bei der Bildung eines Moleküls H_2 und eines Moleküls J_2 verbraucht wird, gröfser ist, als die zur Bildung von zwei Molekülen der Verbindung HJ (Jodwasserstoff). Zur eben betrachteten Form

der potentiellen Energie gehört auch die Energie explosibler Mischungen, z. B. des Schiefspulvers.

IV. Elektrostatische Energie. Wir hatten gesehen (S. 10), dafs im Äther ebenso wie in der Materie Deformationen auftreten können. Deformierter Äther enthält einen Vorrat an potentieller Energie, analog der Energie eines elastisch veränderten Körpers. Der Raum, in welchem sich der deformierte Äther vorfindet und der einen besonderen Fall eines Kraftfeldes darstellt, heifst ein elektrisches Feld. Die Materie zeigt, in solchen Raum gebracht, Erscheinungen verschiedener Art. Gehört sie zu den sogenannten Leitern (z. B. den Metallen), so stützen sich die Deformationen (Spannungen) des Äthers auf ihre Oberfläche, infolgedessen sie einer besonderen Art von Druck unterliegt, welcher sie veranlassen kann, sich in der einen oder anderen Richtung zu bewegen. Einen solchen Leiter nennt man „elektrisiert“ und man pflegt ihm diejenige Energie zuzuschreiben, welche in Wirklichkeit im umgebenden Äther enthalten ist. Wenn sich mehrere Leiter im elektrischen Felde befinden, so werden diese Körper je nach der Verteilung der Deformationen entweder sich zu nähern oder voneinander zu entfernen streben, d. h. gleichsam sich anziehen oder abstofsen. Im Inneren von Leitern ist eine stabile Deformation des Äthers nicht möglich; im Inneren von Nichtleitern aber, den sogenannten Dielektricis, kann der Äther Deformationen unterliegen und sagt man dann, das Dielektrikum sei polarisiert; auch in ihm zeigt sich das Streben nach einer Bewegung im elektrischen Felde in dieser oder jener Richtung. Die elektrische Energie der Ätherdeformation kann sowohl zur Arbeit für den Transport von Leitern und Nichtleitern als auch zur Arbeit des Hervorrufens von neuen Ätherstörungen verbraucht werden.

Eine „geladene“ Leydener Flasche ist ein Körper, welcher einen Vorrat an elektrischer Energie enthält; diese besteht fast ausschliefslich aus der potentiellen Energie des deformierten Äthers, der sich im Glase der Flasche befindet. Beim „Entladen“ kann auf Kosten des Vorrats an elektrischer Energie Arbeit geleistet, z. B eine Glasplatte durchschlagen werden.

V. Magnetische Energie. Wir wollen auch über diese Energieform einige Worte sagen, wenngleich sie wahrscheinlich mit der im Vorhergehenden betrachteten elektrischen Stromenergie identisch ist. Die Pole natürlicher und künstlicher Magnete suchen sich entweder zu nähern (ungleichnamige Pole) oder voneinander zu entfernen (gleichnamige Pole). Hieraus folgt, dafs ein System von zwei Magneten eine besondere Form von potentieller Energie besitzt, die wir magnetische Energie nennen wollen. Auch sie ist zweifellos im wesentlichen eine Energie des Äthers in jenem Raume, welcher die Magnete umgiebt. Dieser Raum stellt ebenfalls ein Kraftfeld dar und heifst Magnetfeld. Wir werden aber später sehen, dafs der Raum, welcher elektrische

Ströme umgiebt, sich seinen Eigenschaften nach durch nichts von dem einen Magneten umgebenden Raume unterscheidet; folglich ist auch er ein Magnetfeld. Hieraus läfst sich die innere Identität der elektrischen Stromenergie mit der sogenannten magnetischen Energie folgern.

Wir haben nunmehr die Betrachtung der verschiedenen Energieformen beendet und wollen hieran noch eine Bemerkung knüpfen: Es ist überaus wahrscheinlich, dafs eine potentielle Energie in der Welt überhaupt nicht existiert, dafs es nur eine Energie der Bewegung geben kann, und dafs in allen Fällen, wo das Vorhandensein von Energie uns von einer bestimmten Anordnung der Körper abzuhängen scheint, wir es in Wirklichkeit mit einer besonderen Bewegungsform zu thun haben, wobei uns freilich nicht bekannt ist, was sich bewegt und welcher Art der Charakter der Bewegung ist. Einige Energieformen, die früher zu den potentiellen gerechnet wurden, zählt man heute bereits zu den kinetischen. So wurde z. B. die Energie eines komprimierten Gases, das offenbar Arbeit zu leisten vermag, früher zur potentiellen Energie gerechnet. Auf S. 42 ist gezeigt worden, wie man sich heutzutage den Gasdruck und das Ausdehnungsbestreben der Gase denkt. Aus jener Erklärung ergiebt sich, dafs die Energie eines komprimierten Gases nichts anderes ist als die Bewegungsenergie seiner Moleküle, identisch mit seiner Wärmeenergie, folglich eine Form der kinetischen Energie ist.

§ 7. Erhaltung der Energie. II. Energieprinzip. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir uns mit der Energie, als einer Fähigkeit, Arbeit zu leisten, bekannt gemacht; eine Arbeit aber besteht entweder im Überwinden einer die Bewegung eines Körpers hemmenden Kraft oder im Überwinden der Trägheit eines Körpers, d. h. in einer Vergröfserung seiner Geschwindigkeit. Ferner haben wir verschiedene Formen der kinetischen und potentiellen Energie betrachtet.

Äquivalente Energiemengen von verschiedener Form nennen wir solche Mengen, die einander numerisch gleich sind, d. h. der Fähigkeit, gleiche Arbeit zu leisten, entsprechen. Hiernach können wir das II. Prinzip formulieren:

II. Energieprinzip: Energie kann weder entstehen noch vergehen; jedoch kann die Energie von einer Form in eine äquivalente Menge Energie einer anderen Form übergehen. Dieses ist das Prinzip von der Erhaltung der Energie.

Das eingehende Studium der uns umgebenden Erscheinungen hat zur Entdeckung dieses wichtigen Prinzips geführt; es bildet eine der Hauptgrundlagen der heutigen Physik und hat in ihr dieselbe Bedeutung wie das Prinzip von der Erhaltung der Materie, auf welches sich die Chemie stützt.

Aus dem II. Energieprinzip ergiebt sich eine ganze Reihe von Sätzen.

Folgesatz 1. Als Resultat einer jeden geleisteten Arbeit R mufs eine dieser Arbeit äquivalente Energiemenge irgend welcher Form erscheinen. Das ist aus folgendem ersichtlich: Die Arbeit R konnte nur auf Kosten irgend eines Energievorrates geleistet werden; dabei wurde jener Vorrat um die Gröfse J, welche numerisch gleich R ist, verringert. Das zweite Energieprinzip sagt aber aus, dafs Energie nicht verschwinden, sondern nur in eine andere Form übergehen kann. Daher mufs die Abnahme des gegebenen Energievorrates um J mit einem gleichzeitigen Auftreten einer ebenso grofsen Energiemenge J von derselben oder einer anderen Form verbunden sein und dieses kann man als das Resultat oder die Folge der geleisteten Arbeit R ansehen.

Alle Erscheinungen der uns umgebenden Natur bestehen in Umwandlungen einer Energieform in die andere, sobald ihnen nur überhaupt das Merkmal von etwas sich veränderndem anhaftet. Die Arbeit erscheint nur als ein Bindeglied: sie wird auf Kosten derjenigen Energie geleistet, deren Vorrat sich verringert; als Resultat erscheint aber dafür eine äquivalente Vorratszunahme einer anderen Energie. Ein System (oder Körper), welches die erstere Art von Energievorrat besitzt, giebt Energie ab und „leistet Arbeit". Ein System, in welchem sich neue Energie ansammelt, erscheint als das Objekt, an welchem die übrige Welt Arbeit leistet, indem sie von diesem System ausgehende Widerstände überwindet; im letzteren Falle ist man übereingekommen, zu sagen, das System leiste negative Arbeit.

Folgesatz 1 zeigt, dafs jedes Überwinden eines Widerstandes mit dem Auftreten irgend einer Form von Energie verbunden ist.

Für den Fall der Bewegungsenergie, nämlich für die Wucht einer Bewegung, sind bereits alle hier erwähnten Beziehungen vollkommen streng bewiesen: wir sahen, dafs die Arbeit, welche auf Kosten eines Vorrats an Wucht geleistet wird, durch diese Vorratsabnahme gemessen wird, und dafs umgekehrt ein System, an welchem die Aufsenwelt Arbeit leistet, welches also selbst negative Arbeit erzeugt, eine gewisse Wucht erwirbt; diese wird durch die im Überwinden der Trägheit des Systems bestehende Arbeit gemessen. Hierbei setzen wir offenbar voraus, dafs die gesamte Arbeit ausschliefslich zur Vergröfserung der Geschwindigkeit der Systemteile verbraucht wird.

Was für die Wucht streng bewiesen wurde, erstreckt sich nach dem zweiten Energieprinzip auf alle Energieformen: das Überwinden eines Widerstandes ist immer vom Auftreten einer äquivalenten Energiemenge irgend welcher Form begleitet.

Folgesatz 2. Wenn ein System zum ursprünglichen Zustande zurückkehrt, so ist die ganze Arbeit, welche die von

ihm ausgehenden Kräfte geleistet haben, gleich Null. Das I. Energieprinzip lehrt uns, daſs der Energievorrat eines Systems in diesem Falle seinen ursprünglichen Wert annimmt; daher muſs die von ihm geleistete Arbeit gleich der an ihm von der übrigen Welt geleisteten Arbeit sein, die wir als negative Arbeit des Systems selbst bezeichneten. Die Summe der Arbeiten des Systems ist folglich gleich Null.

Das Prinzip von der Erhaltung der Energie kann in der allgemeinsten Form nicht bewiesen, d. h. nicht aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet werden. Wäre es möglich nachzuweisen, daſs alle in der Natur wirkenden Kräfte Zentralkräfte sind, so wäre es auch möglich, das Prinzip von der Erhaltung der Energie in vollster Strenge abzuleiten. Zur Zeit kann man dies aber noch nicht und man muſs das obige Prinzip als eine auf induktivem Wege gefundene Wahrheit, die von allen Erscheinungen der uns umgebenden Natur bestätigt wird, gelten lassen.

Folgesatz 3. Die Energie eines Systems, welches mit der übrigen Welt in keinem mechanischen Zusammenhang steht, ist eine konstante Gröſse. Der ganze Energievorrat eines Systems, der aus verschiedenartigen Teilen bestehen kann, kann allen möglichen Umformungen unterliegen; die totale Energiemenge aber bleibt konstant.

Man darf diesen Satz nicht auf das ganze Universum anwenden und etwa sagen, „die Energie des Universums ist konstant“, denn vom Weltganzen wissen wir nichts und haben daher auch kein Recht, auf dasselbe zu beziehen, was empirisch nur für einen, unseren Beobachtungen zugänglichen Teil desselben gefunden ist.

Wir hatten erwähnt, daſs wir es in den Erscheinungen der uns umgebenden Natur mit kontinuierlichen Umwandlungen der Energieformen zu thun haben. Es wäre überflüssig, dies an einer groſsen Zahl von Beispielen zu erklären; einige wenige mögen genügen. Das Herabfallen eines Körpers: hier handelt es sich um die Verwandlung von potentieller Energie eines gehobenen Körpers in kinetische Energie und hernach beim Aufschlagen gegen die Erde in Wärme, die sich wiederum in strahlende Energie verwandelt. Die Schwingung einer elastischen Platte: hier haben wir ununterbrochene Übergänge der Energie des elastisch veränderten Körpers in Bewegungsenergie und umgekehrt. Der Dampfmotor: die chemische Energie des Heizmaterials wird in Wärmeenergie des Dampfes und darauf in Bewegungsenergie der Maschinenteile verwandelt. Verdichtung eines Systems, z. B. eines Weltnebels bei Bildung eines Himmelskörpers: die potentielle Energie der sich anziehenden Massen verwandelt sich in Energie der fortschreitenden Bewegung und danach, wenn ein Zusammenstoſs der Teilchen stattgefunden hat, in Wärmeenergie. In den Pflanzen verwandelt sich die strahlende Energie der Sonnenstrahlen in chemische Energie der entstehenden Verbindungen, diese konzentriert sich bei

Nahrungsaufnahme durch Menschen und Tiere in den Muskeln derselben und stellt dort einen Energievorrat dar, über den ihr Wille in bestimmter Weise verfügt. Bei Arbeitsleistung von Mensch und Tier vermindert sich dieser Vorrat. Wir werden im folgenden vielen Beispielen von Energiewandlungen begegnen und viele Anwendungen des Prinzips von der Erhaltung der Energie kennen lernen.

§ 8. **III. Energieprinzip.** Die Umwandlungen der Energie aus einer Form in die andere sind noch einem Prinzipe unterworfen, welches in der Folge genauer untersucht werden soll, auf welches aber der Vollständigkeit halber schon hier hingewiesen sein möge.

III. Energieprinzip. Die Energieumwandlungen sind gewissermafsen an eine Richtung gebunden. Einige Umwandlungen können vollständig sein und von selbst vor sich gehen, andere jedoch nur unter bestimmten Bedingungen und kann dabei nur ein Teil des gegebenen Energievorrates sich der betrachteten Umwandlung unterziehen. So kann z. B. die Umwandlung von „Arbeit in Wärme" oder genauer eines Vorrates von Energie irgend welcher Form, der zur Erzeugung dieser Arbeit verbraucht war, in Wärme von selbst vor sich gehen, und kann hierbei die ganze Arbeit eine äquivalente Wärmemenge geben. Beim Auftreffen eines Steines auf den Boden verwandelt sich, falls keine Deformationsarbeit geleistet wird, seine gesamte Bewegungsenergie in Wärme; eben dasselbe geschieht bei jeglicher Art von Reibung, welche eine Bewegung verlangsamt. Die ganze Energie eines elektrischen Stromes kann sich ohne weiteres in Wärme verwandeln. Dagegen ist es nicht möglich, in umgekehrter Richtung einen gegebenen Vorrat von Wärmeenergie zur Erzeugung von Arbeit zu verwenden, ohne dafs zugleich gewisse Nebenerscheinungen auftreten, wobei nur ein Teil des Vorrates an Wärmeenergie in nutzbringende Arbeit verwandelt wird; der andere Teil verliert die Fähigkeit, unter den gegebenen Umständen Arbeit zu leisten.

Ein anderes Beispiel ist die Energieverminderung einiger schnell bewegter Teilchen bei gleichzeitiger äquivalenter Energievermehrung anderer sich langsamer bewegenden Teilchen, oder, anders ausgedrückt, der Wärmeübergang vom wärmeren zum kälteren Körper. Auch dieser Übergang vollzieht sich beständig von selbst. Der Vorgang in umgekehrter Richtung aber ist nur unter bestimmten Bedingungen, die wir später betrachten wollen, möglich. Vorläufig begnügen wir uns mit diesem kurzen Hinweis auf die Bedeutung, welche die Richtung der Umwandlungen aus einer Energieform in die andere besitzt.

Viertes Kapitel.

Die harmonische Schwingungsbewegung.

§ 1. Der geometrische Ursprung der harmonischen Schwingungsbewegung. Aus der Zahl verschiedenartiger Bewegungen, mit denen man es beim Studium von physikalischen Erscheinungen zu thun hat, sind von besonderer Wichtigkeit die sogenannten periodischen Bewegungen. Dies sind solche Bewegungen, bei denen ein gegebener Punkt ein und dieselbe Bewegung, zu der er jedesmal dieselbe Zeit T braucht, eine unbestimmte Anzahl Male wiederholt. In welchem Augenblick man die Lage des Punktes, die Gröfse und Richtung seiner Bewegung bestimmt hat, ist gleichgültig; nach Ablauf der Zeit T befindet sich der Punkt an demselben Orte und besitzt sowohl der Gröfse als auch der Richtung nach die gleiche Geschwindigkeit wie früher. Die periodischen Bewegungen können unendlich verschiedenartig sein, sowohl in Bezug auf die Form der Bahn, auf welcher sich der Punkt bewegt, als auch in Bezug auf die Bewegung selbst; die einfachste hierher gehörige Bewegung ist die gleichförmige Kreisbewegung.

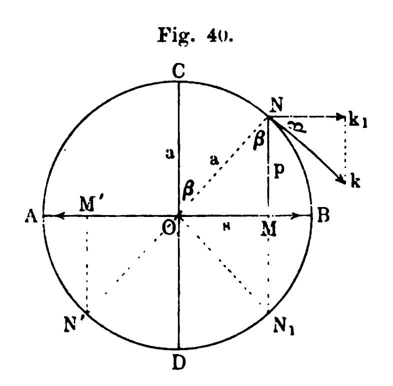
Von allen periodischen Bewegungen ist jedoch die wichtigste die sogenannte harmonische Schwingungsbewegung, denn jede periodische Bewegung kann aus der Zusammensetzung einer gröfseren oder geringeren (bisweilen auch unendlich grofsen) Zahl harmonischer Schwingungsbewegungen hervorgehen. Wie der Name zeigt, haben letztere Bewegungen den Charakter von „Schwingungen", d. h. der Punkt bewegt sich zwischen zwei bestimmten Grenzpunkten eines Kurvenabschnittes hin und her. Wir werden übrigens nur die Bewegungen auf einer geradlinigen Strecke oder einem Kreisbogen zu betrachten haben und wollen uns vorläufig darauf beschränken, den ersten Fall zu studieren, d. h. die geradlinige, harmonische Schwingungsbewegung; der Kürze halber soll im folgenden das Wort „geradlinige" immer fortgelassen werden.

Wir wollen zunächst die Frage nach den mechanischen Bedingungen, unter denen ein Massenpunkt die harmonische Schwingungsbewegung ausführt, bei Seite lassen und vor allem auf die geometrischen Bedingungen für ihr Zustandekommen verweisen.

Eine Kreislinie $ACBDA$ (Fig. 40 a. f. S.) sei gegeben und ihr Radius sei $OA = a$; auf dieser Kreislinie, durch deren Zentrum wir den Durchmesser AOB legen, bewege sich der Punkt N mit der konstanten Geschwindigkeit k. Die Bewegung, welche hierbei die Projektion M des Punktes N auf dem Durchmesser ($NM \perp AB$) ausführt

werden wir eine harmonische Schwingungsbewegung nennen. Der allgemeine Charakter dieser Bewegung ergiebt sich aus folgendem: Befindet sich N in C, so fällt Punkt M mit O zusammen; während N das erste Viertel CB der Kreislinie durchläuft, bewegt sich Punkt M von O nach B, wo M und N zusammenfallen; bewegt sich N sodann auf dem zweiten Viertelbogen BD, so geht M rückwärts von B nach O; ferner durchläuft N das dritte Viertel DA, während sich M von O nach A bewegt; endlich entspricht der Bewegung des Punktes N auf dem vierten Viertelbogen AC die Rückkehr des Punktes M von A nach O. Im weiteren wiederholt sich diese Bewegung zwischen den Endpunkten A und B eine unbestimmte Anzahl Male.

Fig. 40.



Der äufserste Abstand $OA = OB = a$, um welchen sich der Punkt M aus seiner Mittellage in O entfernt, heifst **Amplitude** der Schwingungsbewegung. Bezeichnen wir die zur Vollbringung einer vollen Schwingung erforderliche Zeit mit T; sie heifst die **Periode** (Schwingungsdauer) der Schwingung. Zu Anfang und Ende der Zeit T befindet sich der Punkt an einem und demselben Orte und hat sowohl der Gröfse als auch der **Richtung** nach die gleiche Geschwindigkeit. So kann z. B. der Punkt in der Zeit T den Weg $OBOAO$ oder $MBMOAOM$ zurücklegen; zur selben Zeit beschreibt N den vollen Kreis und zwar $CBDAC$ resp. NBN_1DACN.

Die Zahl der in der Zeiteinheit vollführten Schwingungen bezeichnet man als **Schwingungszahl**.

Zwischen der Amplitude a, der Geschwindigkeit k des Punktes N und der Zeit T besteht ein einfacher Zusammenhang, den wir erhalten, sobald wir in Betracht ziehen, dafs Punkt N bei gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit k in der Zeit T den Weg $2\pi a$ durchläuft. Das giebt uns den Ausdruck

$$2\pi a = kT \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

§ 2. **Der durchlaufene Weg und die Schwingungsphase bei der harmonischen Schwingungsbewegung.** Bezeichnen wir den variablen Abstand OM des Punktes M von seiner Mittellage O mit s und stellen wir s als eine Funktion der Zeit t dar, die von dem Augenblicke an gerechnet werde, wo Punkt M sich eben in O und auf dem Wege nach B befindet. Die Gröfsen s wollen wir in dieser Richtung als positiv betrachten. Bezeichnen wir $\angle CON = \angle ONM$ mit β. Aus

Fig. 40 ist ersichtlich, dafs

$$s = a \sin \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

In der Zeit t ist Punkt N von C nach N gelangt; da er sich gleichförmig bewegt, so mufs sich der Bogen CN zur ganzen Peripherie verhalten wie t zu T. Die Bogen verhalten sich wie die Zentriwinkel, folglich ist $\frac{\beta}{2\pi} = \frac{t}{T}$ und hieraus kommt

$$\beta = 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein, so kommt

$$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Dies ist die Grundformel in der Lehre von der harmonischen Schwingungsbewegung; sie bestimmt den variablen Abstand s als Funktion der Zeit t.

Die Winkelgröfse β heifst die Phase und wir werden Ausdrücke gebrauchen wie etwa den folgenden, „der Punkt M befindet sich in einer bestimmten Phase". Die Phase bestimmt sowohl die Lage des Punktes M als auch die Richtung seiner Bewegung. Ein und derselben Lage entsprechen im allgemeinen zwei Phasen während jeder einzelnen Schwingung, d. h. im Verlaufe der Zeit T. So ist z. B. die Phase des in M befindlichen, nach B hin sich bewegenden Punktes gleich $\angle CON$; ist der Punkt auf dem Wege nach O wiederum in M angelangt, so ist seine Phase gleich $\angle CON_1$. Eine Phasenänderung um den Winkel $\pm 2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist, ändert weder die Lage des Punktes M, noch auch die Richtung seiner Bewegung. Deshalb werden auch Phasen, die um $\pm 2n\pi$ (um eine ganze Zahl Vollkreise) differieren, nicht selten als gleiche Phasen betrachtet. Die Formeln (3) und (4) geben die folgenden Beziehungen zwischen t, β und s.

$$\left.\begin{array}{llllll} t = 0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\ \beta = 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi\ (0) \\ s = 0 & a & 0 & -a & 0 \end{array}\right| \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Phasen, die um π, oder was dasselbe ist, um $\pm (2n + 1)\pi$ differieren, werden entgegengesetzte Phasen genannt. Verlängert man die Gerade NO bis N' und macht $N'M' \perp AB$, so findet man den Punkt M', welcher sich nach links bewegt und sich in einer zum Punkte M (der sich nach rechts bewegt) entgegengesetzten Phase befindet. Die Lagen A und B, oder auch die beiden Lagen O (bei verschiedener Richtung der Geschwindigkeit), entsprechen entgegengesetzten Phasen. Es ist klar, dafs man von jeder beliebigen Phase aus nach

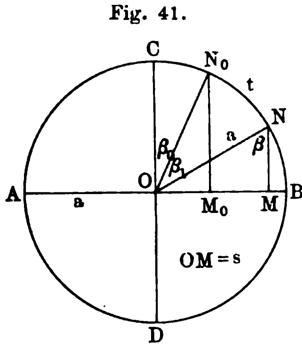
der Zeit $\frac{T}{2}$ zu der ihr entgegengesetzten Phase gelangt. Da

$$s = a \sin(\beta \pm \pi) = - a \sin \beta$$

ist, so müssen offenbar entgegengesetzten Phasen der Gröfse nach gleiche, dem Vorzeichen nach verschiedene Entfernungen s und gleichzeitig entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten entsprechen.

Verallgemeinern wir nun die Formel (4) unter der Annahme, dafs die Zeit von einem beliebigen Augenblicke an gerechnet wird und möge sich unser Punkt für $t = 0$ in M_0 (Fig. 41) befinden; zieht man $M_0 N_0 \perp AB$ und verbindet N_0 mit O, so findet man die sogenannte Anfangsphase $\beta_0 = \angle CON_0$. Nehmen wir an, der Punkt sei während der Zeit t von M_0 nach M gelangt; in eben dieser Zeit hat der sich gleichförmig auf der Kreislinie bewegende Punkt den Bogen N_0N durchlaufen, wo $NM \perp AB$ ist. Es sei $\angle N_0ON = \beta_1$. Die Phase des Punktes M bezeichnen wir mit β; es ist $\beta = \angle CON = \angle ONM$ und wie früher $s = OM = a \sin \beta$. Es ist aber $\beta = \angle CON_0 + \angle N_0ON = \beta_0 + \beta_1$. Für β_1 gilt $\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T}$; folglich ist $\beta = \beta_1 + \beta_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \beta_0$; setzt man diesen Ausdruck in $s = a \sin \beta$ ein, so kommt

Fig. 41.



$$s = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0\right) \quad \cdots \cdots \quad (6)$$

Rechnet man die Zeit von dem Momente an, wo sich der Punkt in der Grenzlage B befindet, so ist $\beta_0 = \pi : 2$; es ist dann

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \quad \cdots \cdots \quad (7)$$

woraus sich für $t = 0$, $s = a$ ergiebt. Formel (6) zeigt, dafs das Zeitintervall τ zwischen dem Moment, wo sich der Punkt in O befindet und sich eben nach der positiven Seite hin (nach B) bewegt und dem Momente $t = 0$, von dem an wir die Zeit rechnen, mit der Anfangsphase β_0 und der Form unserer Funktion $s = f(t)$ in folgender Weise verknüpft ist:

$\tau = 0$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	
$\beta_0 = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi(0)$	(8)
$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$	$a \cos 2\pi \frac{t}{T}$	$-a \sin 2\pi \frac{t}{T}$	$-a \cos 2\pi \frac{t}{T}$	$a \sin 2\pi \frac{t}{T}$	

§ 3. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Energie der harmonischen Schwingungsbewegung. Die Geschwindigkeit v des Punktes M, welcher die harmonische Schwingungsbewegung vollführt, kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Auf Grund des allgemeinen Ausdrucks für die Geschwindigkeit (8) auf S. 60 und mit Hülfe von Formel (44) auf S. 46 finden wir aus (4)

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Bezeichnet man die Phase überhaupt mit β, so erhält man nach (1) auf S. 132 $v = k \cos\beta$. Für $\beta = 0$ erhält man die Geschwindigkeit $v = k$, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher M (Fig. 40) durch seine Mittellage O geht, ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich Punkt N auf der Kreislinie gleichförmig bewegt. Unsere Formel ($v = k\cos\beta$) ist unmittelbar aus (44) abgeleitet worden, sie kann indes auch erhalten werden, wenn man beachtet, dafs MN (Fig. 40) beständig senkrecht zu AB bleiben mufs. Hieraus folgt nämlich, dafs die zu AB parallele Komponente k_1 der Geschwindigkeit k, gleich der Geschwindigkeit v des Punktes M sein mufs. Es ist aber $\angle k_1 N k = \beta$, folglich $v = k_1 = k\cos\beta$. Setzt man $MN = p$, so kommt

$$v = k\cos\beta = \frac{2\pi}{T} a\cos\beta = \frac{2\pi}{T} p \quad \ldots \quad (10)$$

Vorstehende Formel läfst eine klare Vorstellung von dem Gesetze gewinnen, nach dem sich die Geschwindigkeit des in harmonischer Schwingungsbewegung befindlichen Punktes ändert: seine Geschwindigkeit ist nämlich proportional der Senkrechten p zum Durchmesser AB.

In den Punkten A und B ist die Phase $\beta = \frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{3\pi}{2}$, die zugehörige Geschwindigkeit ist nach (10) $v = 0$.

Die Beschleunigung w des Punktes M wird aus dem allgemeinen Ausdrucke (27) auf S. 67 und der Formel (45) auf S. 47 gewonnen:

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Formel (4) ergiebt

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Wir sehen hieraus, dafs die Beschleunigung proportional dem Abstande des Punktes von seiner Mittellage O und fortwährend nach diesem Punkte O hin gerichtet ist, denn für $s > 0$ ist w negativ, d. h. von B nach O gerichtet, für $s < 0$ ist w positiv, d. h. von A nach O gerichtet. Für den Punkt O gilt $w = 0$; in den Punkten A und B erreicht die Beschleunigung ihren Maximal-

wert $\pm \frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Setzt man

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so ist

$$w = -cs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Die vier Gröfsen a, T, $v_0 = k$ und c sind durch die beiden Gleichungen (1) und (13) miteinander verknüpft. Aus ihnen ergiebt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und

$$v_0 = k = \frac{2\pi a}{T} = a\sqrt{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Die Formeln (10) und (13) ergeben

$$v = p\sqrt{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

oder, da $p^2 = a^2 - s^2$ ist (vergl. Fig. 40),

$$v^2 = c\,(a^2 - s^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Entfernung s ausgedrückt; nach (18) und (16) erhält man noch

$$v^2 + cs^2 = v_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Wir haben im vorhergehenden die geometrischen Bedingungen betrachtet, unter denen eine harmonische Schwingungsbewegung zu stande kommt und einige Eigenschaften derselben erörtert. Es ist uns jetzt nicht mehr schwer, auch die mechanischen Bedingungen festzusetzen, unter denen ein materieller Punkt mit der Masse m eine derartige Bewegung vollführt; es ist dies ein Gesetz, nach welchem auf die Masse m eine äufsere Kraft f wirken mufs, damit diese Masse unter dem Einflusse der ersteren eine harmonische Schwingungsbewegung vollziehe. Auf Grund der allgemeinen Formel $f = mw$ [vergl. (5) auf S. 77] haben wir aus (14)

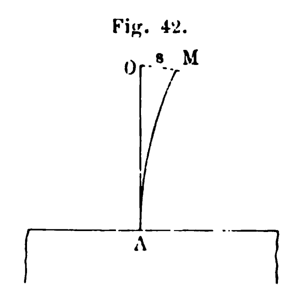
$$f = -cms \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Ein materieller Punkt M vollführt eine harmonische Schwingungsbewegung um eine gewisse Mittellage O, wenn er sich unter dem Einflusse einer Kraft befindet, welche stets nach dem Punkte O gerichtet und der Gröfse nach direkt proportional dem Abstande des Punktes M von O ist. Hierbei mufs sich Punkt M anfangs entweder in Ruhe befinden, in einer gewissen Entfernung a von O, oder, wenn er sich in O befindet, eine nach Gröfse und Richtung willkürliche Geschwindigkeit v_0 besitzen, oder endlich, wenn er sich in einem beliebigen Punkte befindet, eine

Geschwindigkeit besitzen, die der Richtung nach mit der Geraden OM zusammenfällt. Die Dauer einer vollen Schwingung hängt nur vom Koeffizienten c ab, der im Ausdruck (20) für die Kraft vorkommt, während die Amplitude a [vergl. (16)] von c und von der Geschwindigkeit v_0 abhängt.

Es lassen sich viele Beispiele solcher Kräfte anführen, die auf einen Punkt einwirken und proportional der Entfernung desselben von einer gewissen Mittellage sind. So kann, wenn auch nur in erster Annäherung, die Existenz solcher Kräfte sehr oft zugegeben werden, falls der materielle Punkt M im normalen Ruhezustande mit einem Punkt O zusammenfällt und bei seiner Entfernung aus O äufsere Kräfte, die sich diesem Entfernen widersetzen, ihn nach O zurückzubringen suchen. Etwas derartiges kommt bei geringfügigen Formveränderungen fester Körper vor, wenn elastische Kräfte die veränderte Form wieder herzustellen suchen. Es sei z. B. der elastische Stab AO (Fig 42) im Punkte A festgeklemmt. Biegt man den Stab so, dafs O nach M gelangt und der Stab die Form AM annimmt, so wird das Ende M in der Weise nach O zurückstreben, als wenn eine von M nach O gerichtete Kraft auf dasselbe wirkte. Ist der Bogen $OM = s$ klein, so kann man die Kraft dem Abstande s proportional setzen und deshalb wird das Ende M des Stabes eine harmonische Schwingungsbewegung um O vollführen, sobald man es nur zur Seite biegt und sodann sich selbst überläfst. Diese Bewegung geht freilich nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kreisbogen vor sich.

Fig. 42.



Die kinetische Energie J_0 der Masse m im Augenblicke, wo sie durch die Ruhelage geht, ist gleich $J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ oder [vergl. (16)]

$$J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} c a^2 m \quad \cdots \quad (21)$$

In der Entfernung s von O hat man für die kinetische Energie [vergl. (18)]

$$J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m c (a^2 - s^2) = J_0 - \frac{1}{2} m c s^2 \quad \cdots \quad (22)$$

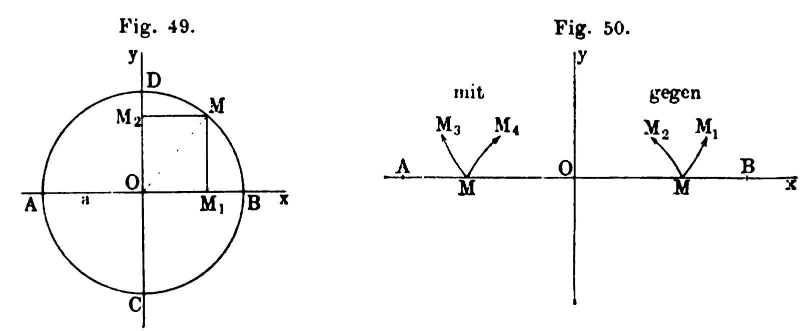
Die letzte Formel lehrt, dafs zugleich mit der Entfernung des Punktes aus seiner Gleichgewichtslage eine potentielle Energie J_p entsteht, die gleich ist

$$J_p = \frac{1}{2} m c s^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

schwindigkeit k, mit der sich der Punkt bewegt, wird durch die Formel $k = \frac{2\pi a}{T}$ gegeben [vergl. (1) auf Seite 132].

5. Beim Übergang zum allgemeinen Falle, wo φ willkürlich gewählt ist, sei darauf hingewiesen, wie man die Richtung, in welcher sich der Punkt auf der Ellipse bewegt (ob mit, ob gegen den Uhrzeiger, wie man es kurz ausdrücken könnte), zu bestimmen hat.

Fig. 49. Fig. 50.



Zu diesem Zwecke hat man zu bestimmen, wo sich Punkt M (Fig. 50) befindet, wenn die zweite seiner Teilbewegungen (in der Richtung der positiven y) beginnt und wohin ungefähr seine weitere Bewegung gerichtet sein wird. Die Bedingung, dafs der Ellipsenmittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten zusammenfällt, giebt uns die gesuchte Bewegungsrichtung.

a) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach B; die Bewegung erfolgt nach MM_1, d. h. gegen den Uhrzeiger [1]).

b) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_2, d. h. gegen den Uhrzeiger.

c) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach A; die Bewegung erfolgt nach MM_3, d. h. mit dem Uhrzeiger.

d) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_4, d. h. mit dem Uhrzeiger.

[1]) Eine drehende Bewegung, welche in derjenigen Richtung erfolgt, in welcher sich der Zeiger einer Uhr bewegt, soll im folgenden der Kürze halber als Bewegung „mit dem Uhrzeiger", die entgegengesetzte als Bewegung „gegen den Uhrzeiger" bezeichnet werden.

Schwingungsbewegung längs der Geraden AB und um den auf ihr liegenden Punkt O aus. Die Schwingungszeit bezeichnen wir mit T, die Amplitude mit a. Die Entfernung y_1 des Punktes M von O im Momente t wird dann nach Formel (6) auf Seite 134 ausgedrückt durch

Fig. 44.

$$y_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

wo β_1 die Anfangsphase ist. Nehmen wir ferner an, der Punkt O selbst vollführe gleichzeitig eine harmonische Schwingungsbewegung mit derselben Periode T, aber einer anderen Amplitude b um den Punkt O_1, der auf der Ebene unbeweglich gedacht ist. Diese letztere Bewegung erfolge ebenfalls in der Richtung von AB, falle also mit der ersteren der Richtung nach zusammen.

In der Fig. 44 fallen die Punkte O und O_1 zusammen, d. h. Punkt O hat seine Bewegung noch nicht begonnen. Man kann sich nun vorstellen, die Gerade selbst schwinge nach links und rechts, wobei jeder ihrer Punkte eine Schwingung um einen entsprechenden festen Flächenpunkt vollführt. Der um O schwingende Punkt M nimmt gleichzeitig an der Schwingung der Geraden AB teil, von der er gleichsam mitgeführt wird. Nehmen wir an, die Gerade habe sich im Moment t um y_2 aus ihrer Normallage verschoben; der Punkt O sei nach O' gelangt, wobei $O_1 O' = y_2$ ist. Nach (25) erhält man

$$y_2 = b \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

wo β_2 die Anfangsphase der zweiten Schwingungsbewegung ist.

Den wahren Ort M' des schwingenden Punktes finden wir, wenn wir $O'M' = OM = y_1$ machen. Bezeichnen wir mit y die Entfernung dieses Punktes vom festen Punkte O_1 der Ebene, d. h. setzen wir $O_1 M' = y$. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Entfernung y als Funktion der Zeit t darzustellen.

Zählt man y_1 und y_2 nach derselben Seite (nach rechts) positiv, so ist offenbar

$$y = y_1 + y_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Setzt man die entsprechenden Ausdrücke nach (25) und (26) ein, so kommt

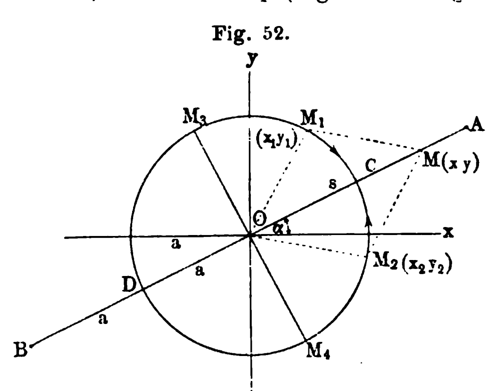
$$y = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) + b \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad \cdot \quad (28)$$

Die Abhängigkeit der Gröfse y von der Zeit t ist somit eine recht komplizierte; wir wollen versuchen, ihr folgenden Ausdruck

wie jede gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit k, die auf einem Kreise mit dem Radius a vor sich geht, in zwei harmonische Schwingungsbewegungen, die in beliebigen, zu einander senkrechten Richtungen x und y erfolgen, zerlegt werden kann. Die Periode T bestimmt sich hierbei aus Formel (1), nach welcher $kT = 2\pi a$ ist. Die Phase β kann vollkommen willkürlich gewählt werden.

§ 8. Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen, die mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung auf derselben Kreislinie vor sich gehen. Nehmen wir an, der Punkt M_1 (Fig. 52) bewege sich gleichförmig auf einer Kreislinie vom Radius a in der Uhrzeigerrichtung und mache einen vollen Umlauf in der Zeit T; ein zweiter Punkt M_2 bewege sich mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Unsere Aufgabe, beide Kreisbewegungen zusammenzusetzen, kommt dann darauf heraus, die Bewegung eines solchen Punktes M zu bestimmen, dessen Koordinaten x und y gleich der Summe der entsprechenden Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 der Punkte M_1 und M_2 sind. Der Punkt M mufs sich offenbar stets im Endpunkte der Diagonale des Parallelogramms aus OM_1 und OM_2 befinden.

Fig. 52.



Es ist leicht einzusehen, dafs die Bewegung des Punktes M eine geradlinige sein mufs. M_1 und M_2 begegnen sich in zwei Punkten C und D; in den entsprechenden Augenblicken befindet sich M in A resp. B, wo $OA = OB = 2a$ ist. Da die Punkte M_1 und M_2 immer in gleichem Abstande von C und D bleiben müssen, so ist klar, dafs die Diagonale, an deren Ende sich Punkt M befinden mufs, immer mit OA oder OB zusammenfallen wird. Fallen M_1 und M_2 mit M_3 und M_4 zusammen ($M_3M_4 \perp AB$), so befindet sich M in O. Man kann sich leicht vorstellen, dafs die Bewegung des Punktes M eine harmonische Schwingungsbewegung sein mufs, denn sie setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen, die offenbar harmonische Schwingungsbewegungen sind; die Koordinaten sind $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$.

Wir wollen nun dieselbe Frage analytisch untersuchen; bezeichnen wir mit β_1 und β_2 die Anfangsphasen derjenigen Schwingungsbewegungen x_1 und x_2 längs der Achse Ox, welche kombiniert mit den

Schwingungen y_1 und y_2 (die von ihnen um $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ abstehen) die kreisförmigen Bewegungen mit (M_1) und gegen (M_2) den Uhrzeiger geben [vergl. (57)]. Die Formeln (58) und (59) geben

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} x_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \\ y_1 = a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \end{array}\right\} & \text{mit dem Uhrzeiger} \\ \left.\begin{array}{l} x_2 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \\ y_2 = -a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \end{array}\right\} & \text{gegen den Uhrzeiger} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (59, a)$$

Der Kürze halber setzen wir

$$2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 = \Theta_1 \quad \text{und} \quad 2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 = \Theta_2,$$

dann kommt, da $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \sin \Theta_1 + a \sin \Theta_2 = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \\ y = a \cos \Theta_1 - a \cos \Theta_2 = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \end{array}\right\} \quad . \quad (60)$$

Dividiert man die untere Gleichung durch die obere und berücksichtigt die Werte der Winkel Θ_1 und Θ_2, so findet man $y = x tg \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}$ oder

$$y = x tg \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Bezeichnet man den variablen Abstand OM mit $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist nach Formel (60) $s = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2}$, d. h.

$$s = 2a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs die Bewegung des Punktes M eine harmonische Schwingungsbewegung ist. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der x-Achse mit $\alpha = \angle AOx$, so kommt $y = x tg \alpha$, folglich [vergl. (61)]

$$\alpha = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

zu geben:

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

d. h. wollen untersuchen, ob nicht die wahre Bewegung des Punktes M, die je aus zwei harmonischen Schwingungsbewegungen besteht, selbst eine harmonische Schwingungsbewegung mit einer Amplitude A und einer Anfangsphase β ist. Somit fragt es sich, ob nicht zwei derartige Gröfsen A und β existieren, welche die Ausdrücke (28) und (29) für alle Werte der Zeit t in Identitäten verwandeln.

Die Gleichung

$$A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) + b \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right)$$

giebt

$$A \cos\beta \sin 2\pi \frac{t}{T} + A \sin\beta \cos 2\pi \frac{t}{T} = (a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}$$
$$+ (a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2) \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Diese Gleichung geht für alle Werte von t in eine Identität über, wenn die Koeffizienten von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ und $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ einzeln gleich sind, d. h. wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} A \cos\beta &= a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2 \\ A \sin\beta &= a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Diesen Bedingungen kann aber für A und β genügt, also (28) auf die Form (29) gebracht werden.

Die Gleichungen (30) geben bei Division der zweiten durch die erste

$$tg\,\beta = \frac{a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2}{a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Die Quadratsumme der Formeln (30) ergiebt

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\beta_1 - \beta_2) \quad \ldots \quad (32)$$

Dies ist eine der wichtigsten physikalischen Formeln. Zwei harmonische Schwingungsbewegungen von gleicher Richtung und Periode, aber ungleichen Amplituden a und b und Anfangsphasen β_1 und β_2 setzen sich zu einer neuen harmonischen Schwingungsbewegung zusammen, deren Amplitude A und Anfangsphase β durch die Formeln (31) und (32) bestimmt werden.

Man kann die Amplitude A und die Phase β durch Konstruktion finden. Es sei (Fig. 45) $\angle COM = \beta_1$, $\angle CON = \beta_2$, $OM = a$, $ON = b$ und OP die Diagonale des Parallelogramms aus a und b. In diesem Falle ist $OP = A$ und $\angle COP = \beta$; es folgt dies daraus, dafs die Länge der Geraden OP und der Winkel COP den beiden Gleichungen (30) genügen.

Fig. 45.

Bezeichnet man die Energieen der zusammenzusetzenden und resultierenden Schwingungen mit i_1, i_2 und J, so erhält man aus (32) auf Grund der an Formel (24) angeknüpften Bemerkung:

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2}\cos(\beta_1 - \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Es seien hier noch einige besondere Fälle betrachtet, zu welchen uns die letzten drei Formeln führen.

1. Die Amplituden seien untereinander gleich: $b = a$; setzt man $i_1 = i_2 = i$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \pm n\pi \\ A &= 2a\cos\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \\ J &= 4i\cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = 0$ oder überhaupt gleich $2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Wir haben

$$A = a + b; \quad \beta = \beta_1 = \beta_2; \quad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \quad . \quad . \quad (35)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = 0$ und $b = a$, so ist

$$A = 2a; \quad J = 4i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Somit ist in diesem besonderen Falle die Energie der resultierenden Schwingungen viermal so grofs als die Energie jeder der beiden vollkommen gleichen zusammenzusetzenden Schwingungen.

3. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \pi$ oder überhaupt gleich $(2n + 1)\pi$: die zusammenzusetzenden Schwingungen haben also entgegengesetzte Phase. Es ist

$$A = a - b; \quad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = (2n + 1)\pi$ und $a = b$, so kommt

$$A = 0; \quad J = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Zwei Schwingungsbewegungen mit gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase ergeben als Resultat vollkommene Ruhe.

4. Der Phasenunterschied $\beta_1 - \beta_2$ sei gleich $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ oder überhaupt gleich $\left(n \pm \frac{1}{4}\right) 2\pi$. Für diesen Fall kommt

$$A^2 = a^2 + b^2; \quad J = i_1 + i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

d. h. die Energie der resultierenden Schwingung ist gleich der Summe der Energieen ihrer Teilschwingungen.

5. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ und eine der Phasen gleich Null.

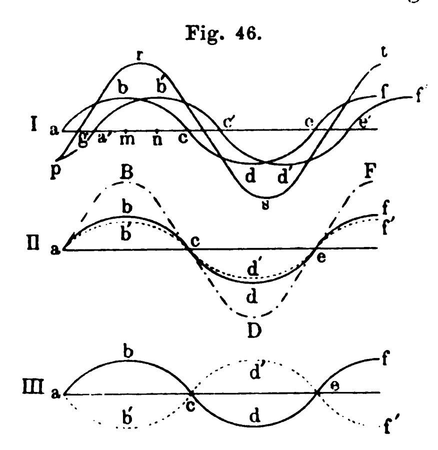
$$\text{a)} \quad \beta_2 = 0, \; \beta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\text{b)} \quad \beta_1 = 0, \; \beta_2 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Die Formeln (29), (31) und (32) geben die vollständige analytische Lösung der Aufgabe von der Zusammensetzung zweier „paralleler“ harmonischer Schwingungsbewegungen. Wir können diese Aufgabe auch geometrisch lösen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zwei Kurven, ähnlich den in Fig. 43 dargestellten. Hierauf konstruieren wir eine neue Kurve, für welche die Ordinaten y der einzelnen Punkte gleich $y_1 + y_2$, d. h. gleich der Summe der Ordinaten für die Punkte der ersten Kurven werden (alle drei Punkte entsprechen gleichen Abscissen). Die neue Kurve drückt hierbei das Gesetz aus, das die gesuchte zusammengesetzte Bewegung befolgt.

In Fig. 46 sind drei Beispiele einer geometrischen Addition von je zwei Schwingungsbewegungen dargestellt. In (I) ist $a = b$, während der Phasenunterschied ein beliebiger ist. Die Kurven *abcdef* und *pa'b'c'd'e'f'* stellen die gegebenen Schwingungsbewegungen, die Kurve *prst* dagegen die resultierende Schwingung dar. Die mittlere Fig. (II) entspricht dem Falle, wo $a = b$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist; hier sind die gegebenen Bewegungen durch die zusammenfallenden Kurven *abcdef* und *ab'cd'ef'*, die resultierende durch die Kurve *aBDF* dargestellt. Die unterste Fig. (III) entspricht dem Falle $a = b$; $\beta_1 - \beta_2 = \pi$. Die gegebenen Kurven *abcdef* und *ab'cd'ef'* geben die Gerade *ace*, welche zeigt, dafs der Punkt entsprechend (38) in Ruhe bleibt.

Fig. 46.



§ 5. Zusammensetzung einer beliebigen Zahl gleichgerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen von der gleichen Periode T. Nehmen wir an, die Entfernung y des Punktes M von dem festen Punkte O sei in jedem Augenblicke gleich der Summe der Entfernungen y_i, in welchem sich der Punkt befinden würde, wenn er verschiedene harmonische Schwingungsbewegungen vollführen würde. Setzt man allgemein

$$y_i = a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right)$$

und

$$y = \Sigma y_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

so kommt

$$y = \Sigma a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{\pi} + \beta_i\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Auch diese Summe läfst sich auf die Form

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

bringen.

Setzt man (43) und (44) einander gleich, so bekommt man als Bedingungen für die Identität bei allen Werten von t

$$A \cos\beta = \Sigma a_i \cos\beta_i; \quad A \sin\beta = \Sigma a_i \sin\beta_i \quad . \quad . \quad (45)$$

Hieraus folgt

$$tg\,\beta = \frac{\Sigma a_i \sin\beta_i}{\Sigma a_i \cos\beta_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

und

$$A^2 = (\Sigma a_i \sin\beta_i)^2 + (\Sigma a_i \cos\beta_i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Die Formeln (46) und (47) ermöglichen es, A und β durch eine geometrische Konstruktion, ähnlich wie dies im § 4 geschehen war, zu finden. Wir werden hierauf im II. Bande beim Studium der Diffraktionserscheinungen (Methode von C o r n u) zurückkommen. Es ist leicht einzusehen, dafs man (47) auch folgendermafsen schreiben könnte:

$$A^2 = \sum_i \sum_k a_i a_k \cos(\beta_i - \beta_k) \quad . \quad . \quad . \quad (47, a)$$

wo i und k alle Werte von 1 bis n durchlaufen müssen (n ist dabei die Anzahl der zu addierenden Schwingungsbewegungen).

§ 6. Zerlegung einer harmonischen Schwingungsbewegung in zwei ebensolche Bewegungen, die mit ihr gleiche Richtung

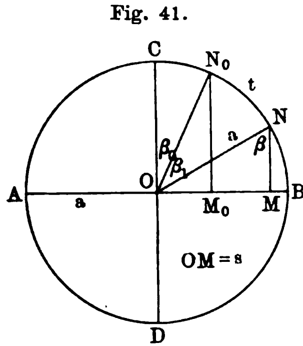
der Zeit $\frac{T}{2}$ zu der ihr entgegengesetzten Phase gelangt. Da

$$s = a \sin(\beta \pm \pi) = -a \sin \beta$$

ist, so müssen offenbar entgegengesetzten Phasen der Gröfse nach gleiche, dem Vorzeichen nach verschiedene Entfernungen s und gleichzeitig entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten entsprechen.

Verallgemeinern wir nun die Formel (4) unter der Annahme, dafs die Zeit von einem beliebigen Augenblicke an gerechnet wird und möge sich unser Punkt für $t = 0$ in M_0 (Fig. 41) befinden; zieht man $M_0 N_0 \perp AB$ und verbindet N_0 mit O, so findet man die sogenannte Anfangsphase $\beta_0 = \angle CON_0$. Nehmen wir an, der Punkt sei während der Zeit t von M_0 nach M gelangt; in eben dieser Zeit hat der sich gleichförmig auf der Kreislinie bewegende Punkt den Bogen $N_0 N$ durchlaufen, wo $NM \perp AB$ ist. Es sei $\angle N_0 ON = \beta_1$. Die Phase des Punktes M bezeichnen wir mit β; es ist $\beta = \angle CON = \angle ONM$ und wie früher $s = OM = a \sin \beta$. Es ist aber $\beta = \angle CON_0 + \angle N_0 ON = \beta_0 + \beta_1$. Für β_1 gilt $\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T}$; folglich ist $\beta = \beta_1 + \beta_0 = 2\pi \frac{t}{T} + \beta_0$; setzt man diesen Ausdruck in $s = a \sin \beta$ ein, so kommt

Fig. 41.



$$s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0\right) \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (6)$$

Rechnet man die Zeit von dem Momente an, wo sich der Punkt in der Grenzlage B befindet, so ist $\beta_0 = \pi : 2$; es ist dann

$$s = a \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (7)$$

woraus sich für $t = 0$, $s = a$ ergiebt. Formel (6) zeigt, dafs das Zeitintervall τ zwischen dem Moment, wo sich der Punkt in O befindet und sich eben nach der positiven Seite hin (nach B) bewegt und dem Momente $t = 0$, von dem an wir die Zeit rechnen, mit der Anfangsphase β_0 und der Form unserer Funktion $s = f(t)$ in folgender Weise verknüpft ist:

$$\left.\begin{array}{lllll} \tau = 0 & \frac{T}{4} & \frac{T}{2} & \frac{3T}{4} & T \\ \beta_0 = 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi(0) \\ s = a \sin 2\pi \frac{t}{T} & a \cos 2\pi \frac{t}{T} & -a \sin 2\pi \frac{t}{T} & -a \cos 2\pi \frac{t}{T} & a \sin 2\pi \frac{t}{T} \end{array}\right\} (8)$$

§ 3. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Energie der harmonischen Schwingungsbewegung. Die Geschwindigkeit v des Punktes M, welcher die harmonische Schwingungsbewegung vollführt, kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Auf Grund des allgemeinen Ausdrucks für die Geschwindigkeit (8) auf S. 60 und mit Hülfe von Formel (44) auf S. 46 finden wir aus (4)

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \cdots \cdots \quad (9)$$

Bezeichnet man die Phase überhaupt mit β, so erhält man nach (1) auf S. 132 $v = k \cos \beta$. Für $\beta = 0$ erhält man die Geschwindigkeit $v = k$, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher M (Fig. 40) durch seine Mittellage O geht, ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich Punkt N auf der Kreislinie gleichförmig bewegt. Unsere Formel ($v = k \cos \beta$) ist unmittelbar aus (44) abgeleitet worden, sie kann indes auch erhalten werden, wenn man beachtet, dafs MN (Fig. 40) beständig senkrecht zu AB bleiben mufs. Hieraus folgt nämlich, dafs die zu AB parallele Komponente k_1 der Geschwindigkeit k, gleich der Geschwindigkeit v des Punktes M sein mufs. Es ist aber $\angle k_1 N k = \beta$, folglich $v = k_1 = k \cos \beta$. Setzt man $MN = p$, so kommt

$$v = k \cos \beta = \frac{2\pi}{T} a \cos \beta = \frac{2\pi}{T} p \quad \cdots \quad (10)$$

Vorstehende Formel läfst eine klare Vorstellung von dem Gesetze gewinnen, nach dem sich die Geschwindigkeit des in harmonischer Schwingungsbewegung befindlichen Punktes ändert: seine Geschwindigkeit ist nämlich proportional der Senkrechten p zum Durchmesser AB.

In den Punkten A und B ist die Phase $\beta = \frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{3\pi}{2}$, die zugehörige Geschwindigkeit ist nach (10) $v = 0$.

Die Beschleunigung w des Punktes M wird aus dem allgemeinen Ausdrucke (27) auf S. 67 und der Formel (45) auf S. 47 gewonnen:

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \cdots \cdots \quad (11)$$

Formel (4) ergiebt

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} s \quad \cdots \cdots \quad (12)$$

Wir sehen hieraus, dafs die Beschleunigung proportional dem Abstande des Punktes von seiner Mittellage O und fortwährend nach diesem Punkte O hin gerichtet ist, denn für $s > 0$ ist w negativ, d. h. von B nach O gerichtet, für $s < 0$ ist w positiv, d. h. von A nach O gerichtet. Für den Punkt O gilt $w = 0$; in den Punkten A und B erreicht die Beschleunigung ihren Maximal-

wert $\pm \frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Setzt man

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = c \quad \dots \dots \dots \dots \quad (13)$$

so ist

$$w = -cs \quad \dots \dots \dots \dots \quad (14)$$

Die vier Gröfsen a, T, $v_0 = k$ und c sind durch die beiden Gleichungen (1) und (13) miteinander verknüpft. Aus ihnen ergiebt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

und

$$v_0 = k = \frac{2\pi a}{T} = a\sqrt{c} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

Die Formeln (10) und (13) ergeben

$$v = p\sqrt{c} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

oder, da $p^2 = a^2 - s^2$ ist (vergl. Fig. 40),

$$v^2 = c\,(a^2 - s^2) \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Entfernung s ausgedrückt; nach (18) und (16) erhält man noch

$$v^2 + cs^2 = v_0^2 \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

Wir haben im vorhergehenden die geometrischen Bedingungen betrachtet, unter denen eine harmonische Schwingungsbewegung zu stande kommt und einige Eigenschaften derselben erörtert. Es ist uns jetzt nicht mehr schwer, auch die mechanischen Bedingungen festzusetzen, unter denen ein materieller Punkt mit der Masse m eine derartige Bewegung vollführt; es ist dies ein Gesetz, nach welchem auf die Masse m eine äufsere Kraft f wirken mufs, damit diese Masse unter dem Einflusse der ersteren eine harmonische Schwingungsbewegung vollziehe. Auf Grund der allgemeinen Formel $f = mw$ [vergl. (5) auf S. 77] haben wir aus (14)

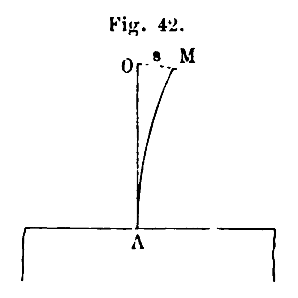
$$f = -cms \quad \dots \dots \dots \dots \quad (20)$$

Ein materieller Punkt M vollführt eine harmonische Schwingungsbewegung um eine gewisse Mittellage O, wenn er sich unter dem Einflusse einer Kraft befindet, welche stets nach dem Punkte O gerichtet und der Gröfse nach direkt proportional dem Abstande des Punktes M von O ist. Hierbei mufs sich Punkt M anfangs entweder in Ruhe befinden, in einer gewissen Entfernung a von O, oder, wenn er sich in O befindet, eine nach Gröfse und Richtung willkürliche Geschwindigkeit v_0 besitzen, oder endlich, wenn er sich in einem beliebigen Punkte befindet, eine

Geschwindigkeit besitzen, die der Richtung nach mit der Geraden OM zusammenfällt. Die Dauer einer vollen Schwingung hängt nur vom Koeffizienten c ab, der im Ausdruck (20) für die Kraft vorkommt, während die Amplitude a [vergl. (16)] von c und von der Geschwindigkeit v_0 abhängt.

Es lassen sich viele Beispiele solcher Kräfte anführen, die auf einen Punkt einwirken und proportional der Entfernung desselben von einer gewissen Mittellage sind. So kann, wenn auch nur in erster Annäherung, die Existenz solcher Kräfte sehr oft zugegeben werden, falls der materielle Punkt M im normalen Ruhezustande mit einem Punkt O zusammenfällt und bei seiner Entfernung aus O äufsere Kräfte, die sich diesem Entfernen widersetzen, ihn nach O zurückzubringen suchen. Etwas derartiges kommt bei geringfügigen Formveränderungen fester Körper vor, wenn elastische Kräfte die veränderte Form wieder herzustellen suchen. Es sei z. B. der elastische Stab AO (Fig 42) im Punkte A festgeklemmt. Biegt man den Stab so, dafs O nach M gelangt und der Stab die Form AM annimmt, so wird das Ende M in der Weise nach O zurückstreben, als wenn eine von M nach O gerichtete Kraft auf dasselbe wirkte. Ist der Bogen $OM = s$ klein, so kann man die Kraft dem Abstande s proportional setzen und deshalb wird das Ende M des Stabes eine harmonische Schwingungsbewegung um O vollführen, sobald man es nur zur Seite biegt und sodann sich selbst überläfst. Diese Bewegung geht freilich nicht auf einer Geraden, sondern auf einem Kreisbogen vor sich.

Fig. 42.



Die kinetische Energie J_0 der Masse m im Augenblicke, wo sie durch die Ruhelage geht, ist gleich $J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ oder [vergl. (16)]

$$J_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{2\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} c a^2 m \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (21)$$

In der Entfernung s von O hat man für die kinetische Energie [vergl. (18)]

$$J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} mc (a^2 - s^2) = J_0 - \frac{1}{2} mcs^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad (22)$$

Die letzte Formel lehrt, dafs zugleich mit der Entfernung des Punktes aus seiner Gleichgewichtslage eine potentielle Energie J_p entsteht, die gleich ist

$$J_p = \frac{1}{2} mcs^2 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (23)$$

denn nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie müssen wir beständig $J + J_p = J_0$ haben. Die mittlere kinetische Energie J_c für eine Schwingung wird nach folgender Formel erhalten

$$J_c = \frac{1}{2} m \frac{\int_0^T v^2 dt}{T}.$$

Setzt man hierin für v seinen Wert (9) ein, so erhält man

$$J_c = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} m = \frac{1}{2} J_0. \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Die Formeln (21) und (24) zeigen, dafs die **Energie der harmonischen Schwingungsbewegung proportional dem Quadrate der Amplitude ist.** Da die Beziehung $J + J_p = J_0$ für die ganze Dauer der Bewegung gilt, so zeigt Formel (24), dafs die mittlere kinetische und die mittlere potentielle Energie gleich $J_0 : 2$ sind.

Analytisch wird der Charakter der harmonischen Schwingungsbewegung durch Formel (4) definiert, er kann jedoch auch geometrisch dargestellt werden. Zu diesem Zwecke „trägt man“ auf der Abscissenachse eines Koordinatensystems (vergl. Fig. 43) „die Zeit ab“ und auf den Senkrechten, die zur Ordinatenachse parallel laufen, die nach Formel (4) berechneten Entfernungen s. Der geometrische Ort der Punkte P, deren Koordinaten gleich t und s sind, liefert uns eine gewisse Kurve $OABCDEF\ldots$ und diese stellt das Gesetz der harmonischen Schwingungsbewegung überaus anschaulich dar. Die absolut gröfsten Ordinaten entsprechen den Momenten $\frac{T}{4}$ und $\frac{3T}{4}$ und sind gleich der Schwingungsamplitude a. Die Kurve selbst besteht aus einer unbestimmten Anzahl gleichartiger Teile. Wenn eine Anfangsphase vorhanden ist, d. h. wenn für $t = 0$ die Entfernung s nicht gleich Null ist, so wird das Bewegungsgesetz durch dieselbe Kurve dargestellt, die alsdann nur mehr oder weniger nach links gerückt ist. Die punktierte Linie stellt das Schwingungsgesetz für den Fall dar, dafs die Anfangsphase $\beta_0 = \pi : 2$ beträgt und man demnach für den Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $s = a$ erhält.

Fig. 43.

§ 4. Zusammensetzung zweier gleichgerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen von der gleichen Periode T. Nehmen wir an, der Punkt M (Fig. 44.) führe eine harmonische

von den Eigenschaften des Mediums selbst ab; in verschiedenen Medien ist sie im allgemeinen verschieden. Man hat zwei Arten von strahlender Ausbreitung der Schwingungen zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die Richtung der Schwingungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, d. h. zur Richtung des Strahles; solche Schwingungen heifsen **transversale** (Querschwingungen). Im zweiten Falle fällt die Richtung der Schwingungen mit der Richtung der Strahlen zusammen; solche Schwingungen heifsen **longitudinale** (Längsschwingungen).

§ 2. Bildung von Strahlen mit Querschwingungen. Sei AB (Fig. 61) eine Gerade, längs welcher anfangs Teilchen lagen und längs deren sich eine Schwingungsbewegung fortpflanzt. Zuerst begann das Teilchen A sich zu bewegen, ein wenig später das rechte Nachbarteilchen u. s. f. In Fig. 61 ist die Anordnung der Teilchen zur Zeit $t = T:4$ dargestellt, wobei die Zeit vom Beginn der Schwingung des ersten Teilchens A an gerechnet ist. Zur Zeit $t = T:4$ hat das Teilchen A seine Grenzlage erreicht; die folgenden Teilchen sind, da sie ihre Bewegungen später begannen, hinter A zurückgeblieben; die Pfeile an ihnen zeigen die Richtung ihrer Bewegungen. Alle rechts von B liegenden Teilchen befinden sich noch in Ruhe.

Fig. 61.

In Fig. 62 ist die Anordnung der Teilchen und ihre Bewegungsrichtung zur Zeit $t = T:2$ dargestellt. Hier hat A eine halbe, B eine

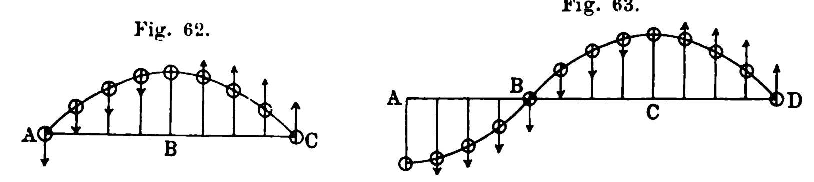


Fig. 62. Fig. 63.

Viertelschwingung vollendet und die Schwingungsbewegung hat sich bis nach C ausgebreitet. In Fig. 63 ist die Anordnung der Teilchen

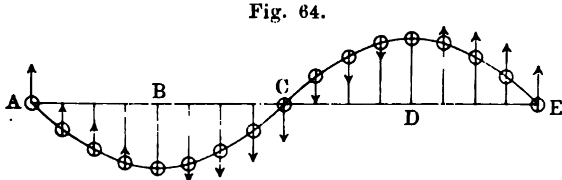


Fig. 64.

und ihre Bewegungsrichtungen zur Zeit $t = \frac{3}{4} T$ angegeben, wo A die äufserste negative Entfernung erreicht, B eine halbe, C eine Viertelschwingung vollendet hat und D eben im Begriffe steht, seine Bewegung zu beginnen. Endlich ist in Fig 64 ebendasselbe nach Verlauf

zu geben:

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

d. h. wollen untersuchen, ob nicht die wahre Bewegung des Punktes M, die je aus zwei harmonischen Schwingungsbewegungen besteht, selbst eine harmonische Schwingungsbewegung mit einer Amplitude A und einer Anfangsphase β ist. Somit fragt es sich, ob nicht zwei derartige Gröfsen A und β existieren, welche die Ausdrücke (28) und (29) **für alle Werte der Zeit** t in Identitäten verwandeln.

Die Gleichung

$$A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) + b \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right)$$

giebt

$$A \cos\beta \sin 2\pi \frac{t}{T} + A \sin\beta \cos 2\pi \frac{t}{T} = (a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}$$
$$+ (a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2) \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Diese Gleichung geht für alle Werte von t in eine Identität über, wenn die Koeffizienten von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ und $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ einzeln gleich sind, d. h. wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} A \cos\beta &= a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2 \\ A \sin\beta &= a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Diesen Bedingungen kann aber für A und β genügt, also (28) auf die Form (29) gebracht werden.

Die Gleichungen (30) geben bei Division der zweiten durch die erste

$$tg\,\beta = \frac{a \sin\beta_1 + b \sin\beta_2}{a \cos\beta_1 + b \cos\beta_2} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Die Quadratsumme der Formeln (30) ergiebt

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\beta_1 - \beta_2) \quad \ldots \quad (32)$$

Dies ist eine der wichtigsten physikalischen Formeln. Zwei harmonische Schwingungsbewegungen von gleicher Richtung und Periode, aber ungleichen Amplituden a **und** b **und Anfangsphasen** β_1 **und** β_2 **setzen sich zu einer neuen harmonischen Schwingungsbewegung zusammen, deren Amplitude** A **und Anfangsphase** β **durch die Formeln (31) und (32) bestimmt werden.**

Man kann die Amplitude A und die Phase β durch Konstruktion finden. Es sei (Fig. 45) $\angle\, COM = \beta_1$, $\angle\, CON = \beta_2$, $OM = a$, $ON = b$ und OP die Diagonale des Parallelogramms aus a und b. In diesem Falle ist $OP = A$ und $\angle\, COP = \beta$; es folgt dies daraus, dafs die Länge der Geraden OP und der Winkel COP den beiden Gleichungen (30) genügen.

Fig. 45.

Bezeichnet man die Energieen der zusammenzusetzenden und resultierenden Schwingungen mit i_1, i_2 und J, so erhält man aus (32) auf Grund der an Formel (24) angeknüpften Bemerkung:

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2}\cos(\beta_1 - \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Es seien hier noch einige besondere Fälle betrachtet, zu welchen uns die letzten drei Formeln führen.

1. Die Amplituden seien untereinander gleich: $b = a$; setzt man $i_1 = i_2 = i$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \pm n\pi \\ A &= 2a\cos\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \\ J &= 4i\cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = 0$ oder überhaupt gleich $2n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Wir haben

$$A = a + b;\quad \beta = \beta_1 = \beta_2;\quad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \quad . \quad . \quad (35)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = 0$ und $b = a$, so ist

$$A = 2a;\quad J = 4i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Somit ist in diesem besonderen Falle die Energie der resultierenden Schwingungen viermal so grofs als die Energie jeder der beiden vollkommen gleichen zusammenzusetzenden Schwingungen.

3. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \pi$ oder überhaupt gleich $(2n + 1)\pi$; die zusammenzusetzenden Schwingungen haben also entgegengesetzte Phase. Es ist

$$A = a - b;\quad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Ist $\beta_1 - \beta_2 = (2n + 1)\pi$ und $a = b$, so kommt

$$A = 0;\quad J = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Zwei Schwingungsbewegungen mit gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase ergeben als Resultat vollkommene Ruhe.

4. Der Phasenunterschied $\beta_1 - \beta_2$ sei gleich $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ oder überhaupt gleich $\left(n \pm \frac{1}{4}\right) 2\pi$. Für diesen Fall kommt

$$A^2 = a^2 + b^2; \quad J = i_1 + i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

d. h. die Energie der resultierenden Schwingung ist gleich der Summe der Energieen ihrer Teilschwingungen.

5. Der Phasenunterschied sei $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ und eine der Phasen gleich Null.

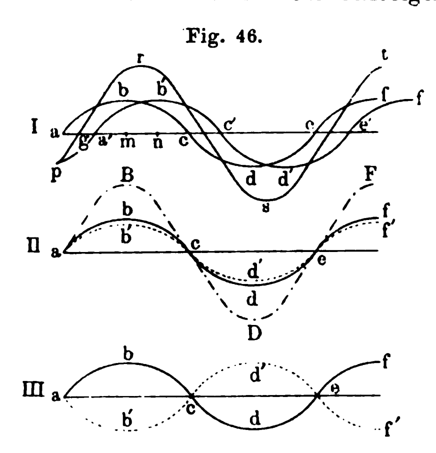
$$\text{a)} \quad \beta_2 = 0, \; \beta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\text{b)} \quad \beta_1 = 0, \; \beta_2 = \frac{\pi}{2}; \quad tg\,\beta = \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Die Formeln (29), (31) und (32) geben die vollständige analytische Lösung der Aufgabe von der Zusammensetzung zweier „paralleler" harmonischer Schwingungsbewegungen. Wir können diese Aufgabe auch geometrisch lösen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zwei Kurven, ähnlich den in Fig. 43 dargestellten. Hierauf konstruieren wir eine neue Kurve, für welche die Ordinaten y der einzelnen Punkte gleich $y_1 + y_2$, d. h. gleich der Summe der Ordinaten für die Punkte der ersten Kurven werden (alle drei Punkte entsprechen gleichen Abscissen). Die neue Kurve drückt hierbei das Gesetz aus, das die gesuchte zusammengesetzte Bewegung befolgt.

In Fig. 46 sind drei Beispiele einer geometrischen Addition von je zwei Schwingungsbewegungen dargestellt. In (I) ist $a = b$, während der Phasenunterschied ein beliebiger ist. Die Kurven $abcdef$ und $pa'b'c'd'e'f'$ stellen die gegebenen Schwingungsbewegungen, die Kurve $prst$ dagegen die resultierende Schwingung dar. Die mittlere Fig. (II) entspricht dem Falle, wo $a = b$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist; hier sind die gegebenen Bewegungen durch die zusammenfallenden Kurven $abcdef$ und $ab'cd'ef'$, die resultierende durch die Kurve $aBDF$ dargestellt. Die unterste Fig. (III) entspricht dem Falle $a = b$; $\beta_1 - \beta_2 = \pi$. Die gegebenen Kurven $abcdef$ und $ab'cd'ef'$ geben die Gerade ace, welche zeigt, daſs der Punkt entsprechend (38) in Ruhe bleibt.

Fig. 46.



§ 5. Zusammensetzung einer beliebigen Zahl gleichgerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen von der gleichen Periode T. Nehmen wir an, die Entfernung y des Punktes M von dem festen Punkte O sei in jedem Augenblicke gleich der Summe der Entfernungen y_i, in welchem sich der Punkt befinden würde, wenn er verschiedene harmonische Schwingungsbewegungen vollführen würde. Setzt man allgemein

$$y_i = a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_i\right)$$

und

$$y = \Sigma y_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

so kommt

$$y = \Sigma a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{\pi} + \beta_i\right) \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Auch diese Summe läfst sich auf die Form

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

bringen.

Setzt man (43) und (44) einander gleich, so bekommt man als Bedingungen für die Identität bei allen Werten von t

$$A \cos\beta = \Sigma a_i \cos\beta_i; \quad A \sin\beta = \Sigma a_i \sin\beta_i \quad . \ . \quad (45)$$

Hieraus folgt

$$tg\,\beta = \frac{\Sigma a_i \sin\beta_i}{\Sigma a_i \cos\beta_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

und

$$A^2 = (\Sigma a_i \sin\beta_i)^2 + (\Sigma a_i \cos\beta_i)^2 \quad . \ . \ . \ . \quad (47)$$

Die Formeln (46) und (47) ermöglichen es, A und β durch eine geometrische Konstruktion, ähnlich wie dies im § 4 geschehen war, zu finden. Wir werden hierauf im II. Bande beim Studium der Diffraktionserscheinungen (Methode von Cornu) zurückkommen. Es ist leicht einzusehen, dafs man (47) auch folgendermafsen schreiben könnte:

$$A^2 = \sum_i \sum_k a_i a_k \cos(\beta_i - \beta_k) \quad . \ . \ . \quad (47, a)$$

wo i und k alle Werte von 1 bis n durchlaufen müssen (n ist dabei die Anzahl der zu addierenden Schwingungsbewegungen).

§ 6. Zerlegung einer harmonischen Schwingungsbewegung in zwei ebensolche Bewegungen, die mit ihr gleiche Richtung

haben. Wie viele andere Aufgaben der Zerlegung (einer Zahl, Kraft, Geschwindigkeit), so hat auch diese Aufgabe unendlich viele Lösungen, die sich aus den allgemeinen Formeln (30) ergeben. Die Gröfsen A und β müssen wir als gegeben ansehen; zur Bestimmung der beiden Amplituden a und b und der beiden Anfangsphasen β_1 und β_2 haben wir im ganzen zwei Gleichungen und können deshalb zwei von diesen vier Gröfsen vollkommen willkürlich gewählt werden, wobei nur die Bedingung

$$a - b \leqq A \leqq a + b \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

erfüllt sein mufs.

Der wichtigste Fall ist der, wo die Anfangsphasen β_1 und β_2 der gesuchten Schwingungen gegeben sind; in diesem Falle werden die Amplituden aus (30) nach den Formeln:

$$a = A\frac{\sin(\beta_2 - \beta)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}; \quad b = A\frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \quad \ldots \quad (49)$$

gefunden.

Bezeichnet man den Phasenunterschied der gegebenen und der beiden gesuchten Schwingungen mit φ_1 und φ_2, d. h. setzt man $\beta_1 - \beta = \varphi_1$ und $\beta_2 - \beta = \varphi_2$, so kommt

$$a = A\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad b = A\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \ldots \quad (50)$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, wo noch die Nebenbedingung $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ gegeben ist; setzt man der Einfachheit halber $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi - \frac{\pi}{2}$, so kommt $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$, $\sin\varphi_2 = -\cos\varphi$ und statt (50)

$$a = A\cos\varphi; \quad b = A\sin\varphi \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

Durch diese Formeln werden die Amplituden a und b zweier Schwingungen gegeben, in welche die gegebene Schwingung mit der Amplitude A unter der Bedingung zerfällt, dafs eine der gesuchten (Amplitude a) eine Phase hat, welche die Phase der gegebenen Schwingung um φ übertrifft, und dafs die Phasendifferenz der gesuchten Schwingungen gleich $\pi : 2$ ist (die Phase der Schwingung mit der Amplitude a ist um $\pi : 2$ gröfser als die Phase der Schwingung mit der Amplitude b).

Die Schwingungen selbst werden durch nachstehende Formeln dargestellt:

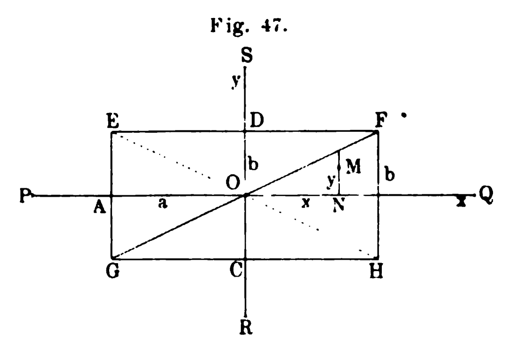
$$\left.\begin{aligned} y &= A \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ y_1 &= A \cos\varphi \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \\ y_2 &= A \sin\varphi \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -A \sin\varphi \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (52)$$

Die Bedingung (27) $y = y_1 + y_2$ ist offenbar erfüllt. In einem noch spezielleren Falle, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d. h. wenn $\varphi_1 = \beta_1 - \beta = \beta - \beta_2 = -\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ ist, haben wir

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} A \quad \dots \dots \quad (53)$$

§ 7. Zusammensetzung zweier aufeinander senkrechter harmonischer Schwingungsbewegungen von gleicher Periode T. Ziehen wir zwei zu einander senkrechte Gerade PQ und SR (Fig. 47) und setzen wir voraus, dafs der Punkt M eine harmonische Schwingungsbewegung längs der Geraden PQ um den Punkt O mit der Amplitude $a = OA$ und der Periode T vollführt. Seinen Abstand von O wollen wir mit x bezeichnen. Nehmen wir ferner an, die ganze Gerade PQ vollführe eine harmonische Schwingungsbewegung in einer zu ihrer Länge senkrechten Richtung, und b und T seien die Amplitude und die Periode dieser zweiten Schwingungsbewegung. Den veränderlichen Abstand der Geraden von ihrer Mittellage PQ wollen wir mit y bezeichnen. Trägt man $OC = OD = b$ ab und zieht durch C und D Parallele zu PQ, so erhält man die Grenzlagen der schwingenden Geraden. Der auf der Geraden PQ hin- und herschwingende Punkt M wird von dieser mitgenommen und nimmt daher an der zu SR parallelen Schwingung teil. Die Lage dieses Punktes in einem gegebenen Zeitmoment t läfst sich finden, sobald es bekannt ist, um

Fig. 47.



welchen Betrag x er sich von O zur Seite bewegt hat und um welchen Betrag y die ganze Gerade aus ihrer Mittellage gerückt ist.

Offenbar stellen x und y die veränderlichen Koordinaten des Punktes M dar, und es ist danach die Bahn zu bestimmen, welche er auf der Ebene beschreibt. Da dem absoluten Betrage nach $x \leqslant a$ und $y \leqslant b$ ist, so mufs Punkt M offenbar immer innerhalb des Rechtecks $EFHGE$ bleiben. Setzt man voraus, dafs für $t = 0$ die Anfangsphasen β_1 und β_2 sind, so kommt

$$x = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right); \quad y = b \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \quad \cdot \quad (54)$$

oder

$$\frac{x}{a} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\beta_1 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin\beta_1$$

$$\frac{y}{b} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\beta_2 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin\beta_2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{x}{a}\cos\beta_2 - \frac{y}{b}\cos\beta_1 = \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin(\beta_1 - \beta_2)$$

$$\frac{x}{a}\sin\beta_2 - \frac{y}{b}\sin\beta_1 = \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin(\beta_2 - \beta_1).$$

Bildet man die Quadratsumme dieser Ausdrücke, so kommt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\beta_1 - \beta_2) = \sin^2(\beta_1 - \beta_2).$$

Nehmen wir an, der Phasenunterschied der gegebenen Schwingungen sei $\beta_1 - \beta_2 = \varphi$, d. h. dafs die Schwingung längs y später beginnt als diejenige längs x und zwar erst, wenn die letztere bereits die Phase φ erlangt hat. Führt man dann die Phase φ ein, so ergiebt sich folgende Beziehung zwischen den Koordinaten x und y des bewegten Punktes M:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \quad \cdot \quad \cdot \quad (55)$$

Fig. 48.

Es ist dies für alle Werte von φ die Gleichung einer Ellipse, deren Zentrum sich im Anfangspunkt der Koordinaten befindet. Somit setzen sich zwei aufeinander senkrechte harmonische Schwingungen zu einer Bewegung längs einer Ellipse zusammen, welche innerhalb des Rechtecks $EFHG$ liegt. Die Rechteckseiten stellen dabei Tangenten der Ellipse dar. In Fig. 48 ist diese Bewegung

des Punktes auf der Ellipse dargestellt. Zunächst begann die Bewegung von O nach b; zur weiteren Bewegung nach rechts trat eine Aufwärtsbewegung hinzu, wodurch die Bewegung $b\,b'\,b''\,b'''$ u. s. w. längs der Ellipse zu stande kam. Betrachten wir hier einige Einzelfälle:

1. Die Phasendifferenz ist $\varphi = 0$; die Bewegungen von O nach Q und von O nach D (Fig. 47) nehmen gleichzeitig ihren Anfang. Gleichung (55) ergiebt für diesen Fall

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

d. h. $y = \frac{b}{a}x$, was sich auch unmittelbar aus (54) für $\beta_1 = \beta_2$ ergiebt. Wir haben hier die Gleichung einer Geraden, nämlich der Diagonale GF (Fig. 47), vor uns. Die Bewegung des Punktes auf dieser Geraden ist eine harmonische Schwingungsbewegung, denn sein Abstand vom Mittelpunkt O ist $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setzt man hierin die Ausdrücke (54) ein, so kommt für $\beta_1 = \beta_2 = \beta$

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}\, sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right).$$

2. Die Phasendifferenz sei $\varphi = \pi$ (Fig. 47); die Bewegungen von O nach D und von O nach A beginnen gleichzeitig. Gleichung (55) giebt $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$, d. h. $y = -\frac{b}{a}x$; es ist dies die Gleichung einer Geraden und zwar der Diagonale EH; die Bewegung ist analog wie im vorhergehenden Falle.

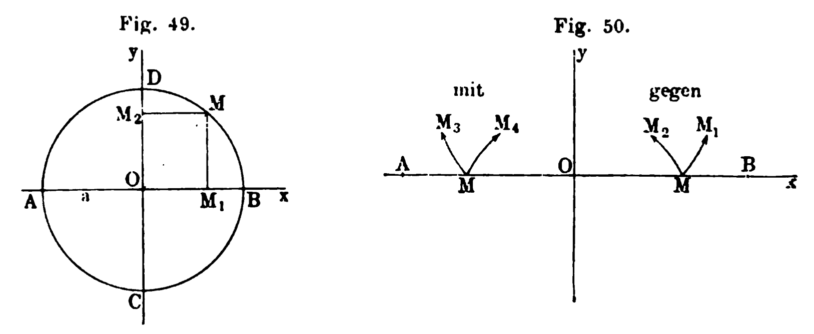
3. Die Phasendifferenz sei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$; aus Gleichung (55) kommt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es ist dies die auf die Achsen bezogene Ellipsengleichung.

4. Ein besonders wichtiger Fall tritt ein für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ und $a = b$. Gleichung (55) giebt uns $x^2 + y^2 = a^2$. Es ist dies die Kreisgleichung.

Zwei zu einander senkrechte harmonische Schwingungsbewegungen mit gleichen Amplituden a und Perioden T und mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ setzen sich zu einer Kreisbewegung zusammen. Diese Kreisbewegung ist eine gleichförmige, denn die Projektionen M_1 und M_2 (Fig. 49 a. f. S.) des Punktes M auf die Durchmesser AB und CD führen harmonische Schwingungsbewegungen aus (vergl. § 1 und Fig. 40 auf Seite 132). Die Ge-

schwindigkeit k, mit der sich der Punkt bewegt, wird durch die Formel $k = \frac{2\pi a}{T}$ gegeben [vergl. (1) auf Seite 132].

5. Beim Übergang zum allgemeinen Falle, wo φ willkürlich gewählt ist, sei darauf hingewiesen, wie man die Richtung, in welcher sich der Punkt auf der Ellipse bewegt (ob mit, ob gegen den Uhrzeiger, wie man es kurz ausdrücken könnte), zu bestimmen hat.



Zu diesem Zwecke hat man zu bestimmen, wo sich Punkt M (Fig. 50) befindet, wenn die zweite seiner Teilbewegungen (in der Richtung der positiven y) beginnt und wohin ungefähr seine weitere Bewegung gerichtet sein wird. Die Bedingung, dafs der Ellipsenmittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten zusammenfällt, giebt uns die gesuchte Bewegungsrichtung.

a) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach B; die Bewegung erfolgt nach MM_1, d. h. gegen den Uhrzeiger [1]).

b) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und B, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_2, d. h. gegen den Uhrzeiger.

c) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach A; die Bewegung erfolgt nach MM_3, d. h. mit dem Uhrzeiger.

d) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$; Punkt M befindet sich zwischen O und A, geht nach O; die Bewegung erfolgt nach MM_4, d. h. mit dem Uhrzeiger.

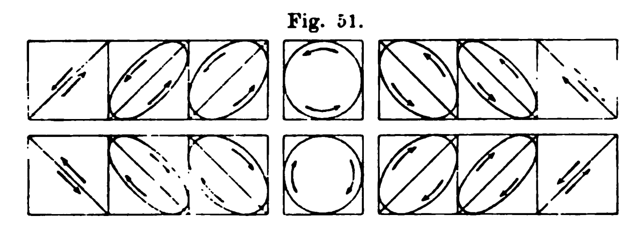
[1]) Eine drehende Bewegung, welche in derjenigen Richtung erfolgt, in welcher sich der Zeiger einer Uhr bewegt, soll im folgenden der Kürze halber als Bewegung „mit dem Uhrzeiger“, die entgegengesetzte als Bewegung „gegen den Uhrzeiger“ bezeichnet werden.

Wir sehen hieraus, dafs, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \varphi < \pi \text{ ist, die Bewegung gegen den Uhrzeiger} \\ \pi < \varphi < 2\pi \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{mit dem} \quad \text{„} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (56)$$

vor sich geht; $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ oder 2π geben geradlinige Bewegungen. In Fig. 51 sind die zwölf verschiedenen Bewegungsfälle

Fig. 51.



dargestellt, entsprechend $a = b$, wo φ innerhalb der Grenze Null und 2π um je $\frac{\pi}{6}$ zunimmt.

6. Für $a = b$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ werden Kreisbewegungen erhalten; sie unterscheiden sich durch ihre Richtung:

Ist $a = b$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erfolgt die Kreisbewegung gegen den Uhrzeiger.

Ist $a = b$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, so erfolgt die Kreisbewegung mit dem Uhrzeiger.

Die Phase der Bewegung auf der x-Achse geht voran. . . . (57)

Setzt man in (54) $a = b$ und zunächst $\beta_2 = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$, sodann $\beta_2 = \beta_1 - \frac{3\pi}{2}$ und schreibt man β statt β_1, so kommt:

Ein Kreis, Bewegungsrichtung gegen den Uhrzeiger

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = -a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \end{array}\right. \quad \ldots \quad (58)$$

Ein Kreis, Bewegungsrichtung mit dem Uhrzeiger

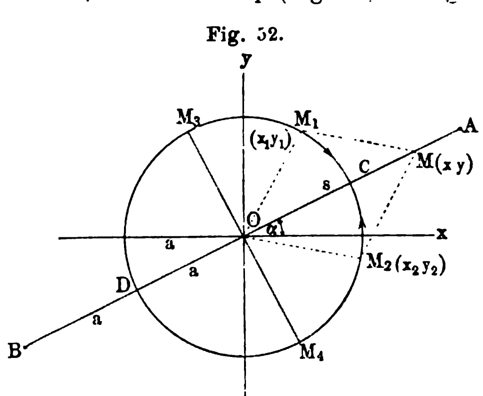
$$\left\{\begin{array}{l} x = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \\ y = a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \end{array}\right. \quad \ldots \quad (59)$$

In beiden Fällen ist offenbar $x^2 + y^2 = a^2$, welches die Kreisgleichung ist. Die Formeln (58) und (59) zeigen uns unmittelbar,

wie jede gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit k, die auf einem Kreise mit dem Radius a vor sich geht, in zwei harmonische Schwingungsbewegungen, die in beliebigen, zu einander senkrechten Richtungen x und y erfolgen, zerlegt werden kann. Die Periode T bestimmt sich hierbei aus Formel (1), nach welcher $kT = 2\pi a$ ist. Die Phase β kann vollkommen willkürlich gewählt werden.

§ 8. Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen, die mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung auf derselben Kreislinie vor sich gehen. Nehmen wir an, der Punkt M_1 (Fig. 52) bewege sich gleichförmig auf einer Kreislinie vom Radius a in der Uhrzeigerrichtung und mache einen vollen Umlauf in der Zeit T; ein zweiter Punkt M_2 bewege sich mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Unsere Aufgabe, beide Kreisbewegungen zusammenzusetzen, kommt dann darauf heraus, die Bewegung eines solchen Punktes M zu bestimmen, dessen Koordinaten x und y gleich der Summe der entsprechenden Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 der Punkte M_1 und M_2 sind. Der Punkt M mufs sich offenbar stets im Endpunkte der Diagonale des Parallelogramms aus OM_1 und OM_2 befinden.

Fig. 52.



Es ist leicht einzusehen, dafs die Bewegung des Punktes M eine geradlinige sein mufs. M_1 und M_2 begegnen sich in zwei Punkten C und D; in den entsprechenden Augenblicken befindet sich M in A resp. B, wo $OA = OB = 2a$ ist. Da die Punkte M_1 und M_2 immer in gleichem Abstande von C und D bleiben müssen, so ist klar, dafs die Diagonale, an deren Ende sich Punkt M befinden mufs, immer mit OA oder OB zusammenfallen wird. Fallen M_1 und M_2 mit M_3 und M_4 zusammen ($M_3M_4 \perp AB$), so befindet sich M in O. Man kann sich leicht vorstellen, dafs die Bewegung des Punktes M eine harmonische Schwingungsbewegung sein mufs, denn sie setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen, die offenbar harmonische Schwingungsbewegungen sind; die Koordinaten sind $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$.

Wir wollen nun dieselbe Frage analytisch untersuchen; bezeichnen wir mit β_1 und β_2 die Anfangsphasen derjenigen Schwingungsbewegungen x_1 und x_2 längs der Achse Ox, welche kombiniert mit den

Schwingungen y_1 und y_2 (die von ihnen um $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ abstehen) die kreisförmigen Bewegungen mit (M_1) und gegen (M_2) den Uhrzeiger geben [vergl. (57)]. Die Formeln (58) und (59) geben

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \\ y_1 = a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_1\right) \end{array}\right\} \text{mit dem Uhrzeiger} \\ \left.\begin{array}{l} x_2 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \\ y_2 = -a \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_2\right) \end{array}\right\} \text{gegen den Uhrzeiger} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (59, a)$$

Der Kürze halber setzen wir

$$2\pi \frac{t}{T} + \beta_1 = \Theta_1 \quad \text{und} \quad 2\pi \frac{t}{T} + \beta_2 = \Theta_2,$$

dann kommt, da $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \sin \Theta_1 + a \sin \Theta_2 = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \cos \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \\ y = a \cos \Theta_1 - a \cos \Theta_2 = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2} \sin \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} \end{array}\right\} \cdot \quad (60)$$

Dividiert man die untere Gleichung durch die obere und berücksichtigt die Werte der Winkel Θ_1 und Θ_2, so findet man $y = x tg \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2}$ oder

$$y = x tg \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden. Bezeichnet man den variablen Abstand OM mit $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist nach Formel (60) $s = 2a \sin \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2}$, d. h.

$$s = 2a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

Hieraus ist ersichtlich, daſs die Bewegung des Punktes M eine harmonische Schwingungsbewegung ist. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der x-Achse mit $\alpha = \angle AOx$, so kommt $y = x tg \alpha$, folglich [vergl. (61)]

$$\alpha = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

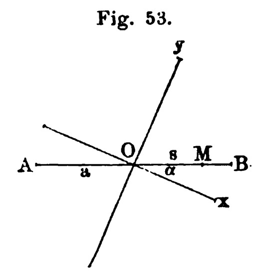
Zwei entgegengesetzte Kreisbewegungen (wo a der Kreisradius und T die Periode ist), deren Komponenten auf der x-Achse Schwingungen mit den Anfangsphasen β_1 (mit) und β_2 (gegen den Uhrzeiger) sind, setzen sich zu einer harmonischen Schwingungsbewegung zusammen. Die Amplitude dieser letzteren ist $2a$, ihre Periode T, die Anfangsphase $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$ und die Richtung dieser Schwingungsbewegung bildet mit der x-Achse einen Winkel $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$.

§ 9. Zerlegung einer geradlinigen harmonischen Schwingungsbewegung in zwei Kreisbewegungen. Nehmen wir an, der Punkt M vollführe eine harmonische Schwingungsbewegung zwischen den Punkten A und B (Fig. 53), deren Amplitude a, deren Periode T ist; die Entfernung $s = OM$ ist dann gleich

$$s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) = a \sin\Theta \quad \cdots \quad (64)$$

wo Θ nur der Kürze halber eingeführt ist. Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs die beiden gesuchten Bewegungen auf einem Kreise vom

Fig. 53.



Radius $r = \frac{a}{2}$ vor sich gehen müssen. Jede dieser Kreisbewegungen kann in zwei zu einander senkrechte Schwingungen längs zweier Achsen zerlegt werden, von denen die x-Achse einen ganz beliebigen Winkel $\angle BOx = \alpha$ mit der Richtung der gegebenen Bewegung bilden kann. Auf diese Weise erhält man vier Schwingungen x_1, y_1, x_2 und y_2, für welche die Ausdrücke (59, a) gelten, nur dafs man für a den Wert $\frac{a}{2}$ zu setzen hat.

Ist $\alpha = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ und $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$, so kommt $\beta_1 = \beta - \alpha$; $\beta_2 = \beta + \alpha$.

Setzt man diese Ausdrücke in (59, a) ein, so erhält man folgendes Endresultat:

Eine harmonische Schwingungsbewegung $s = a \sin\Theta$ kann in zwei Kreisschwingungen zerlegt werden.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Mit dem Uhrzeiger} \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{2}\sin(\Theta - \alpha) \\ y_1 = \frac{a}{2}\cos(\Theta - \alpha) \end{array}\right. & \text{Gegen den Uhrzeiger} \left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{2}\sin(\Theta + \alpha) \\ y_2 = -\frac{a}{2}\cos(\Theta + \alpha) \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (65)$$

Hier ist α der Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der x-Achse bildet; man kann denselben ganz willkürlich wählen, z. B. $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi : 4$ setzen.

§ 10. Zusammensetzung harmonischer Schwingungsbewegungen von ungleicher Periode T und $T_1 = kT$, wo k ein Zahlenkoeffizient ist.

A. Die Schwingungen haben gleiche Richtung. Am bequemsten ist es, die Zusammensetzung zweier harmonischer Schwingungsbewegungen von ungleicher Amplitude a und b und ungleicher Periode T und kT geometrisch auszuführen (nach der im § 4 beschriebenen Methode). Wir zeichnen demgemäfs zwei Kurven, welche den gegebenen Schwingungen entsprechen und konstruieren eine dritte Kurve, so dafs ihre Ordinaten gleich der Summe der Ordinaten beider ersten Kurven für dieselben Abscissen (Zeiten) werden. In Fig. 54 ist ein Fall gewählt, wo b gegen a klein und $k = \frac{1}{2}$ ist; A und B stellen die einzelnen Bewegungen, C die resultierende Bewegung dar. Die Kurve A ist punktiert angedeutet, um beim Vergleich mit C die vorgegangene Veränderung erkennen zu lassen. Die erhaltene Schwingung ist keine harmonische mehr; die ungleiche Neigung der Kurventeile zeigt, dafs der Punkt nach einer Seite schneller schwingt als nach der anderen. Die Kurve D entspricht dem Falle, wo Kurve B um so viel nach rechts gerückt ist, dafs c unter d_1 zu liegen kommt; in diesem Falle fällt

Fig. 54.

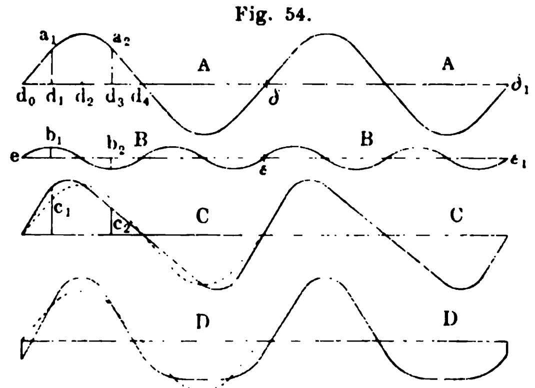
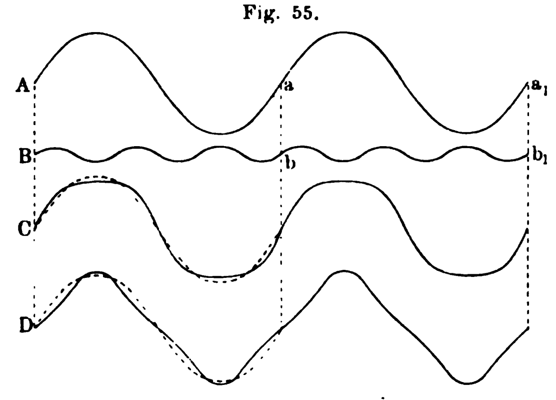


Fig. 55.

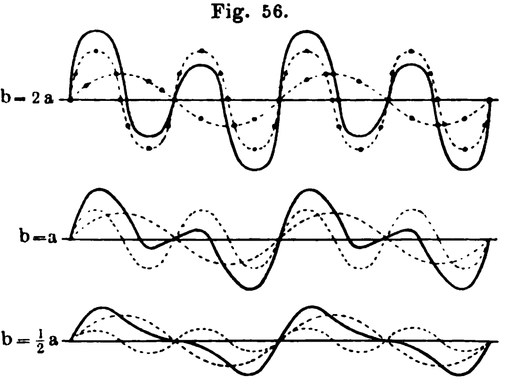


also die Nullphase der Schwingung A nicht mit der Nullphase der Schwingung B zusammen.

In Fig. 55 auf voriger Seite ist der Fall dargestellt, wo b gegen a klein und $k = \frac{1}{3}$ ist. Man erhält hier die periodische (jedoch unharmonische) Schwingung C. Die Schwingung D kommt zu stande, wenn die Phase Null der Schwingung A mit der Phase π der Schwingung B zusammenfällt.

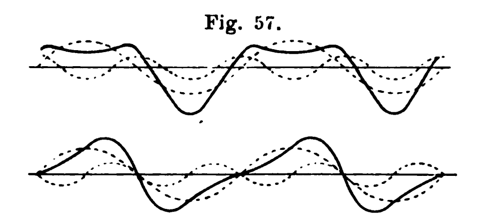
Viel kompliziertere Schwingungen erhält man, wenn b nicht klein gegen a ist. In Fig. 56 sind drei derartige Fälle dargestellt, wobei stets $k = \frac{1}{2}$ gewählt ist, so dafs also eine der Schwingungen doppelt so schnell vor sich geht als die andere. Die gegebenen Schwingungen sind punktiert dargestellt. Man kann hierbei deutlich den Einflufs des Amplitudenverhältnisses erkennen. Die erste Kurve wird erhalten, wenn $b = 2a$, die zweite, wenn $b = a$ und die dritte, wenn $b = a : 2$ ist. In allen drei Fällen ist die Phase φ der schnelleren Schwingung gleich Null, wenn die Phase der langsameren Null ist. In Fig. 57 erkennt man an den Kurven den Einflufs der Phase φ; in beiden Fällen ist $b = a : 2$.

Fig. 56.



Die erste Kurve wird erhalten, wenn $\varphi = \pi : 2$, die zweite, wenn $\varphi = \pi$ ist. In den ersten beiden Kurven der Fig. 56 sehen wir, dafs je zwei kleine Ausschläge nach der einen und anderen Seite mit zwei grofsen Ausschlägen abwechseln. Die dritte Kurve in Fig. 56 und die zweite in Fig. 57 sind einander im wesentlichen gleich.

Fig. 57.



B. Zu einander senkrechte Schwingungen. Die Gleichungen der beiden Schwingungen sind

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \\ y &= b \sin\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \beta_1\right) \end{aligned}\right| \quad \cdots\cdots \quad (66)$$

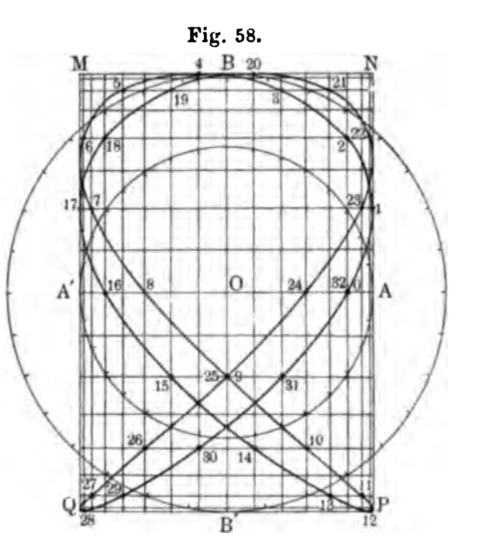
Schafft man aus ihnen die Zeit t heraus, so erhält man die Gleichung der Kurve, auf welcher sich der Punkt bewegt.

Konstruktiv kann man diese Kurve folgendermaſsen finden. Es sei $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen sind. Wir wählen nun $A'OA$ und $B'OB$ (Fig. 58) als Koordinatenachsen, beschreiben um O Kreise mit $OA = a$ und $OB = b$ als Radien und teilen die Kreisumfänge von A und B anfangend in $4n$ (n ist eine ganze Zahl), z. B. 32 gleiche Teile. Die Teilpunkte des Kreises (OA) verbinden wir durch Sehnen, welche zu OA senkrecht sind und ebenso die Teilpunkte des Kreises (OB) durch zu OB senkrechte Sehnen. Die Teile, in welche hierbei $A'A$ und $B'B$ zerfallen, entsprechen den Wegstrecken, welche von den Einzelschwingungen x und y für $T = T_1$ in gleichen Zeiten zurückgelegt würden. In Wirklichkeit aber ist

$$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q},$$

folglich legt der Punkt p Strecken in der Richtung $B'B$ in derselben Zeit zurück, in welcher er sich um q Strecken in der Richtung $A'A$ weiterbewegt, und je kleiner die Schwingungsdauer ist, eine um so gröſsere Anzahl Strecken muſs er in einer gegebenen Zeit zurücklegen. Kennt man die Lage des Punktes für einen gegebenen Moment, so kann man leicht die Lagen finden, welche er nach gleichen Zeitabschnitten einnehmen muſs. In Fig. 58 ist der Fall dargestellt, wo $T : T_1 = 2 : 3$ ist; die Anfangslage ist 0 (Null), die folgenden Lagen 1, 2, 3 . . ., 30, 31 und 32 werden erhalten, wenn man jedesmal um drei Teilpunkte parallel zu $A'A$ und um zwei Teilpunkte parallel zu $B'B$ weiter geht. In Fig. 59 auf folgender Seite sind die Kurven dargestellt, welche man für drei verschiedene Werte des Verhältnisses $T : T_1$ erhält und für fünf verschiedene Werte der Phase φ der ersten Schwingung (der Horizontalschwingung mit der Amplitude a), welche dem Augenblicke zugehören, wo die Phase der zweiten Schwingung (der Vertikalschwingung mit der Amplitude b) Null ist. Die oberen Zahlen für φ gelten für die ersten zwei Reihen, die unteren Zahlen für die dritte Reihe. Es läſst sich leicht beweisen, daſs die dritte Kurve der zweiten

Fig. 58.



Zeile ein Parabelbogen ist; man hat hierzu in (66) $\beta_1 = 0$, $\beta = \pi : 2$ und $T_1 = 2\,T$ zu setzen. In Fig. 60 ist der Fall $T : T_1 = 3:4$ für die Werte $\varphi = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{12}$ und $\frac{\pi}{3}$ dargestellt.

Fig. 59.

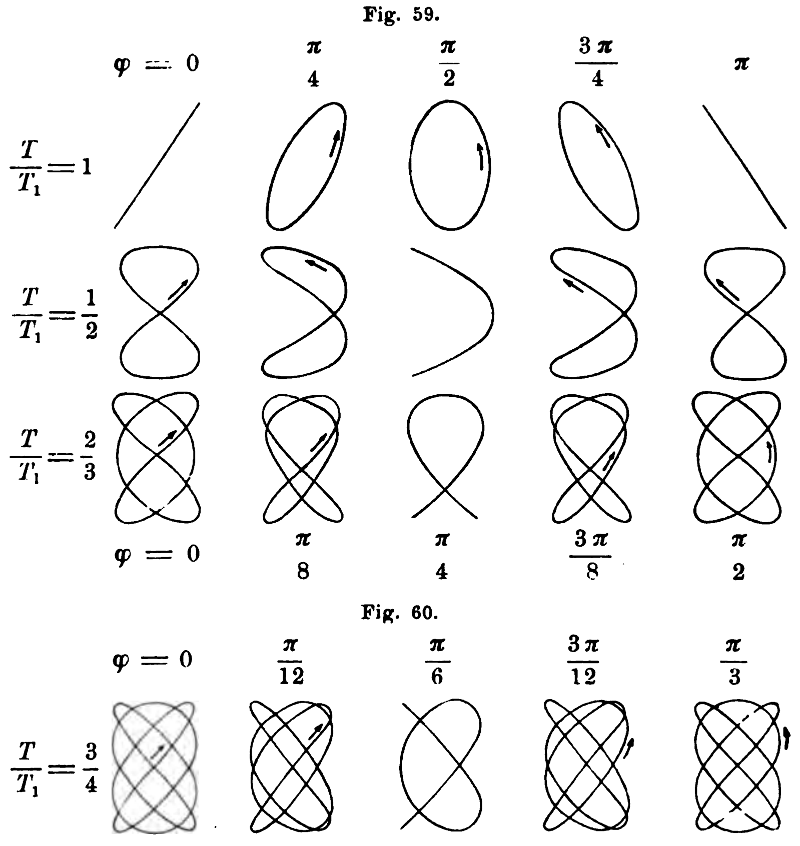


Fig. 60.

§ 11. **Gedämpfte Schwingungsbewegungen.** Der mit der höheren Mathematik noch nicht genügend vertraute Leser kann vorläufig diesen Paragraphen überschlagen.

In zahlreichen physikalischen Fragen spielt ein gewisser überaus interessanter Fall von nicht periodischen Schwingungsbewegungen, die wir als gedämpfte Schwingungen bezeichnen wollen, eine bedeutende Rolle. Stellen wir uns auf einer gewissen Geraden den unbeweglichen Punkt O vor und sei die Entfernung $s = OM$ des Punktes O vom bewegten Punkte M als Funktion der Zeit durch folgende Formel ausgedrückt:

$$s = a e^{-\nu t} \sin qt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

wo a eine lineare Gröſse, $e = 2{,}718\,281\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, welche Logarithmen wir durch das Symbol lg bezeichnen, und p und q positive Gröſsen sind, deren Zahlenwerte von der gewählten Zeiteinheit abhängen. Einen Begriff vom allgemeinen Charakter der gedämpften Schwingungsbewegung erhält man durch nähere Betrachtung des Ausdruckes (67). Da $\sin qt$ bei wachsendem t immer zwischen -1 und $+1$ liegen muſs, so wird s offenbar abwechselnd positiv und negativ werden; folglich ist die Bewegung eine Schwingungsbewegung. Da $p > 0$ ist, so nimmt der Faktor e^{-pt} ununterbrochen ab und (67) stellt deshalb eine Schwingungsbewegung mit unendlich abnehmender Amplitude dar, d. h. eine solche, bei welcher die aufeinander folgenden Ausschläge nach rechts und links immer kleiner und kleiner werden. Nach Formel (8) auf Seite 60 erhält man für die Geschwindigkeit v

$$v = ae^{-pt}\,(q\cos qt - p\sin qt) \quad \ldots \quad (68)$$

Für $t = 0$ ist $s = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = aq$.

Bezeichnen wir mit $t_1, t_2, t_3, \ldots t_i \ldots$ die Durchgangszeiten des Punktes M durch O, wo also $s = 0$ ist. Es ist dann $\sin qt_i = 0$, folglich $qt_1 = \pi$, $qt_2 = 2\pi$, $qt_3 = 3\pi$ u. s. w.; der n^{te} Durchgang durch O erfolgt zur Zeit

$$t_n = n\frac{\pi}{q} \quad \ldots \quad (69)$$

Hieraus folgt, daſs der Punkt M den Punkt O nach gleichen Zeitintervallen τ passiert; es ist

$$\tau = \frac{\pi}{q} \quad \ldots \quad (70)$$

Bezeichnet man mit $T_1, T_2, T_3, \ldots T_i, \ldots$ die Augenblicke des Stillstandes, wo die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, so kommt nach (68)

$$q\cos qT_i - p\sin qT_i = 0 \quad \text{oder} \quad tg\,qT_i = \frac{q}{p}.$$

Setzt man fest, daſs $arctg\,\frac{q}{p}$ den kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Tangente gleich $\frac{q}{p}$ ist, so erhält man $qT_1 = arctg\,\frac{q}{p}$; $qT_2 = arctg\,\frac{q}{p} + \pi$; $qT_3 = arctg\,\frac{q}{p} + 2\pi$ und allgemein $qT_i = arctg\,\frac{q}{p} + (i-1)\pi$. Der Augenblick T_n, wo Punkt M zum n^{ten} Male zur Ruhe gelangt, wird durch die Formel

$$T_n = \frac{1}{q}\,arctg\,\frac{q}{p} + (n-1)\frac{\pi}{q} \quad \ldots \quad (71)$$

gegeben. Hieraus folgt, dafs der Punkt M nach gleichen Zeitintervallen

$$\tau' = \frac{\pi}{q} \quad \ldots \ldots \ldots (72)$$

zum Stillstand gelangt. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (70), so sieht man, dafs die Zeit, welche zwischen zwei Durchgängen durch O liegt, gleich derjenigen ist, welche von einem Stillstande bis zum folgenden verfliefst. Die Ausdrücke (69) und (71) zeigen uns jedoch, dafs die Augenblicke des Stillstandes ($v = 0$) nicht genau in der Mitte zwischen den Augenblicken des Durchganges von M durch O liegen ($s = 0$).

Bezeichnen wir mit $s_1, s_2, s_3 \ldots s_i \ldots$ die aufeinander folgenden Ausschläge oder Amplituden, d. h. die Entfernungen OM in den Augenblicken T des Stillstandes. Formel (67) giebt dann

$$s_i = a e^{-pT} \sin q T \quad \ldots \ldots (73)$$

Wir hatten jedoch $tg\, q\, T_i = \frac{q}{p}$, folglich $\sin q\, T_i = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Beachtet man, dafs die Vorzeichen alternieren, wenn $q\,T$ um π wächst und benutzt man die Formel (71), so ergiebt sich für die n^{te} Amplitude der folgende, recht komplizierte Ausdruck

$$s_n = (-1)^{n-1} \frac{a q}{\sqrt{p^2 + q^2}} e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{p} - (n-1) \pi \frac{p}{q}} \quad \ldots (74)$$

Läfst man das Vorzeichen fort und berücksichtigt somit nur die absoluten Werte der Amplituden, so erhält man

$$s_n = s_{n-1} e^{-\pi \frac{p}{q}} \quad \ldots \ldots \ldots (75)$$

Somit wird jede Amplitude aus der vorhergehenden durch Multiplikation derselben mit ein und demselben konstanten Faktor erhalten. Die einander folgenden Amplituden stellen also eine abnehmende unendliche geometrische Reihe dar; eine gedämpfte Schwingung hört also im theoretischen Sinne niemals auf.

Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Ausschläge heifst das logarithmische Dekrement der Schwingungsbewegung; bezeichnet man ihn mit λ, so folgt aus (75)

$$\lambda = lg \frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{\pi p}{q} \quad \ldots \ldots (76)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dafs die Durchgangsgeschwindigkeiten v_i des Punktes M durch O eine ganz ebensolche geometrische Reihe darstellen wie die Ausschläge s_i [vergl. (68) und (70)].

Die allgemeine Formel (27) auf Seite 67 giebt als Beschleunigung w des Punktes M

$$w = a e^{-pt} [(p^2 - q^2) \sin qt - 2 pq \cos qt].$$

Diesen Ausdruck kann man folgendermafsen umformen

$$w = -(p^2 + q^2)\, a e^{-pt} \sin qt - 2 p a e^{-pt} (q \cos qt - p \sin qt).$$

Vergleicht man dies mit (67) und (68), so erhält man

$$w = -(p^2 + q^2) s - 2pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Ist m die Masse des Punktes M, so ist die Kraft f, unter deren Einflufs sich dieser Punkt befindet

$$f = -m(p^2 + q^2) s - 2mpv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Diese Formel lehrt uns das folgende: **Der Punkt M führt eine gedämpfte Schwingungsbewegung aus, wenn auf ihn die Resultante zweier Kräfte wirkt, von welchen die eine nach dem Punkte O hin gerichtet und dem Abstande s des Punktes M von O proportional ist, während die andere eine Richtung hat, welche derjenigen der Geschwindigkeit v des Punktes M, d. h. seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt und der Gröfse nach proportional dieser Geschwindigkeit ist.** Fehlt diese zweite Kraft ($p = 0$), welche der Bewegung ununterbrochen entgegenwirkt, so erhält man eine harmonische Schwingungsbewegung. Das Auftreten der anderen Kraft, die von der Geschwindigkeit der Bewegung selbst abhängt, ruft das allmähliche Abklingen der Schwingungen hervor. In der Folge werden wir mehrere Fälle kennen lernen, wo derartige, die Bewegung hemmende Kräfte auftreten (z. B. der Luftwiderstand).

Fünftes Kapitel.

Strahlende Ausbreitung von Schwingungen.

§ 1. Das Zustandekommen von Strahlungen. Ein isotropes Medium nannten wir einen Stoff, der einen Teil des Raumes erfüllt und nach allen Richtungen hin die gleichen Eigenschaften hat. Stellen wir uns diesen Stoff (es kann sowohl Materie als auch der Äther sein) aus einer sehr grofsen Zahl kleiner Teilchen bestehend vor, oder wie wir es auszudrücken pflegen, aus materiellen Punkten bestehend. Jedem dieser Teilchen entspricht ein bestimmter Punkt im Raume, der von ihm eingenommen wird, falls es sich in Ruhe befindet, d. h. wenn alle auf dasselbe wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Nehmen wir ferner an, dafs die Teilchen derart aufeinander wirken, dafs, sobald nur ein Teilchen A aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, die auf die Nachbarteilchen wirkenden Kräfte aufhören, sich das Gleichgewicht zu halten. Infolgedessen geraten auch diese Teilchen in Bewegung,

indem sie sich nach der Seite verschieben, nach welcher sich das erste bewegt hatte. Die weitere Folge ist, dafs die Nachbarteilchen der eben betrachteten, darauf Teilchen, die noch weiter vom ersten abstehen u. s. f. sich zu verschieben beginnen. Der Bewegungszustand breitet sich somit durch das Medium von Punkt zu Punkt derart aus, dafs immer entferntere Teilchen in Bewegung geraten. Es möge nun noch die Annahme gelten, dafs der Charakter der Bewegung für alle Teilchen der gleiche sei. Setzen wir jetzt voraus, das Teilchen A beginne eine harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude a und der Periode T und diese Bewegung pflanze sich von Teilchen zu Teilchen immer weiter im gegebenen Medium fort. Betrachten wir solche Teilchen, welche, auf einer gewissen Geraden befindlich, nacheinander ihre harmonischen Schwingungsbewegungen beginnen. Eine Bewegung, die sich einer solchen Reihe von Teilchen entlang fortpflanzt, wollen wir Strahlung, die Gerade, längs welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zeitweilig und unter Vorbehalt einen Strahl nennen.

Zu graphischen Zwecken kann man einen Strahl geometrisch durch eine gerade Linie darstellen. Der Ausdruck „Strahl" wird auch in dem Falle gebraucht, wenn die sich ausbreitende Bewegung keine harmonische Schwingungsbewegung ist, sondern eine viel kompliziertere, z. B. eine gedämpfte Schwingung oder eine andere aperiodische Bewegung. Die strahlenförmige Übertragung von Bewegungen spielt eine überaus wichtige Rolle in den verschiedenartigsten Erscheinungen; hierher gehören: die Ausbreitung der Wellen an Flüssigkeitsoberflächen, die Ausbreitung transversaler Erschütterungen an Fäden und Saiten, die Ausbreitung des Schalles in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, die Ausbreitung des Lichtes und endlich die Ausbreitung einer gewissen Art von Bewegungen im Äther, die um ihres Charakters und gewisser äufserer Kennzeichen willen zu den elektrischen Erscheinungen gerechnet werden.

Wir wollen uns vorläufig darauf beschränken, die Ausbreitung harmonischer Schwingungsbewegungen im isotropen Medium zu betrachten. Die Entfernung, auf welche hin sich der Bewegungszustand in der Zeiteinheit überträgt, heifst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen oder der Strahlung (Geschwindigkeit des Schalles, des Lichtes); wir wollen sie mit v bezeichnen. Was wir hier Geschwindigkeit nennen, stellt für das isotrope Medium einen Vektor dar, der für alle Punkte des Mediums und in allen Richtungen der gleiche ist und ist es nicht zu verwechseln mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen selbst bei ihren Schwingungen. Letztere Geschwindigkeit ändert sich im Laufe der Zeit ununterbrochen für jedes einzelne Teilchen und in jedem gegebenen Moment und ist für die verschiedenen längs demselben Strahle befindlichen Teilchen im allgemeinen verschieden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v hängt

von den Eigenschaften des Mediums selbst ab; in verschiedenen Medien ist sie im allgemeinen verschieden. Man hat zwei Arten von strahlender Ausbreitung der Schwingungen zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die Richtung der Schwingungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, d. h. zur Richtung des Strahles; solche Schwingungen heifsen **transversale** (Querschwingungen). Im zweiten Falle fällt die Richtung der Schwingungen mit der Richtung der Strahlen zusammen; solche Schwingungen heifsen **longitudinale** (Längsschwingungen).

§ 2. Bildung von Strahlen mit Querschwingungen. Sei AB (Fig. 61) eine Gerade, längs welcher anfangs Teilchen lagen und längs deren sich eine Schwingungsbewegung fortpflanzt. Zuerst begann das Teilchen A sich zu bewegen, ein wenig später das rechte Nachbarteilchen u. s. f. In Fig. 61 ist die Anordnung der Teilchen zur Zeit $t = T:4$ dargestellt, wobei die Zeit vom Beginn der Schwingung des ersten Teilchens A an gerechnet ist. Zur Zeit $t = T:4$ hat das Teilchen A seine Grenzlage erreicht; die folgenden Teilchen sind, da sie ihre Bewegungen später begannen, hinter A zurückgeblieben; die Pfeile an ihnen zeigen die Richtung ihrer Bewegungen. Alle rechts von B liegenden Teilchen befinden sich noch in Ruhe.

Fig. 61.

In Fig. 62 ist die Anordnung der Teilchen und ihre Bewegungsrichtung zur Zeit $t = T:2$ dargestellt. Hier hat A eine halbe, B eine

Fig. 62.

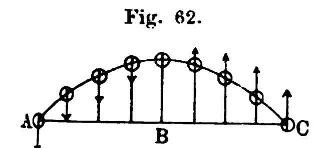
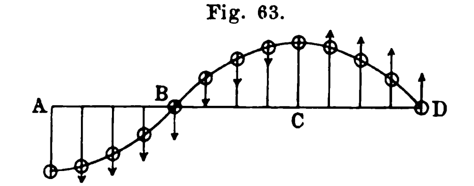
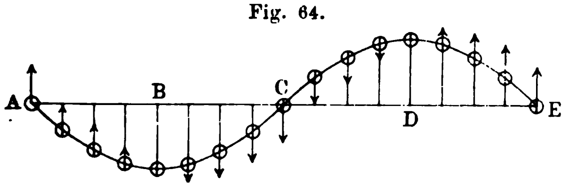


Fig. 63.



Viertelschwingung vollendet und die Schwingungsbewegung hat sich bis nach C ausgebreitet. In Fig. 63 ist die Anordnung der Teilchen

Fig. 64.



und ihre Bewegungsrichtungen zur Zeit $t = \frac{3}{4} T$ angegeben, wo A die äufserste negative Entfernung erreicht, B eine halbe, C eine Viertelschwingung vollendet hat und D eben im Begriffe steht, seine Bewegung zu beginnen. Endlich ist in Fig 64 ebendasselbe nach Verlauf

der Zeit T dargestellt, gerechnet vom Augenblicke an, wo sich A zu bewegen begann. A hat eine volle Schwingung vollendet und schickt sich eben an, die zweite zu beginnen, C hat eine halbe Schwingung vollendet; die Bewegung selbst hat sich bis zum Teilchen E fortgepflanzt, welches sich eben zur ersten Schwingung anschickt. Wir sehen, dafs A und E ihre Gleichgewichtslagen gleichzeitig verlassen, und dafs ihre Geschwindigkeiten gleichgerichtet sind. Offenbar werden ihre Bewegungen auch weiterhin vollkommen identisch bleiben und werden sie sich beständig in gleichen Schwingungsphasen befinden. Die Entfernung AE heifst Wellenlänge; man pflegt sie mit λ zu bezeichnen.

Wellenlänge (λ) heifst die Entfernung der nächsten Punkte eines Strahles, welche sich in gleicher Phase befinden; einer dieser Punkte hat zu schwingen begonnen, nachdem der andere eine volle Schwingung vollendet hat. In der Zeit T hat sich die Schwingung von A bis nach E fortgepflanzt, daraus ergiebt sich auch noch folgende Definition:

Wellenlänge (λ) heifst diejenige Entfernung, auf welche sich die Schwingungsbewegung in der Zeit T (innerhalb deren ein Teilchen eine volle Schwingung vollendet) fortpflanzt. Es ist nun leicht zu verstehen, wie die Ausbreitung der Schwingungen und die Bewegung der einzelnen Teilchen im weiteren für $t > T$ vor sich gehen. So zeigt z. B. die Wellenlinie in Fig. 65 die Anordnung der Teilchen zur Zeit $t = \frac{3}{2} T$ und in Fig. 66 ist ein Teil des Strahles für den Augenblick dargestellt, wo das Teilchen A schon $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ Schwingungen vollendet hat (n ist eine ganze Zahl). Setzt man $AE = EJ = JL = LN = NP = \lambda$, so zeigt sich, dafs je zwei Teilchen, die voneinander um eine ganze Anzahl Wellenlängen oder um eine gerade Zahl halber Wellenlängen $\left[2n \frac{\lambda}{2}\right]$ voneinander abstehen, sich in gleichen Phasen befinden, z. B. E und L, J und P. Man kann von jedem beliebigen Teilchen X des Strahles

Fig. 65.

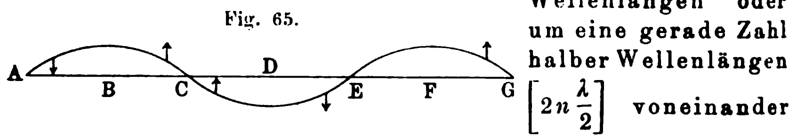
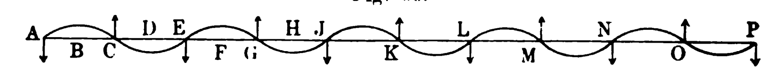


Fig. 66.



nach der einen oder anderen Seite gehen, jedesmal trifft man nach einer geraden Zahl halber Wellen auf ein Teilchen Y, das sich in derselben Phase wie X befindet.

dreht sich die ganze Figur um die Gerade OA, so entsteht eine Reihe von Kegelflächen, die aus der Wellenfläche QR ringförmige Zonen und eine zentrale Segmenthaube (Kalotte) mM herausschneiden. Bezeichnet man mit r_n die Länge der Seitenlinie des $n$ten Kegels, so dafs $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ wird, wo $r_0 = AP$ ist, so sieht man, dafs die $n$te Zone von den Kegelflächen eingeschlossen ist, deren Seitenlinien r_n und $r_{n+1} = r_n + \frac{\lambda}{2}$ sind; die nullte Zone bildet die zentrale Segmenthaube. Bezeichnen wir den Flächeninhalt der $n$ten Zone mit S_n. Aus Fig. 85 ist ersichtlich, dafs $S_n = 2\pi Rh$ ist, wo $h = R\,[\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)]$ ist; hieraus folgt

$$S_n = 2\pi R^2\,\{\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (a)$$

Ferner ist nach Fig. 85

$$\left(r_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0)\cos(\alpha + \beta)$$

$$r_n^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R\,(R + r_0)\cos\alpha.$$

Durch Subtraktion kommt

$$\lambda\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = 2R(R + r_0)\,\{\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\} \quad \cdot \quad \cdot \quad (b)$$

Dividiert man (a) durch (b), so kommt

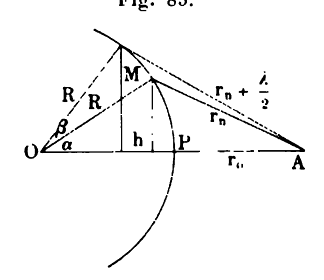
$$S_n = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = S_0 + n\,\frac{\pi R\lambda^2}{2(R + r_0)} \quad \cdot \quad \cdot \quad (27)$$

wo $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ gesetzt und mit S_0 der Inhalt der Segmenthaube bezeichnet war, nämlich

$$S_0 = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_0 + \frac{\lambda}{4}\right) \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (28)$$

Formel (27) zeigt, dafs die Zonenflächen eine arithmetische Reihe bilden, und dafs daher j e d e v o n i h n e n g l e i c h d e m a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l a u s z w e i b e n a c h b a r t e n Z o n e n i s t. Aus diesem Grunde kann man folgende Überlegung anstellen: Zu jedem Punkte M (Fig. 85) kann man zwei solche auf den Nachbarzonen liegende Punkte M_1 und M_2 finden, dafs sich AM_2 und AM_1 von AM um $\lambda : 2$ unterscheiden. Die Schwingung, welche sich von M nach A ausbreitet, wird daher von einer der Schwingungen, die von M_1 oder M_2

Fig. 85.



ausgehen, aufgehoben. Alle von der n ten Zone ausgehenden Schwingungen kann man sich daher durch die Schwingungen aufgehoben denken, die von der Hälfte der $(n - 1)$ten und der Hälfte der $(n + 1)$ten Zone ausgehen. So werden z. B. die Schwingungen der 3ten Zone aufgehoben von den Schwingungen einer Hälfte der 4ten und einer Hälfte der 2ten Zone; die Schwingungen der 2ten von einer Hälfte der 1ten und einer Hälfte der 3ten; endlich die Schwingungen der 1ten Zone von einer Hälfte der 2ten Zone und einer Hälfte der Segmenthaube. Es bleiben daher die Schwingungen bestehen, welche von einer Hälfte der zentralen Segmenthaube ausgehen. Hierzu kommt noch, dafs die Schwingungen, welche nach A (Fig. 84) von entfernteren Zonen sich ausbreiten, einen längeren Weg zu durchlaufen haben und (was bei einer tiefergehenden Untersuchung besonders wichtig ist) die Fläche QR gegen die Normale geneigt verlassen. Infolgedessen kann man die Schwingungen gänzlich vernachlässigen, welche nach A von Zonen hingelangen, die von der Segmenthaube weiter abstehen.

Haben wir nunmehr die Schwingungsbewegung in A als Resultat der Zusammensetzung aller Schwingungen betrachtet, die von der Oberfläche der um P gelegenen Segmentfläche $S_0 : 2$ ausgehen, so sind wir damit gewissermafsen zur Vorstellung von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen, also zur Vorstellung von Strahlen zurückgekehrt. Es haben solche Strahlen aber keinerlei reale Bedeutung, sondern erweisen sich nur von grofsem Nutzen bei den geometrischen Konstruktionen, die man vorzunehmen hat, falls man die Ausbreitungsweise der Schwingungen in verschiedenerlei Fällen untersucht.

Die vorhergehenden Überlegungen, welche sich auf die Aufhebung der Wirkungen verschiedener Zonen bezogen, sind offenbar nur auf den Fall anwendbar, dafs die ganze Wellenfläche QR (Fig. 84) wirklich existiert, also auf den Fall der sogenannten freien Ausbreitung von Schwingungen.

§ 12. Diffraktion. Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, dafs nur die Wellenflächen eine reale, physikalische Bedeutung besitzen, während man an der Vorstellung von Strahlen nur im Falle einer allseitigen freien Ausbreitung der Schwingungen und auch dort nicht ganz ungezwungen festhalten kann. Ganz besonders wird dies im Falle der unfreien Ausbreitung von Wellen klar, wenn nämlich eine Welle auf ihrem Wege auf irgend ein Hindernis trifft, welches die weitere Ausbreitung eines ihrer Teile hemmt. Es tritt dann eine besondere Art von Erscheinungen auf, die man Diffraktion nennt; bei Betrachtung dieser Art von Erscheinungen wird es uns ganz unmöglich, an der Vorstellung von Strahlen festzuhalten. Alle auf diese Erscheinungen bezüglichen Einzelheiten sollen erst in der Lehre vom Licht

Δx	$\Delta\beta$	Δm	Δt	$\Delta\Theta$	Strahlgleichung
0	0	0	0	0	$y = a \sin \Theta$
$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{T}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$y = - a \cos \Theta$
$\frac{\lambda}{2}$	π	$\frac{1}{2}$	$-\frac{T}{2}$	$-\pi$	$y = - a \sin \Theta$
$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3T}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$y = a \cos \Theta$
λ	2π	1	$-T$	-2π	$y = a \sin \Theta$

. . . . (9)

Änderungen der Gröfsen x um λ, β um 2π und m um 1 ziehen keine Änderungen des Ausdrucks $y = f(x, t)$ nach sich. Dasselbe bezieht sich auch auf Änderungen der Gröfsen x um $\pm n\lambda$, β um $\pm 2n\pi$ und m um $\pm n$, wo n eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt, dafs, wenn man für Δx die Werte $+\frac{\lambda}{2}$ und $-\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{4}$ und $-\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$ und $-\frac{\lambda}{4}$ wählt, sie die Form der Strahlgleichung in derselben Weise verändern.

Aus obigem geht hervor, dafs man sich den Anfangspunkt A nach der einen oder anderen Seite um eine ganze Zahl Wellenlängen verschoben denken kann, ohne dadurch die Ausdrücke für y zu ändern. Hieraus ergiebt sich dann weiter, dafs der Anfangspunkt A immer einem beliebigen Punkte O des Strahles bis auf eine Entfernung genähert werden kann, die kleiner ist als die Wellenlänge λ und — wenn es gleichgültig ist, auf welcher Seite von O der Punkt A liegen soll — sogar auf eine Entfernung, die nicht gröfser als $\frac{\lambda}{2}$ ist. Der Anfangspunkt A kann auch um eine beliebige Strecke, die keine ganze Zahl Wellenlängen enthält, verschoben werden, unter der Bedingung, dafs sich die Gröfse x in Formel (4) entsprechend ändert oder dafs sich im besonderen Falle die Form der Strahlgleichung in der Weise ändert, wie sich dies aus unserer kleinen Tabelle (9) ergiebt.

§ 4. Längsschwingungen. Längsschwingungen (longitudinale Schwingungen) nannten wir solche, die in der Richtung, in welcher sich die Schwingungen ausbreiten, d. h. in der Richtung des Strahles selbst vor sich gehen. Bei Längsschwingungen sind die Teilchen anfangs gleichmäfsig auf einer Geraden verteilt und bleiben beständig auf dieser Geraden, es ändert sich nur der Charakter ihrer Verteilung, welche aufhört eine gleichförmige zu sein.

Bei Herleitung der Formel (4) auf S. 164 spielt die Richtung der Schwingungen keine Rolle, deshalb bleibt die Gleichung des Strahles (4) auch richtig für Strahlen mit Längsschwingungen.

des Gebietes $CabD$ ausbreiten. In Wirklichkeit aber breiten sich die von den verschiedenen Punkten des kleinen Teiles ab der Wellenfläche ausgehenden Schwingungen nach allen Seiten aus und veranlassen dadurch Schwingungen auch solcher Punkte M, die relativ weit jenseits OC resp. OD liegen. Aus diesem dritten Falle der Diffraktion geht ganz besonders deutlich hervor, dafs man von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen überhaupt nicht reden darf, und dafs man daher Strahlen auch bei geometrischen Konstruktionen nur mit äufserster Vorsicht zu verwenden hat.

Diffraktionserscheinungen kommen auch bei Ausbreitung einer Wellenlinie (S. 181), welche auf ihrem Wege irgend welchen Hindernissen begegnet, zu stande.

§ 13. Der physikalische Begriff der Wellenfläche. Wir gelangten zum Begriffe einer sphärischen Wellenfläche im freien isotropen Medium, indem wir voraussetzten, dafs im Anfang nur ein Punkt zu schwingen beginnt, und dafs sich diese Schwingungsbewegung auf alle denselben allseitig umgebenden Teilchen überträgt. Ein derartiger Fall ist aber physikalisch unmöglich. Die ursprünglichen Schwingungen gehen immer von Teilchen aus, die in einem gewissen, wenn auch bisweilen kleinen Teile des Raumes gelegen sind; zudem besitzen die Schwingungen verschiedener Teilchen in vielen Fällen weder dieselbe Richtung noch auch die gleiche Phase. Aufserdem pflanzen sich die von jedem einzelnen Teilchen ausgehenden Schwingungen nicht in gleicher Weise nach allen Richtungen fort. Ist das Medium so beschaffen, dafs sich in ihm Querschwingungen ausbreiten können, so erfolgt die Ausbreitung vorzugsweise in einer zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene; ist das Medium jedoch fähig, Längsschwingungen zu übertragen, so geht die Ausbreitung in der Richtung der ursprünglichen Schwingung vor sich. Aus allem Gesagten geht hervor, dafs es eine vollständige, geschlossene Wellenfläche, welche den Erregungsbezirk der ursprünglichen Bewegungen allseitig umgiebt und den geometrischen Ort der Punkte darstellt, welche die Schwingungen zu derselben Zeit und in derselben Phase erreichen — in Wirklichkeit gar nicht giebt. Ein kleiner Teil einer geometrischen Wellenfläche kann indes auch die physikalische Bedeutung eines Ortes der in gleicher Phase befindlichen Punkte haben. Zwecks der Erklärung von physikalischen Erscheinungen mufs man sich daher auf die Betrachtung von nur kleinen Teilen einer Wellenfläche beschränken, die vom Entstehungsorte der ursprünglichen Schwingungen aus jedenfalls unter sehr kleinem Winkel erscheinen. So verfährt man denn auch in der That.

Einfacher gestalten sich die Verhältnisse für Wellenlinien im Falle von Querschwingungen. In diesem Falle sind geschlossene Wellen-

Zeile I ($t = 0$): Alle Teilchen sind in Ruhe.

Zeile II $\left(t = \frac{T}{12}\right)$: Teilchen 1 hat sich verschoben, alle übrigen sind in Ruhe.

Zeile III $\left(t = \frac{2\,T}{12}\right)$: Teilchen 1 ist weiter nach rechts gerückt, 2 hat sich zu bewegen angefangen.

Zeile IV $\left(t = \frac{3\,T}{12}\right)$: 1 hat seine gröfste Entfernung erreicht, 2 ist weiter nach rechts gerückt, 3 hat sich zu bewegen angefangen.

Zeile V $\left(t = \frac{4\,T}{12}\right)$: 1 ist auf dem Rückwege, 2 in der gröfsten Entfernung, 3 ist weitergerückt, 4 hat sich zu bewegen angefangen.

Zeile VI $\left(t = \frac{5\,T}{12}\right)$: 3 hat die Grenzlage erreicht, 5 hat sich zu bewegen angefangen.

Zeile VII $\left(t = \frac{T}{2}\right)$: 1 hat eine halbe Schwingung vollführt, 4 die Grenzlage erreicht, 7 schickt sich zur Bewegung an. Es ist klar, dafs die Entfernung 1 bis 7 gleich einer halben Wellenlänge ist und dafs die Teilchen 1 und 7 gleichzeitig, jedoch in entgegengesetzten Richtungen aus ihren Gleichgewichtslagen treten und sich beständig in entgegengesetzten Phasen befinden werden. So haben z. B. in Zeile X die Teilchen 1 und 7 ihre Grenzlagen — das eine links, das andere rechts — erreicht. Zeile XIII entspricht dem Augenblicke $t = T$, wo 1 eine volle Schwingung vollendet hat, 7 eine halbe Schwingung und 13 eben im Begriffe steht, sich zu bewegen. Die Entfernung 1 bis 13 ist gleich einer Wellenlänge und die Teilchen 1 und 13 werden sich beständig in gleichen Phasen befinden, während sich die Teilchen 7 und 13 in entgegengesetzten Phasen befinden.

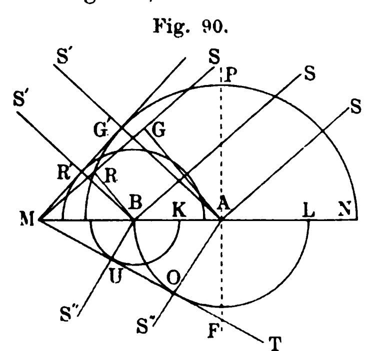
Zeile XIV zeigt die Verteilung der ersten 18 Teilchen zur Zeit $n\,T + \frac{1}{12}\,T$, wo n eine ganze Zahl und gröfser als Eins ist. Für die Teilchen 1 bis 14 kann Zeile XIV als einfache Verlängerung der vorhergehenden Zeilen betrachtet werden, die Teilchen 15 bis 18 in Zeile XIV bis XXV aber setzen gewissermafsen schon früher begonnene Bewegungen fort.

Punkte, welche voneinander um $\frac{\lambda}{2}$ abstehen, haben eine Phasendifferenz gleich π; sie erreichen gleichzeitig, jedoch in entgegengesetzten Richtungen, ihre Maximalabstände von der Ruhelage (die gleich der Amplitude a sind). Dieser Fall tritt nach gleichen Zeiträumen $T:2$ ein, wobei die beiden betrachteten Teilchen sich wechsel-

der Geraden AJ gehen und zur Zeichnungsebene senkrecht sind. Je näher einer dieser Punkte zu J ist, desto kleiner ist der Radius des entsprechenden Halbcylinders. Dieser Radius läfst sich leicht bestimmen. Die Punkte A und B begannen gleichzeitig zu schwingen; der Halbcylinder um A hat sich in der Zeit ausgebildet, in welcher sich die Schwingungen von B nach J ausgebreitet haben; hieraus folgt, dafs der Radius des um A beschriebenen Halbkreises, d. h. $AP = BJ$ ist. Ebenso ist $CQ = DJ$, $ER = FJ$ u. s. w.

Die Trennungsfläche MN stellt einen besonderen Fall einer Oberfläche $\sigma = AB$ dar (Fig. 81), an der wir das Huygenssche Prinzip erläutert haben. Die Fläche, welche alle erwähnten Halbcylinder berührt, ist die gesuchte neue Wellenfläche, die sich bei der Reflexion bildet. Beweisen wir, dafs sie eine Ebene ist, welche durch J geht, oder dafs die Gerade JK die gemeinsame Tangente aller in der Zeichnungsebene liegenden Halbkreise ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir Fig. 90, wo AG ein Teil einer einfallenden ebenen Welle, SA, SB, SM einfallende Strahlen sind. In dem Augenblicke, wo die Schwingungsbewegung den Punkt M erreicht, haben wir in der Zeichnungsebene um A einen Halbkreis mit dem Radius GM und um den Zwischenpunkt B einen Halbkreis mit dem Radius RM. Ziehen wir vom Punkte M aus zwei Tangenten MR' und MG' an diese Halbkreise und zeigen wir, dafs sie zusammenfallen, d. h. dafs M, R' und G' auf einer Geraden liegen. Zu diesem Zwecke verbinden wir G' mit A und R' mit B. Die Dreiecke $MG'A$ und MGA sind einander kongruent, denn es ist $\angle G' = \angle G = 90^0$ und Radius $AG' = MG$. Hieraus folgt, dafs $\angle G'MA = \angle GAM$ ist. Ebenso folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $MR'B$ und MRB, dafs $\angle R'MB = \angle RBM$ ist. Es sind aber $\angle GAM$ und $\angle RBM$ untereinander gleich, denn es ist $GA \parallel RB$; folglich ist $\angle G'MA = \angle R'MB$, was zu beweisen war. Die auf diese Weise gebildete ebene Welle $MR'G'$ wird sich daher parallel zu sich selbst weiter bewegen. Die Geraden $AG'S'$ und $BR'S'$ sind reflektierte Strahlen.

Fig. 90.



Aus der Konstruktion geht hervor, dafs der einfallende Strahl SA, die Normale AP zur Trennungsfläche und der reflektierte Strahl AS' in einer Ebene liegen. Es erübrigt nur noch zu beweisen, dafs der Einfallswinkel SAP gleich dem Reflexionswinkel PAS' ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke $MG'A$ und MGA folgt, dafs $\angle G'AM$

Zeit $T:2$ bewegen sich die Teilchen in entgegengesetzten Richtungen, gekennzeichnet durch die Pfeile unterhalb PQ; jetzt sind die Verdichtungen A, B und C nach A_1, B_1 und C_1 gelangt; die Verdünnungen a und b nach a_1 und b_1 und in α_1 hat sich eine neue Verdünnung gebildet oder ist dorthin von links gelangt, falls P nicht der Anfangspunkt des Strahles ist.

§ 5. Gleichung eines Strahles, welcher eine Reihe von Medien durchdrungen hat. Die Strahlgleichung (4) kann für den Fall verallgemeinert werden, dafs der Strahl durch eine Reihe von Medien dringt, in welchen er sich nicht mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzt, so dafs, falls die Periode T für alle Medien die gleiche ist, die Wellenlänge des Strahles für die verschiedenen Medien eine verschiedene ist. Nehmen wir an, die Schwingung habe im Punkte A (Fig. 70) begonnen und durchdringe der Reihe nach die Medien I, II, III u. s. w. Bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 . . . die Längen der in diesen Medien befindlichen Teile des Strahles, mit λ_1, λ_2, λ_3 . . . die Wellenlängen und mit τ_1, τ_2, τ_3 . . . die Zeiten, die zum Durchlaufen der einzelnen Medien erforderlich sind, d. h. um von A nach B, von B nach C, von C nach D u. s. w. zu gelangen. Wir haben auch hier, wie beim Herleiten der Formel (4) auf Seite 164 die Proportion $\frac{x_i}{\lambda_i} = \frac{\tau_i}{T}$. Die Zeit werde wie früher von dem Augenblicke an gezählt, wo Punkt A seine Schwingungen beginnt. Die Verrückung $y = MM'$ des Teilchens M während der Zeit t wird wie für Querschwingungen, so auch für die Längsschwingungen durch die allgemeine Formel (4) auf Seite 133 bestimmt, in welcher statt t zu setzen ist $t - \Sigma\tau_i$, da ja das Teilchen M seine Schwingungen um eine Zeit $\Sigma\tau_i$ später als A begonnen hat, in welcher Zeit sich die Schwingungsbewegung bereits von A nach M ausgebreitet hat. Mithin ist

Fig. 70.

$$y = a \sin 2\pi \frac{t - \Sigma\tau_i}{T} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{\tau_i}{T}\right).$$

Mit Hülfe der oben erwähnten Proportion erhalten wir nun die gesuchte verallgemeinerte Strahlgleichung:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \sum \frac{x_i}{\lambda_i}\right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2} - \frac{x_3}{\lambda_3} - \cdots\right) \quad (10)$$

Nennt man die Zahl der Wellen, die im betrachteten Strahlabschnitte (dessen geometrische Länge $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$) sich

und aus (30) geht hervor, dafs $\frac{AM}{BM} = \frac{GM}{RM} = \frac{AL}{BK} = \frac{AO}{BU}$ ist. Hieraus folgt, dafs $\angle AMO = \angle BMU$ ist, was auch zu beweisen war. Die ebene Welle, die sich im zweiten Medium ausgebildet hat, bewegt sich parallel zu sich selbst weiter; offenbar stellen die Geraden AS'' und BS'' die gebrochenen Strahlen dar. Winkel $S''AF$ ist der Brechungswinkel.

Leiten wir jetzt die Brechungsgesetze ab. Zunächst ist klar, dafs der Einfallsstrahl SA, die Normale PF und der gebrochene Strahl AS'' in ein und derselben Ebene liegen. Aber ferner ist

$$AG' = MA \sin G'MA = MA \sin GAM = MA \sin SAP;$$

aufserdem ist

$$AO = MA \sin AMO = MA \sin S''AF.$$

Folglich ist

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{AG'}{AO} = \frac{GM}{AL}.$$

Die Relation (30) giebt

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad \cdots \cdots \quad (31)$$

Das heifst: das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels für Schwingungen von gegebener Periode ist eine konstante Gröfse (in Bezug auf zwei Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 und v_2 beträgt); dies Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeit im ersten zur Geschwindigkeit im zweiten Medium. Man nennt obiges Verhältnis den relativen Brechungsquotienten. Vergleicht man alle Medien mit einem bestimmten, willkürlich gewählten, in welchem die Geschwindigkeit v_0 beträgt, so nennt man den sich auf den Übergang der Strahlen aus diesem in irgend ein anderes beliebiges Medium beziehenden den Brechungsquotienten jenes beliebigen Mediums. Seien n_1 und n_2 die Brechungsquotienten zweier Medien, in denen die Geschwindigkeiten gleich v_1 und v_2 sind, so hat man $n_1 = \frac{v_0}{v_1}$ und $n_2 = \frac{v_0}{v_2}$. Der relative Brechungsquotient n für den Übergang aus dem ersten Medium in das zweite ist, wie wir sehen,

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_0}{v_2} : \frac{v_0}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \cdots \cdots \quad (32)$$

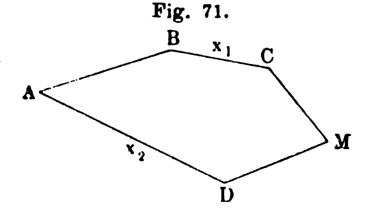
Der relative Brechungsquotient beim Übergange eines Strahles aus einem Medium in ein anderes ist gleich dem Brechungsquotienten des zweiten Mediums dividiert durch denjenigen des ersten Mediums.

Wir werden sehen, daſs in der Natur eine ganze Reihe von derartigen Fällen vorkommt, daſs ein Strahl seine Richtung ändert (Spiegelung, Brechung); hierbei ändert sich im allgemeinen auch die Amplitude. Nehmen wir nun an, ohne auf die Ursache einer solchen Erscheinung näher einzugehen, daſs die von einem gewissen Punkte A (Fig. 71) sich nach zwei verschiedenen Richtungen ausbreitenden Schwingungen zu einem und demselben Punkt M gelangt seien, in welchem die Interferenz der Strahlen erfolgt. Die Länge des Weges $ABCM$ bezeichnen wir mit x_1, diejenige des Weges ADM mit x_2. Die Differenz

$$\delta = x_2 - x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wollen wir den Gangunterschied der interferierenden Strahlen nennen. Die Amplituden bezeichnen wir mit a und b und setzen voraus, daſs die Schwingungen in beiden Strahlen ein und dieselbe Richtung haben. Die Verschiebungen y_1 und y_2, welche Punkt M erfahren würde, wenn zu ihm nur der Strahl $ABCM$ oder nur der Strahl ADM gelangen würde, sind durch folgende Gleichungen bestimmt (vergl. (4) auf Seite 164):

Fig. 71.



$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right); \quad y_2 = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (25) und (26) auf Seite 139 und bedient sich der Formel (32) auf Seite 140, so sieht man, daſs die Interferenz der Schwingungen eine harmonische Schwingungsbewegung des Punktes M mit der Amplitude A hervorruft, wo

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

hier bedeutet δ den Gangunterschied der Strahlen.

Folglich stellt die Gröſse $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ den Phasenunterschied der interferierenden Schwingungen dar und spielt hier dieselbe Rolle, wie die Gröſse β_1 und β_2 in (32) auf Seite 140. Die Energie J der Schwingungen des Punktes M wird durch die Energien i_1 und i_2 der Schwingungen jedes der beiden Strahlen nach Formel (33) auf Seite 141 ausgedrückt

$$J = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2} \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Gröſse δ hat an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werte; dementsprechend hat auch der Faktor $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ alle

nur möglichen zwischen -1 und $+1$ liegenden Werte. In einem Teile des Raumes, dessen Dimensionen gegen die Wellenlänge λ sehr grofs sind, treffen wir auf ebensoviel positive als negative Werte obigen Faktors, deren absoluter Betrag der gleiche ist. Hieraus geht hervor, dafs der Mittelwert J_m für die Energie der Schwingungen in diesem Raumteile gleich ist

$$J_m = i_1 + i_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Die mittlere Energie ist gleich der Summe der Einzelenergien der interferierenden Schwingungen. Hierdurch bestätigt sich das Gesetz von der Erhaltung der Energie auch für die Erscheinungen der Interferenz, bei denen blofs eine Änderung in der Energieverteilung, keine Änderung des Gesamtvorrates an Energie erfolgt.

Haben die Strahlen verschiedene Medien durchlaufen, so hat man ihre Gleichungen in folgender Gestalt zu schreiben:

$$y_1 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - m_1\right); \qquad y_2 = b \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - m_2\right).$$

Es sei $m = m_1 - m_2$ die Differenz der optischen Längen der beiden Strahlen; diese unbenannte Zahl ist gleich der Differenz der Anzahl Wellenlängen, welche in jedem der Strahlen aufgeht. Ferner ist

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2m\pi \quad \ldots \ldots \quad (14,\text{a})$$

Sonderfälle:

1. $a = b$; $i_1 = i_2 = i$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2a \cos \pi \frac{\delta}{\lambda} = 2a \cos m\pi \\ J &= 4i \cos^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} = 4i \cos^2 m\pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

2. Der Gangunterschied $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$ ist gleich einer geraden Anzahl halber Wellen; $m = n$ (eine ganze Zahl)

$$A = a + b; \quad J = (\sqrt{i_1} + \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Ist $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$; $m = n$ und $a = b$, so ist

$$A = 2a; \quad J = 4i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

3. Der Gangunterschied $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ ist gleich einer ungeraden Anzahl halber Wellen; $m = n + \frac{1}{2}$

$$A = a - b; \quad J = (\sqrt{i_1} - \sqrt{i_2})^2 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Ist $\delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$; $m = n + \frac{1}{2}$ und $a = b$, so ist

$$A = 0; \quad J = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Zwei interferierende Strahlen ergeben eine maximale Amplitude, wenn ihr Gangunterschied δ gleich einer geraden Zahl halber Wellenlängen ist (oder wenn ihr optischer Gangunterschied m eine ganze Zahl ist); sie geben eine minimale Amplitude, wenn δ gleich einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen ist. Zwei interferierende Strahlen „heben sich auf", wenn δ gleich einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen ist und die Amplituden der Strahlungen gleich sind.

Bei gleichen Amplituden schwankt die Energie zwischen $4i$ und 0; ihr mittlerer Wert ist $2i$ [vergl. Formel (14)].

Bisweilen kommt es vor, dafs zwei Schwingungen, welche von demselben Punkte A (Fig. 72) ausgehen und auf verschiedenen Wegen ABP und ACP zu ein und demselben Punkte gelangen, sich sodann in derselben Richtung PQ fortpflanzen. In diesem Falle hat der Gangunterschied δ für alle Punkte P_1 der Geraden PQ denselben Wert, denn es ist $\delta = ABPP_1 - ACPP_1 = ABP - ACP$. Das Resultat der Interferenz ist das gleiche für alle Punkte der Geraden PQ. Ist $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$, so pflanzt sich längs PQ eine Schwingung mit maximaler Amplitude und Energie fort. Ist $\delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, so haben Amplitude und Energie einen minimalen Wert; sind aufserdem die

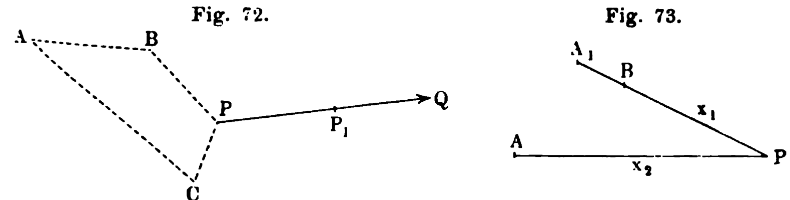


Fig. 72. Fig. 73.

ursprünglichen Amplituden a und b einander gleich, so existiert ein Strahl PQ überhaupt nicht, vergl. (19).

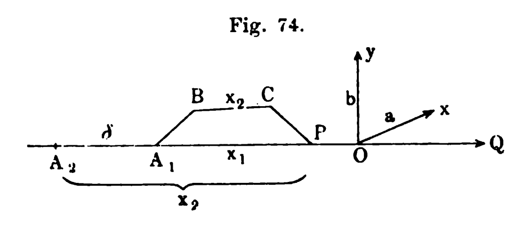
Bisher hatten wir vorausgesetzt, dafs beide sich in einem Punkte treffenden Schwingungen von einem und demselben Punkte A (Fig. 71 und 72) ausgehen. Es kann indes auch vorkommen, dafs die interferierenden Schwingungen von verschiedenen Punkten A und A_1 (Fig. 73) ausgehen. Zur Berechnung der Schwingungsamplitude im Punkte P können wir uns der Formel (12) auf Seite 171, wo $\delta = x_2 - x_1$ ist, nur in dem Falle bedienen, wenn die Punkte A und A_1 sich in gleichen Phasen befinden. Ist es jedoch bekannt, dafs A und A_1 sich in verschiedenen Phasen befinden, so mufs man nach der einen

oder anderen Seite eines dieser Punkte, z. B. von A_1 einen solchen Punkt B finden, der sich mit dem anderen Punkte (hier mit A) in gleicher Phase befindet. Von diesem Punkte B aus hat man die Entfernung x_1, welche im Ausdruck für den Gangunterschied $\delta = x_2 - x_1$ vorkommt, zu zählen.

Die in diesem Paragraphen betrachtete Erscheinung der Interferenz bezieht sich in gleicher Weise auf Querschwingungen wie auf Längsschwingungen.

§ 7. Interferenz von Strahlen, deren Schwingungen in zu einander senkrechten Ebenen erfolgen. Der vorliegende Fall bezieht sich nur auf Querschwingungen. Nehmen wir an, dafs sich längs PQ (Fig. 74) zwei Schwingungen mit den Amplituden a und b und der gleichen Periode T fortpflanzen; die erstere Schwingung erfolge in einer durch PQ und die Achse Ox ($\perp$ zur Zeichnungsebene) gehenden Ebene, die zweite in einer Ebene, welche durch PQ und die Achse Oy geht. Der Gangunterschied beider Strahlen sei gleich δ, folglich der Phasenunterschied der beiden Schwingungen des ganzen Strahles $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$. Das Auftreten zweier derartiger Schwingungen kann verschiedene Ursachen haben: entweder

Fig. 74.



es breiten sich von einem Punkte A_1 zwei Schwingungen in verschiedenen Richtungen A_1BCP und A_1P aus (welche letztere Linie übrigens keine Gerade zu sein braucht), die anfangend von P in der gemeinsamen Richtung PQ weitergehen ($\delta = x_2 - x_1 = A_1BCP - A_1P$); oder es breiten sich von zwei Punkten A_1 und A_2, die sich in gleicher Phase befinden, zwei Schwingungen in derselben Richtung A_2A_1PQ ($\delta = A_2A_1$) aus; oder endlich es breiten sich von einem Punkte A_1 zwei zu einander senkrechte Schwingungen in derselben Richtung A_1PQ aus und haben diese Schwingungen aus gewissen Ursachen (solche existieren in der Natur thatsächlich) auf der Strecke A_1P verschiedene Geschwindigkeiten, folglich auch ungleiche Wellenlängen. Infolgedessen werden die Schwingungen im Punkte P bereits eine gewisse Phasendifferenz φ besitzen (von einem Gangunterschiede kann in diesem Falle keine Rede sein), welche für alle Punkte der Geraden PQ die gleiche ist, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider Schwingungen längs dieser Geraden die gleiche ist.

In allen Punkten der Geraden PQ müssen die Teilchen gleichzeitig zwei zu einander senkrechte Schwingungen vollführen, deren Ampli-

tuden a und b, deren Phasendifferenz $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ ist (falls δ vorhanden). Auf diesen Fall der Addition von Schwingungen bezog sich § 7 des Kapitels IV. Formel (55) auf Seite 146 zeigt uns, dafs alle Teilchen des Strahles PQ sich in Ellipsen bewegen müssen. Formel (56) auf Seite 149 zeigt, dafs, von Q aus gesehen, die Bewegung der Teilchen gegen den Uhrzeiger zu erfolgen scheint, falls

$$0 < \varphi < \pi \quad \text{oder} \quad 0 < \delta < \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad (20)$$

mit dem Uhrzeiger, falls

$$\pi < \varphi < 2\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{2} < \delta < \lambda \text{ ist} \quad \dots \quad (21)$$

Eine Kreisbewegung gegen den Uhrzeiger erhält man für

$$a = b \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{1}{4}\lambda \quad \dots \quad (22)$$

Eine Kreisbewegung mit dem Uhrzeiger erhält man für

$$a = b \text{ und } \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{3}{4}\lambda \quad \dots \quad (23)$$

Wenn $\varphi = n\pi$ oder $\delta = n\frac{\lambda}{2}$ ist, so breitet sich längs PQ eine einfache harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$ aus (vergl. die Sonderfälle 1 und 2 auf Seite 147); die positive Schwingungsrichtung bildet mit Ox einen spitzen Winkel, wenn n gerade, einen stumpfen Winkel, wenn n ungerade ist.

Die Teilchen vollführen, wie wir gesehen haben, im allgemeinen Bewegungen in gleichen und gleich gelegenen (denn φ ist überall das gleiche) Ellipsen, deren Ebenen zu PQ senkrecht sind. Hieraus folgt, dafs die Teilchen sich auf der Oberfläche eines elliptischen Cylinders, dessen Achse PQ ist, bewegen. Da sie aber allmählich nacheinander in Bewegung geraten, so sind sie offenbar in jedem gegebenen Moment längs einer gewissen schraubenförmigen Linie angeordnet, die für $a = b$ in eine gewöhnliche Schraubenlinie auf einem Kreiscylinder übergeht. Von Q aus gesehen, scheint die auf den Beobachter zugehende Schraubenlinie den Cylinder mit oder gegen den Uhrzeiger zu umkreisen, je nachdem sich die Teilchen gegen oder mit dem Uhrzeiger bewegen.

§ 8. Interferenz sich begegnender Schwingungen. Stehende Wellen. Nehmen wir an, auf einer Geraden MN (Fig. 75) breiten

sich zwei harmonische Schwingungsbewegungen von derselben Periode in entgegengesetzten Richtungen aus: die Schwingung I von links nach rechts mit der Amplitude a und Schwingung II von rechts nach links mit der Amplitude b. Es mögen sich beide Schwingungen ungehindert in diesen entgegengesetzten Richtungen ausbreiten. Untersuchen wir nun, was für Bewegungen die auf MN liegenden Punkte ausführen werden. Wählen wir zu diesem Zweck einen gewissen Punkt P und setzen wir voraus, dafs die beiden ursprünglichen Schwingungen in diesem Punkte einen Phasenunterschied β haben (Phase II minus Phase I). Geht man um die Entfernung x in der Richtung nach N bis zum Punkte P', so wird der Phasenunterschied β' in diesem Punkte schon ein anderer. Die Phase der Schwingung II ist in P' um $2\pi\frac{x}{\lambda}$ gröfser als in P, während die Phase der Schwingung I in P' um dieselbe Gröfse $2\pi\frac{x}{\lambda}$ kleiner als in P ist. Hieraus ergiebt sich

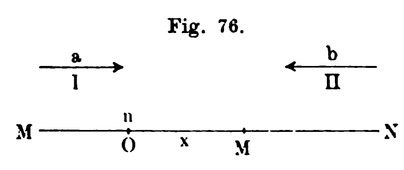
Fig. 75.

$$\beta' - \beta = 4\pi\frac{x}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Der Phasenunterschied zweier Schwingungen ändert sich beim Übergange von einem Punkte zum anderen zweimal schneller als die Phase jeder der beiden Schwingungen.

Beschränken wir uns darauf, den Fall zu betrachten, wo die Quer- oder Längsschwingungen der Richtung nach zusammenfallen. Der Phasenunterschied β beider Schwingungen ist für jeden gegebenen Punkt konstant, denn die Schwingungen haben die gleiche Periode. Die Punkte auf der Geraden MN vollführen somit harmonische Schwingungsbewegungen mit der Amplitude A, die, für verschiedene Punkte verschieden, sich innerhalb der Grenzen $a - b$ und $a + b$ ändert, vergl. (35) und (37) auf Seite 141. Um es uns deutlicher zu machen, wie die Schwingungen längs MN verteilt sind, wählen wir einen solchen Punkt O (Fig. 76), für welchen der Phasenunterschied $\beta = 0$ ist. Hier hat die Schwingung ihre maximale Amplitude $A = a + b$. Im Punkte M, der um x von O absteht, ist

Fig. 76.



der Phasenunterschied $\beta = 4\pi\frac{\lambda}{x}$. Wir haben gesehen (Seite 141), dafs $A = a + b$ ist, wenn $\beta = 2n\pi$ oder wenn $x = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}$,

d. h.

$$A = a + b \text{ für } x = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \lambda, \pm \frac{3}{2}\lambda, \pm 2\lambda \text{ u. s. w.} \quad (25)$$

Das Amplitudenminimum $a - b$ gehört zum Phasenunterschied $\delta = (2n + 1)\pi$ oder zu $x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, d. h. es ist

$$A = a - b \text{ für } x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda \text{ u. s. w.} \quad (26)$$

Somit bildet sich längs MN eine Schwingung aus, deren Amplitude periodisch zwischen $a + b$ und $a - b$ schwankt.

Die Punkte mit maximaler Amplitude heifsen Bäuche, die mit minimaler Knoten. Die Entfernung zweier benachbarter Bäuche oder zweier benachbarter Knoten ist gleich $\lambda : 2$; die Entfernung eines Bauches von seinem benachbarten Knoten ist gleich $\lambda : 4$. Bauch und Knoten zusammen geben eine sogenannte „stehende Welle“.

Ist $a = b$, so ist die Amplitude an den Bäuchen gleich $2a$, die Amplitude an den Knoten gleich Null, d. h. die in den Knoten befindlichen Teilchen sind in vollständiger Ruhe.

Die beiden Linien $ABCDEF$ und $abcdef$, Fig. 77, zeigen uns, innerhalb welcher Grenzen die Teilchen ihre Schwingungen vollführen; die Bäuche und Knoten sind mit den Buchstaben n resp. y bezeichnet. In Fig. 78 sind dieselben Grenzen für den Fall $a = b$ dargestellt; an den Bäuchen (n_i) ist die Amplitude der Schwingungen gleich $2a$, in den Knoten (y_i) sind die Teilchen unbeweglich.

Fig. 77.

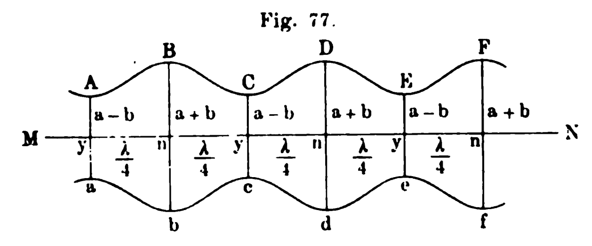
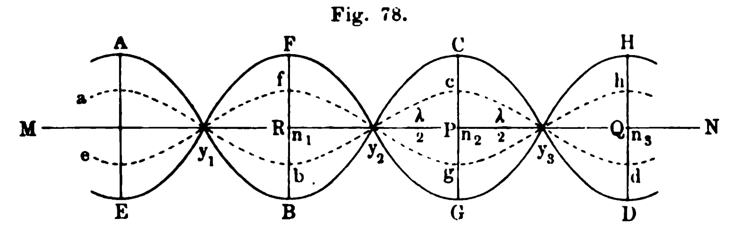


Fig. 78.



Wenden wir uns nun der wichtigen Frage zu, in welchen Phasen sich für einen gegebenen Augenblick die Teilchen befinden, deren Schwingungen eine stehende Welle bilden. Betrachten wir den Schwin-

gungsbauch n_2 (Fig. 78); hier ist der Phasenunterschied der gegebenen Schwingungen gleich Null, folglich ist die gesuchte Phase gleich der beiden Schwingungen gemeinsamen Phase. Betrachten wir ferner den Augenblick, wo diese beiden Phasen gleich Null sind, d. h. wo sich das im Zentrum des Schwingungsbauches gelegene Teilchen P auf der Geraden MN befindet. Entfernen wir uns von diesem Bauche um eine beliebige Strecke x, so nimmt, wie wir gesehen haben, die Phase einer der Teilschwingungen um $2\pi\frac{x}{\lambda}$ zu, die Phase der anderen um ebensoviel ab; es entsprechen also den Teilschwingungen gleiche Verschiebungen in entgegengesetzten Richtungen. Hieraus ergiebt sich, dafs ein in beliebigem Abstande x vom Bauche befindliches Teilchen sich in dem Augenblicke, welchen wir betrachten, ebenfalls auf der Geraden MN befindet.

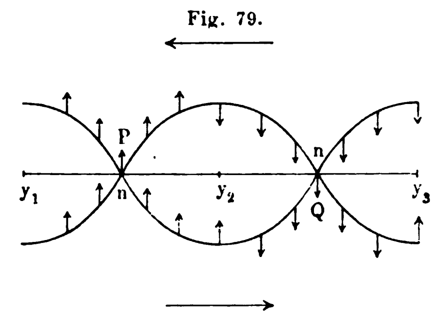
Alle Teilchen gehen gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslagen, sie erreichen daher auch gleichzeitig ihre Maximalabstände von diesen Lagen.

Diejenigen Teilchen aber, die zwei benachbarten Bäuchen angehören, befinden sich stets in entgegengesetzten Phasen, denn strebt P von P nach C, weil die gegebenen Schwingungen in diesem Augenblick von P nach C gerichtet sind, so strebt Q im selben Augenblicke von Q nach D; da $PQ = \lambda : 2$ ist, so haben die Schwingungen in P und Q entgegengesetzte Phasen und sind daher die zusammenzusetzenden Bewegungen in Q von Q nach D gerichtet.

Alle Teilchen, die zwischen zwei Knoten liegen, befinden sich in gleichen, die zu beiden Seiten eines Knotens gelegenen Teilchen in entgegengesetzten Phasen.

Fig. 79 möge zur Erläuterung dienen. Hier zeigen uns die beiden Kurven, wie die Teilchen für die gegebenen Schwingungen in dem Augenblicke angeordnet sind, wo sich bei der resultierenden Bewegung alle Teilchen in ihren Gleichgewichtslagen befinden. Die Figur zeigt uns, dafs alle Teilchen, die sich im dargestellten Momente zwischen y_1 und y_2 befinden, sich nach oben bewegen, alle zwischen y_2 und y_3 befindlichen dagegen nach unten.

Fig. 79.

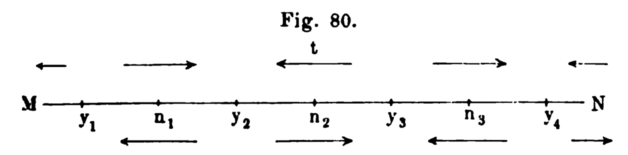


In einem gewissen Augenblick sind die Teilchen längs der Kurve $ABCD$ (Fig. 78) angeordnet; nach Ablauf der Zeit $T : 2$ ist ihre Anordnung durch die Kurve $EFGH$ bestimmt. Aber der Übergang von der ersten Verteilung zur zweiten vollzieht sich für die Teilchen durch-

aus nicht in der Weise, wie bei der Ausbreitung eines Strahles. Dort entfernten sich alle Teilchen um dieselbe Strecke a aus ihrer Gleichgewichtslage und die dazwischen liegenden Anordnungen wurden geometrisch durch seitliche Verschiebungen der Wellenlinie (im ganzen um $\lambda : 2$) erhalten. Hier dagegen geht die Anordnung $ABCD$ zunächst in $abcd$, dann in die geradlinige $MRPQN$, ferner in $efgh$ und endlich in die Anordnung $EFGH$ über. Bei den stehenden Wellen haben wir es durchaus mit keiner in der Richtung des Strahles fortschreitenden Verschiebung irgend eines Bewegungszustandes zu thun. Bäuche und Knoten verschieben sich nicht; an ersteren geht die lebhafteste Bewegung vor sich, an letzteren herrscht vollkommene Ruhe.

Betrachten wir jetzt noch stehende Wellen bei Längsschwingungen. Auch hier wechseln miteinander Bäuche und Knoten und stehen diese voneinander um $\lambda : 4$ ab. Alle Teilchen, welche sich zwischen zwei benachbarten Knoten y_1 und y_2, y_2 und y_3 u. s. w. (Fig. 80) befinden, haben in einem gegebenen Zeitmoment t eine gemeinsame Bewegung; dieselbe ist durch die Pfeile oberhalb MN angedeutet. Am stärksten verschieben sich die im Zentrum der Bäuche

Fig. 80.



befindlichen Teilchen. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dafs sich um die Knoten y_2 und y_4 Verdichtungen, um die Knoten y_1 und y_3 Verdünnungen bilden müssen. Nach Ablauf der Zeit $T:2$ wird die Richtung dieser Bewegungen durch die unterhalb MN angebrachten Pfeile angedeutet. Alle Teilchen gehen zunächst gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage — in diesem Augenblick ist die Materie im Medium längs MN in normaler Verteilung: nirgends sind Verdichtungen oder Verdünnungen vorhanden. Hierauf bilden sich Verdünnungen um die Knoten y_2 und y_4 und Verdichtungen um y_1 und y_3. Die Übertragung einer Verdichtung oder Verdünnung in der Zeit $T \cdot 2$ von einem Knoten zum anderen hat hier einen ganz anderen Charakter, als eben dieser Vorgang bei der einfachen Ausbreitung von Längsschwingungen, wie sie in Fig. 68, S. 166, dargestellt war. Dort rückte die Verdichtung allmählich von einem Ort zum anderen; hier dagegen verschwindet sie an einem Ort und tritt an einem anderen auf, ohne an den zwischenliegenden Orten existiert zu haben.

Es läfst sich leicht erkennen, dafs an den Bäuchen die Teilchen in lebhafter Bewegung sind, die Dichte des Mediums sich aber hier nicht ändert; an den Knoten dagegen ist keine Bewegung vorhanden, doch treten hier abwechselnd Verdünnungen und Verdichtungen auf.

Die Bäuche sind die Stellen mit stärkster Ortsänderung, die Knoten die Stellen mit stärkster Dichteänderung.

Die Eigenschaften der stehenden Wellen lassen sich auch mathematisch erläutern. Beschränken wir uns auf den Fall, wo $a = b$ ist, und wenden uns der Fig. 76 zu, wo O ein derartiger Punkt ist, für welchen die Phasen der sich begegnenden Schwingungen gleich, folglich $A = 2a$ ist. Es habe die Gleichung der beiden Schwingungsbewegungen des Punktes O die Form $y_1 = y_2 = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$. Im Punkte M, für welchen $OM = x$ ist, haben wir die beiden Schwingungsgleichungen

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right),$$

hieraus folgt

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad (26, a)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung einer stehenden Welle. Die Amplitude ist gleich $A = \pm 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$; hier deutet das doppelte Vorzeichen an, dafs man, falls der Kosinus negativ wird, für A das Minuszeichen zu wählen hat, da die Amplitude ihrem Wesen nach eine positive Gröfse ist. Zugleich hat man aber bei negativem Kosinus das Minuszeichen zum Sinus zu ziehen, indem man statt $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ schreibt $\sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \pi\right)$, d. h. zur Phase den Winkel π hinzufügt, also dieselbe durch die entgegengesetzte Phase ersetzt. Gleichung (26, a) zeigt, dafs $A = 0$ wird für $x = \pm \frac{2n+1}{4}\lambda$; das sind aber nach (26) die Knoten. Ferner wird $A = 2a$ für $x = \pm \frac{n}{2}\lambda$ und das sind nach (25) die Schwingungsbäuche. Für $t = nT$ haben wir $y = 0$; das zeigt uns, dafs alle Punkte gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage gehen. Alle Punkte, für welche die Gröfse $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ positiv ist, befinden sich in gleicher Phase; alle Punkte für welche sie negativ ist, in entgegengesetzter. Erstere liegen zwischen $x = -\frac{\lambda}{4}$ und $x = \frac{\lambda}{4}$; $x = \frac{3}{4}\lambda$ und $x = \frac{5}{4}\lambda$; $x = \frac{7}{4}\lambda$ und $x = \frac{9}{4}\lambda$ u. s. w.; ferner zwischen $x = -\frac{3}{4}\lambda$ und $x = -\frac{5}{4}\lambda$; $x = -\frac{7}{4}\lambda$ und $x = -\frac{9}{4}\lambda$ u. s. w. Alles dieses stimmt offenbar genau mit den vorhin erhaltenen Resultaten überein.

§ 9. Wellenfläche und Wellenlinie; Energie und Amplitude. Wir haben bisher nur die Ausbreitung von Schwingungen längs einer gegebenen Geraden betrachtet. Fassen wir nunmehr ins Auge, was sich bei gleichzeitiger Ausbreitung der Schwingungen von einem Punkte O aus nach verschiedenen Richtungen ergiebt. Wir untersuchen diese Frage zunächst rein geometrisch und werden erst später darauf hinweisen, welche Einschränkungen zu machen sind, wenn man zur Betrachtung der physikalisch möglichen Fälle übergeht.

Nehmen wir an, ein Teilchen O eines isotropen Mediums beginne zu schwingen und seine Schwingungen breiten sich nach allen Richtungen aus. Den geometrischen Ort der Punkte, bis zu welchen sich die Schwingungen in einem gegebenen Augenblick ausgebreitet haben, wollen wir Wellenoberfläche oder einfach Wellenfläche nennen. Da sich in einem isotropen Medium die Schwingungen nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit v ausbreiten, so ist klar, dafs die Wellenfläche in einem isotropen Medium eine Kugelfläche ist. Ihr Radius R ist gleich vt, wenn t die Zeit ist, gerechnet vom Augenblicke, wo das zentrale Teilchen O seine Schwingungen begann. Jede einzelne Schwingung des Zentrums O ruft nach Verlauf einer Zeit t eine Schwingung der Teilchen hervor, die auf der Kugeloberfläche S liegen, nach Verlauf einer Zeit t_1 eine Schwingung der Teilchen auf der Kugelfläche S_1, deren Radius $R_1 = vt_1$ ist. Auf Grund des Prinzips von der Erhaltung der Energie mufs die ganze vorhandene Energie zu den Zeiten t und t_1 die gleiche sein, wenn während der Ausbreitung der Schwingungen kein Energieverlust entstanden, d. h. kein Übergang der Energie schwingender Teilchen des Mediums in irgend eine andere Energieform erfolgt ist.

Die Zahl der Teilchen auf einer Wellenfläche und folglich auch ihre gesamte Masse sind den Quadraten der Kugelradien proportional, die Schwingungsenergie der einzelnen Teilchen oder der Komplexe von Teilchen, welche sich auf der Oberflächeneinheit der Kugeln vorfinden, ist den Quadraten der Kugelradien umgekehrt proportional. Hieraus folgt, dafs die Amplitude der Schwingungen der ersten Potenz des Radius indirekt proportional ist; vergl. Formel (24) auf Seite 138 und das sich daraus Ergebende. Wenn sich von einem Punkte O im isotropen Medium nach allen Seiten hin Schwingungen ausbreiten, so ändert sich die Amplitude derselben indirekt proportional der ersten, die Energie indirekt proportional der zweiten Potenz des Abstandes von O.

Es giebt Fälle, wo sich die Schwingungen vom Punkte O aus nur nach denjenigen Richtungen, die in einer durch O gehenden Ebene liegen, ausbreiten. In diesem Falle heifse der geometrische Ort der Punkte, bis zu denen sich die Schwingung in einem gegebenen Zeitmoment ausbreitet, die Wellenlinie. Im isotropen Medium ist die

Wellenlinie ein Kreis und es ist leicht einzusehen, dafs, **wenn sich die Wellen derartig in einer Ebene ausbreiten, die Energie der Schwingungen umgekehrt proportional der ersten Potenz, die Amplitude aber umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Punkte O ist.**

Im anisotropen Medium ist die Wellenfläche keine Kugelfläche; sie kann z. B. die Oberfläche eines Ellipsoids sein.

§ 10. Das Huygenssche Prinzip. Wenn sich von irgend einem Punkte O aus nach allen Seiten Schwingungen ausbreiten und dabei zu einem anderen Punkte M gelangen, so unterscheiden sich die Schwingungen dieses letzteren nicht wesentlich von denen des ersten Punktes O. Wenn aber die Bewegung des Punktes O nach allen Seiten sich ausbreitende Schwingungen hervorgerufen hat, so liegt kein Grund vor, weshalb nicht auch die Bewegungen des Punktes M im umgebenden Medium Schwingungen hervorrufen sollten, die sich von ihm wie von einem Mittelpunkte aus nach allen Seiten ausbreiten sollten.

Das wird nun auch in der That der Fall sein, und können wir darauf hin eine gewisse Konstruktion vornehmen, die sich auf das sogenannte Huygenssche Prinzip stützt. Nach demselben kann man die Wellenfläche S für einen beliebigen Augenblick t konstruieren, wenn man die vorhergehenden gleichen oder verschiedenen Zeitmomente t_0 kennt, wo die Punkte einer beliebigen Oberfläche σ zu schwingen angefangen haben. Gehört t_0 zu allen auf σ befindlichen Punkten, so ist σ offenbar die zur Zeit t_0 gehörende Wellenfläche.

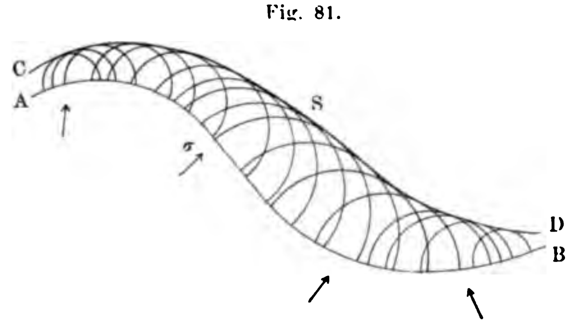
Die Huygenssche Konstruktion besteht nun in folgendem: **Alle Punkte M der Fläche σ hat man als neue Schwingungszentren anzusehen, deren Schwingungen sich von dem Augenblicke t_0 an nach allen Seiten auszubreiten beginnen, wo die entsprechenden Punkte M in Bewegung geraten; man hat sogenannte elementare Wellenflächen (Kugel-, Ellipsoidflächen) um jeden Punkt M herum zu beschreiben und ihnen diejenigen Dimensionen zu erteilen, welche sie in der Zeit $t-t_0$ erlangen. Die Begrenzungsfläche (d. h. gemeinsame Berührungsfläche) aller dieser elementaren Flächen, die nach der Seite von σ liegt, nach welcher sich die Schwingungen ausbreiten, ist die gesuchte Wellenfläche S zur Zeit t.**

Das Huygenssche Prinzip werden wir als geometrische Konstruktionsmethode benutzen, ohne Beweise für seine Richtigkeit zu erbringen, was übrigens auf elementarem Wege auch nicht möglich ist.

Zur Erläuterung möge Fig 81 dienen; AB stellt die Fläche σ dar, bis zu deren Punkten in ungleichen Zeiten t_0 eine einheitliche Schwingungsbewegung in den Pfeilrichtungen gelangt sei. Man nimmt nun alle Punkte der Oberfläche σ als neue Schwingungszentren an

und beschreibt um dieselben **Halbkugeln**, deren Radien gleich $v(t - t_0)$ sind. Möge die Schwingung zuerst die mittleren Partieen der Fläche AB erreichen. Die gemeinsame Berührungsfläche CD aller dieser Halbkugeln stellt die gesuchte Wellenfläche für den Zeitmoment t dar. Man hat das folgendermaſsen zu verstehen: zu jedem Punkte des Raumes hin breiten sich Schwingungen von allen Punkten der Fläche σ aus. Durch Interferenz heben sich diese Schwingungen auf, erstens in allen Raumpunkten „hinter" der Fläche σ (d. h. im Raume, in welchem sich die Pfeile befinden). Die Schwingungsbewegung pflanzt sich nicht nach rückwärts fort; wir können uns daher auf Halbkugeln beschränken. Zweitens heben sich zur Zeit $t - t_0$ alle Schwingungen in den zwischen σ und S gelegenen Punkten auf; im entsprechenden Augenblicke befinden sich nur die auf der Fläche S gelegenen Teilchen in Bewegung.

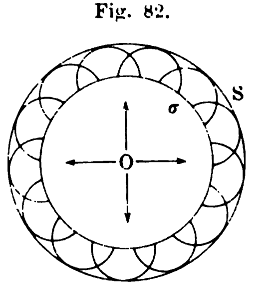
Fig. 81.



Wäre das Medium ein anisotropes, so hätte man anstatt der Halbkugelflächen andere elementare Wellenflächen zu konstruieren gehabt, z. B. Halbellipsoidflächen.

Unsere Betrachtung vereinfacht sich, wenn die Fläche σ selbst eine Wellenfläche ist, wenn t_0 allen Punkten derselben gemeinsam ist und die Halbkugeln alle denselben Radius haben. In Fig. 82 ist die Konstruktion einer einfachen sphärischen Wellenfläche S mit dem Zentrum O dargestellt, wo die Wellenfläche σ für einen früheren Zeitpunkt gegeben ist.

Fig. 82.

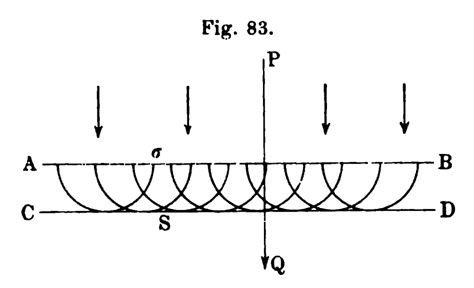


Befindet sich das Zentrum der Schwingungen in sehr groſsem Abstande von dem Orte, an welchem wir die Schwingungen untersuchen, so kann ein Teil der sphärischen Wellenfläche als Ebene angesehen werden; wir wollen denselben als **ebene Welle** bezeichnen (obgleich dieser Ausdruck auch bisweilen für das gebraucht wird, was wir oben auf Seite 181 Wellenlinie nannten). Fig. 83 (a. f. S.) zeigt die einfache geometrische Konstruktion einer ebenen Welle $CD = S$ für den Fall, daſs ihre Lage $AB = \sigma$ in einem beliebigen vorhergehenden Zeitmoment gegeben ist.

Merken wir uns folgenden Satz: **Im isotropen Medium stellt der Strahl die Normale zur Wellenfläche dar**; in Fig. 83 ist die Wellenfläche eine Ebene und PQ einer der Strahlen.

Das Huygenssche Prinzip gilt ungeändert auch für Wellenlinien. Auf solche können die Figuren 81 bis 83 bezogen werden, wenn man annimmt, dafs σ und S nicht Flächen darstellen, sondern Linien, welche in der Ausbreitungsebene der Schwingungen liegen. Anstatt der Halbkugelflächen hat man dann Halbkreise vor sich u. s. w.

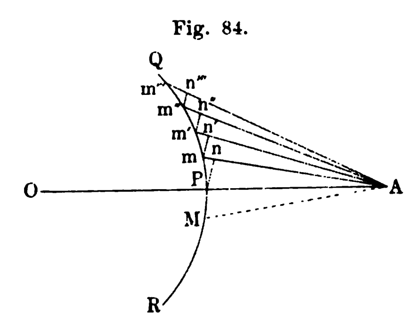
Fig. 83.



§ 11. Die sogenannte geradlinige Ausbreitung der Schwingungen.

Durch Einführung des Begriffes der Wellenfläche, von deren sämtlichen Punkten sich die Schwingungen nach allen Seiten ausbreiten und der fortgesetzten Entstehung neuer Wellenflächen, die nach dem Huygensschen Prinzip konstruiert werden können, ist aus der Zahl der zu betrachtenden Erscheinungen das, was wir als Strahl bezeichneten (eine Schwingungsbewegung, welche sich längs einer Geraden ausbreitet) vollkommen verdrängt worden. Man hat jetzt nach obigem die Schwingung eines beliebigen Punktes A (Fig. 84) nicht mehr als Folge eines einfachen Fortschreitens der Schwingungen von P nach A zu betrachten, wo P ein Punkt auf der Geraden OA ist, die A mit dem Ausgangspunkte O der Schwingungen verbindet; wir haben vielmehr die Schwingung des Punktes A als das Resultat der Interferenzen aller von den sämtlichen Punkten der Wellenfläche QR nach A gelangten Schwingungen anzusehen. Ungeachtet dessen kann man den Strahlbegriff dennoch beibehalten, wenn auch nur als ein überaus nützliches geometrisches Hülfsmittel für den Fall der freien Ausbreitung von Schwingungen im homogenen Medium. Es geschieht dies auf Grund folgender Betrachtungen, die zwar keine ganz strenge Kritik vertragen, dennoch aber einen gewissen Begriff von den hier obwaltenden Verhältnissen geben. Ziehen wir vom Punkte A aus eine Anzahl Geraden Am, Am', Am'' . . ., deren Längen zusammen mit AP eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\lambda:2$ bilden, so dafs also $Am - AP = Am' - Am = Am'' - Am' = \ldots = \lambda:2$ ist;

Fig. 84.



dreht sich die ganze Figur um die Gerade OA, so entsteht eine Reihe von Kegelflächen, die aus der Wellenfläche QR ringförmige Zonen und eine zentrale Segmenthaube (Kalotte) mM herausschneiden. Bezeichnet man mit r_n die Länge der Seitenlinie des $n$ten Kegels, so dafs $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ wird, wo $r_0 = AP$ ist, so sieht man, dafs die $n$te Zone von den Kegelflächen eingeschlossen ist, deren Seitenlinien r_n und $r_{n+1} = r_n + \frac{\lambda}{2}$ sind; die nullte Zone bildet die zentrale Segmenthaube. Bezeichnen wir den Flächeninhalt der $n$ten Zone mit S_n. Aus Fig. 85 ist ersichtlich, dafs $S_n = 2\pi Rh$ ist, wo $h = R\,[\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)]$ ist; hieraus folgt

$$S_n = 2\pi R^2\,\{\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Ferner ist nach Fig. 85

$$\left(r_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R(R + r_0)\cos(\alpha + \beta)$$
$$r_n^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R\,(R + r_0)\cos\alpha.$$

Durch Subtraktion kommt

$$\lambda\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = 2R(R + r_0)\,\{\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

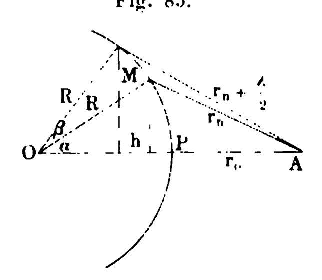
Dividiert man (a) durch (b), so kommt

$$S_n = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_n + \frac{\lambda}{4}\right) = S_0 + n\,\frac{\pi R\lambda^2}{2(R + r_0)} \quad \ldots \quad (27)$$

wo $r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$ gesetzt und mit S_0 der Inhalt der Segmenthaube bezeichnet war, nämlich

$$S_0 = \frac{\pi R\lambda}{R + r_0}\left(r_0 + \frac{\lambda}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Fig. 85.



Formel (27) zeigt, dafs die Zonenflächen eine arithmetische Reihe bilden, und dafs daher j e d e v o n i h n e n g l e i c h d e m a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l a u s z w e i b e n a c h b a r t e n Z o n e n i s t. Aus diesem Grunde kann man folgende Überlegung anstellen: Zu jedem Punkte M (Fig. 85) kann man zwei solche auf den Nachbarzonen liegende Punkte M_1 und M_2 finden, dafs sich AM_2 und AM_1 von AM um $\lambda : 2$ unterscheiden. Die Schwingung, welche sich von M nach A ausbreitet, wird daher von einer der Schwingungen, die von M_1 oder M_2

ausgehen, aufgehoben. Alle von der n ten Zone ausgehenden Schwingungen kann man sich daher durch die Schwingungen aufgehoben denken, die von der Hälfte der (n — 1)ten und der Hälfte der (n + 1)ten Zone ausgehen. So werden z. B. die Schwingungen der 3ten Zone aufgehoben von den Schwingungen einer Hälfte der 4ten und einer Hälfte der 2ten Zone; die Schwingungen der 2ten von einer Hälfte der 1ten und einer Hälfte der 3ten; endlich die Schwingungen der 1ten Zone von einer Hälfte der 2ten Zone und einer Hälfte der Segmenthaube. Es bleiben daher die Schwingungen bestehen, welche von einer Hälfte der zentralen Segmenthaube ausgehen. Hierzu kommt noch, dafs die Schwingungen, welche nach A (Fig. 84) von entfernteren Zonen sich ausbreiten, einen längeren Weg zu durchlaufen haben und (was bei einer tiefergehenden Untersuchung besonders wichtig ist) die Fläche QR gegen die Normale geneigt verlassen. Infolgedessen kann man die Schwingungen gänzlich vernachlässigen, welche nach A von Zonen hingelangen, die von der Segmenthaube weiter abstehen.

Haben wir nunmehr die Schwingungsbewegung in A als Resultat der Zusammensetzung aller Schwingungen betrachtet, die von der Oberfläche der um P gelegenen Segmentfläche $S_0 : 2$ ausgehen, so sind wir damit gewissermafsen zur Vorstellung von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen, also zur Vorstellung von Strahlen zurückgekehrt. Es haben solche Strahlen aber keinerlei reale Bedeutung, sondern erweisen sich nur von grofsem Nutzen bei den geometrischen Konstruktionen, die man vorzunehmen hat, falls man die Ausbreitungsweise der Schwingungen in verschiedenerlei Fällen untersucht.

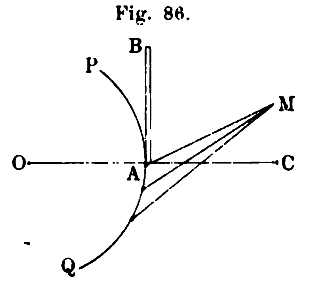
Die vorhergehenden Überlegungen, welche sich auf die Aufhebung der Wirkungen verschiedener Zonen bezogen, sind offenbar nur auf den Fall anwendbar, dafs die ganze Wellenfläche QR (Fig. 84) wirklich existiert, also auf den Fall der sogenannten freien Ausbreitung von Schwingungen.

§ 12. Diffraktion. Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, dafs nur die Wellenflächen eine reale, physikalische Bedeutung besitzen, während man an der Vorstellung von Strahlen nur im Falle einer allseitigen freien Ausbreitung der Schwingungen und auch dort nicht ganz ungezwungen festhalten kann. Ganz besonders wird dies im Falle der unfreien Ausbreitung von Wellen klar, wenn nämlich eine Welle auf ihrem Wege auf irgend ein Hindernis trifft, welches die weitere Ausbreitung eines ihrer Teile hemmt. Es tritt dann eine besondere Art von Erscheinungen auf, die man Diffraktion nennt; bei Betrachtung dieser Art von Erscheinungen wird es uns ganz unmöglich, an der Vorstellung von Strahlen festzuhalten. Alle auf diese Erscheinungen bezüglichen Einzelheiten sollen erst in der Lehre vom Licht

Behandlung finden und sei an dieser Stelle nur eine allgemeine Vorstellung von den Diffraktionserscheinungen gegeben.

Nehmen wir an, die Wellenfläche PAQ (Fig. 86) treffe unterwegs auf einen Schirm AB, welcher eine ihrer Hälften AP zurückhalte. Wenn sich die Schwingungsbewegung vom Punkte O aus nach allen Seiten strahlenförmig ausbreitete, so wäre OAC der Grenzstrahl; die Schwingungen würden sich dann nur innerhalb des Gebietes CAQ ausbreiten und im Gebiete CAB müssten die Teilchen in Ruhe bleiben. Etwas ganz anderes erhält man dagegen, wenn man alle Punkte der Oberfläche AQ als neue Schwingungszentren auffaſst. In diesem Falle können offenbar auch nach dem im Gebiete BAC gelegenen Punkte M Schwingungen hingelangen. Entsprechende Rechnungen, die indes nicht ganz einfach sind, zeigen, daſs diese Schwingungen sich im allgemeinen nicht aufheben, und daſs also die von O ausgehende Bewegung teilweise um den Schirm AB gewissermaſsen herumbiegt. Zu den Diffraktionserscheinungen gehört nun eben dies Auftreten von Schwingungen im Gebiete BAC.

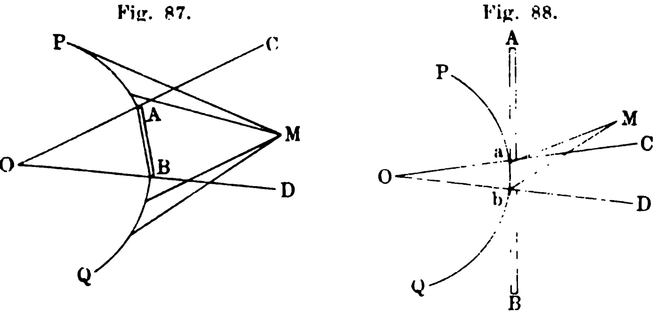
Fig. 86.



Ein zweiter hierher gehöriger Fall ist durch Fig. 87 illustriert. Auf dem Wege, welchen die Wellenfläche PQ nimmt, befinde sich ein kleiner Körper, etwa ein kleines kreisförmiges Scheibchen oder ein schmaler Körper (z. B. ein Draht), dessen Breite AB sei. In den Raum $CABD$ gelangen hier Schwingungen, welche von den Teilen AP und BQ der Wellenfläche ausgehen; dieselben heben sich speziell im zentral gelegenen Punkte M nicht auf.

Ein dritter Fall von Diffraktion tritt ein, wenn auf dem Wege, den die Wellenfläche PQ (Fig. 88) nimmt, sich ein Schirm AB mit

Fig. 87. Fig. 88.



sehr kleiner Öffnung ab befindet. Hier würden wir, an einer strahlenförmigen Ausbreitung der Schwingungen festhaltend, zu dem durchaus falschen Resultate gelangen, daſs sich die Schwingungen nur innerhalb

des Gebietes $CabD$ ausbreiten. In Wirklichkeit aber breiten sich die von den verschiedenen Punkten des kleinen Teiles ab der Wellenfläche ausgehenden Schwingungen nach allen Seiten aus und veranlassen dadurch Schwingungen auch solcher Punkte M, die relativ weit jenseits OC resp. OD liegen. Aus diesem dritten Falle der Diffraktion geht ganz besonders deutlich hervor, dafs man von einer geradlinigen Ausbreitung der Schwingungen überhaupt nicht reden darf, und dafs man daher Strahlen auch bei geometrischen Konstruktionen nur mit äufserster Vorsicht zu verwenden hat.

Diffraktionserscheinungen kommen auch bei Ausbreitung einer Wellenlinie (S. 181), welche auf ihrem Wege irgend welchen Hindernissen begegnet, zu stande.

§ 13. **Der physikalische Begriff der Wellenfläche.** Wir gelangten zum Begriffe einer sphärischen Wellenfläche im freien isotropen Medium, indem wir voraussetzten, dafs im Anfang nur ein Punkt zu schwingen beginnt, und dafs sich diese Schwingungsbewegung auf alle denselben allseitig umgebenden Teilchen überträgt. Ein derartiger Fall ist aber physikalisch unmöglich. Die ursprünglichen Schwingungen gehen immer von Teilchen aus, die in einem gewissen, wenn auch bisweilen kleinen Teile des Raumes gelegen sind; zudem besitzen die Schwingungen verschiedener Teilchen in vielen Fällen weder dieselbe Richtung noch auch die gleiche Phase. Aufserdem pflanzen sich die von jedem einzelnen Teilchen ausgehenden Schwingungen nicht in gleicher Weise nach allen Richtungen fort. Ist das Medium so beschaffen, dafs sich in ihm Querschwingungen ausbreiten können, so erfolgt die Ausbreitung vorzugsweise in einer zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene; ist das Medium jedoch fähig, Längsschwingungen zu übertragen, so geht die Ausbreitung in der Richtung der ursprünglichen Schwingung vor sich. Aus allem Gesagten geht hervor, dafs es eine vollständige, geschlossene Wellenfläche, welche den Erregungsbezirk der ursprünglichen Bewegungen allseitig umgiebt und den geometrischen Ort der Punkte darstellt, welche die Schwingungen zu derselben Zeit und in derselben Phase erreichen — in Wirklichkeit gar nicht giebt. Ein kleiner Teil einer geometrischen Wellenfläche kann indes auch die physikalische Bedeutung eines Ortes der in gleicher Phase befindlichen Punkte haben. Zwecks der Erklärung von physikalischen Erscheinungen mufs man sich daher auf die Betrachtung von nur kleinen Teilen einer Wellenfläche beschränken, die vom Entstehungsorte der ursprünglichen Schwingungen aus jedenfalls unter sehr kleinem Winkel erscheinen. So verfährt man denn auch in der That.

Einfacher gestalten sich die Verhältnisse für Wellenlinien im Falle von Querschwingungen. In diesem Falle sind geschlossene Wellen-

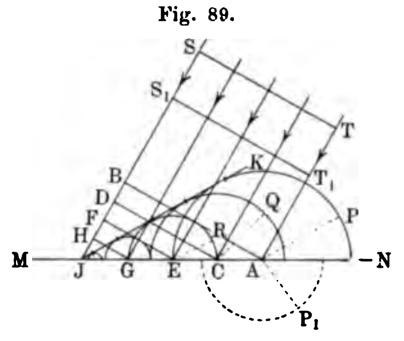
linien, deren sämtliche Punkte sich in derselben Phase befinden, physikalisch durchaus möglich (z. B. die Ringe an einer Wasseroberfläche).

§ 14. Reflexion von Wellen und Strahlen. Wenn eine Schwingungsbewegung bis zu einer Fläche gelangt, welche zwei verschiedene Medien trennt, so breitet sie sich zum Teil im zweiten Medium aus, zum Teil aber kehrt sie ins erste Medium zurück, wobei sich neue Wellenflächen bilden, die sich von der Trennungsfläche wiederum entfernen.

Diese Erscheinung wird Spiegelung (Zurückwerfung, Reflexion) genannt. Das Huygenssche Prinzip setzt uns in den Stand, die reflektierte Welle zu konstruieren und für ein isotropes Medium das bekannte Gesetz von der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels der Strahlen (d. h. der zu den Wellenflächen senkrechten Geraden) zu finden.

Nehmen wir an, MN (Fig. 89) stelle die Trennungsfläche zweier Medien dar; ST sei ein Teil einer ebenen Welle (S. 183), welcher ebenso wie auch die Ebene MN senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Die zu ST senkrechten Geraden sind Strahlen. In Fig. 83, S. 184, war bereits gezeigt worden, in welcher Weise die Welle ST nach $S_1 T_1$ gelangt, und sich überhaupt zu sich selbst parallel verschiebt. In einem gewissen Zeitmoment gelangt der äufserste Punkt T des in Betracht gezogenen Teiles der ebenen Welle nach A zur Trennungsfläche MN. In

Fig. 89.

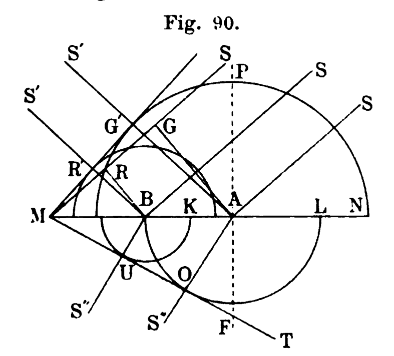


diesem Augenblicke hat die Welle die Lage AB. Im selben Moment wird A zum neuen Schwingungszentrum, von dem aus sich ein halbkugelförmiges Wellenflächenelement zurück ins erste Medium hinein ausbreitet. Dasselbe bezieht sich auf alle Punkte der Geraden A, d. h. der durch A gehenden und zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden. Die Umhüllende der halbkugelförmigen Oberflächen ist offenbar die Oberfläche eines Halbcylinders, dessen Achse die Gerade A darstellt. Etwas später als nach A gelangt die Schwingungsbewegung zur Geraden C; in diesem Augenblicke wird die Lage der ebenen Welle durch die Gerade CD bestimmt und in eben diesem Augenblicke beginnt sich um C eine halbcylindrische Wellenfläche auszubilden. Noch etwas später gelangen die Schwingungen zu den Geraden E, G u. s. w. Zuletzt erreichen sie die Punkte der Geraden J. Bis zu diesem Augenblicke hat sich schon eine unzählbare Menge halbcylindrischer Wellen um die Gerade bilden können, welche durch die verschiedenen Punkte

der Geraden AJ gehen und zur Zeichnungsebene senkrecht sind. Je näher einer dieser Punkte zu J ist, desto kleiner ist der Radius des entsprechenden Halbcylinders. Dieser Radius läfst sich leicht bestimmen. Die Punkte A und B begannen gleichzeitig zu schwingen; der Halbcylinder um A hat sich in der Zeit ausgebildet, in welcher sich die Schwingungen von B nach J ausgebreitet haben; hieraus folgt, dafs der Radius des um A beschriebenen Halbkreises, d. h. $AP = BJ$ ist. Ebenso ist $CQ = DJ$, $ER = FJ$ u. s. w.

Die Trennungsfläche MN stellt einen besonderen Fall einer Oberfläche $\sigma = AB$ dar (Fig. 81), an der wir das Huygenssche Prinzip erläutert haben. Die Fläche, welche alle erwähnten Halbcylinder berührt, ist die gesuchte neue Wellenfläche, die sich bei der Reflexion bildet. Beweisen wir, dafs sie eine Ebene ist, welche durch J geht, oder dafs die Gerade JK die gemeinsame Tangente aller in der Zeichnungsebene liegenden Halbkreise ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir Fig. 90, wo AG ein Teil einer einfallenden ebenen Welle, SA, SB, SM einfallende Strahlen sind.

Fig. 90.



In dem Augenblicke, wo die Schwingungsbewegung den Punkt M erreicht, haben wir in der Zeichnungsebene um A einen Halbkreis mit dem Radius GM und um den Zwischenpunkt B einen Halbkreis mit dem Radius RM. Ziehen wir vom Punkte M aus zwei Tangenten MR' und MG' an diese Halbkreise und zeigen wir, dafs sie zusammenfallen, d. h. dafs M, R' und G' auf einer Geraden liegen. Zu diesem Zwecke verbinden wir G' mit A und R' mit B. Die Dreiecke $MG'A$ und MGA sind einander kongruent, denn es ist $\angle G' = \angle G = 90^0$ und Radius $AG' = MG$. Hieraus folgt, dafs $\angle G'MA = \angle GAM$ ist. Ebenso folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $MR'B$ und MRB, dafs $\angle R'MB = \angle RBM$ ist. Es sind aber $\angle GAM$ und $\angle RBM$ untereinander gleich, denn es ist $GA \parallel RB$; folglich ist $\angle G'MA = \angle R'MB$, was zu beweisen war. Die auf diese Weise gebildete ebene Welle $MR'G'$ wird sich daher parallel zu sich selbst weiter bewegen. Die Geraden $AG'S'$ und $BR'S'$ sind reflektierte Strahlen.

Aus der Konstruktion geht hervor, dafs der einfallende Strahl SA, die Normale AP zur Trennungsfläche und der reflektierte Strahl AS' in einer Ebene liegen. Es erübrigt nur noch zu beweisen, dafs der Einfallswinkel SAP gleich dem Reflexionswinkel PAS' ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke $MG'A$ und MGA folgt, dafs $\angle G'AM$

$= \angle GMA = \angle SAN$ ist; folglich ist $90^0 - \angle SAN = 90^0 - \angle G'AM$, d. h. $\angle SAP = \angle PAS'$.

§ 15. Brechung von Wellen und Strahlen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schwingungsbewegungen mit gegebener Periode ist in verschiedenen isotropen Medien eine verschiedene. Sei diese Geschwindigkeit im Inneren des oberhalb der Trennungsfläche MN (Fig. 89) gelegenen Mediums gleich v_1, im unterhalb derselben Fläche gelegenen Medium gleich v_2 und $v_1 > v_2$ und führen wir die Bezeichnung

$$\frac{v_1}{v_2} = n \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ein; die Zahl n ist im gegebenen Falle gröfser als Eins.

Überaus wichtig ist die Annahme, dafs beide Medien isotrop sind. Wir werden später sehen, dafs man für ein anisotropes Medium zwischen einer Geschwindigkeit des Strahles und einer Geschwindigkeit der Wellen zu unterscheiden hat. Der Ausdruck (29) bezieht sich in diesem Falle nur auf die Geschwindigkeiten der Wellen.

Erreicht die Schwingungsbewegung den Punkt A, so wird derselbe zum Schwingungszentrum auch für das zweite Medium und bildet sich daher um die Gerade A (welche zur Zeichnungsebene senkrecht steht) auch im zweiten Medium eine halbcylindrische Fläche aus. In dem Augenblicke aber, wo die Schwingung den Punkt J erreicht hat, und sich im ersten Medium ein Halbcylinder mit dem Grundflächenradius $AP = BJ$ ausgebildet hat, ist im zweiten Medium ein Halbcylinder mit dem Radius AP_1 entstanden, der sich zu $AP = BJ$ verhält, wie $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n}$. Ebendasselbe bezieht sich auch auf die Radien der unendlich vielen Halbcylinder, welche sich bis zu diesem Zeitmoment im zweiten Medium um die zu MN und zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden gebildet haben.

Wir haben nun zu beweisen, dafs die gemeinsame Umhüllungsfläche dieser Halbcylinder ebenfalls eine Ebene ist. Zu diesem Zwecke wenden wir uns wiederum der Fig. 90 zu. Um A ist ein Halbkreis mit dem Radius AL (der nur zufällig durch B geht) und um B ein solcher mit dem Radius BK beschrieben, wobei

$$\frac{AL}{GM} = \frac{BK}{BM} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

ist.

Von M aus ziehen wir die Tangenten MU und MO an die beiden Halbkreise und beweisen, dafs diese Tangenten zusammenfallen. Die Dreiecke BMU und AMO sind einander ähnlich, da $\angle O = \angle U = 90^0$ ist und die Seiten in Proportion stehen, denn aus der Zeichnung

und aus (30) geht hervor, dafs $\frac{AM}{BM} = \frac{GM}{RM} = \frac{AL}{BK} = \frac{AO}{BU}$ ist. Hieraus folgt, dafs $\angle AMO = \angle BMU$ ist, was auch zu beweisen war. Die ebene Welle, die sich im zweiten Medium ausgebildet hat, bewegt sich parallel zu sich selbst weiter; offenbar stellen die Geraden AS'' und BS'' die gebrochenen Strahlen dar. Winkel $S''AF$ ist der Brechungswinkel.

Leiten wir jetzt die Brechungsgesetze ab. Zunächst ist klar, dafs der Einfallsstrahl SA, die Normale PF und der gebrochene Strahl AS'' in ein und derselben Ebene liegen. Aber ferner ist

$$AG' = MA \sin G'MA = MA \sin GAM = MA \sin SAP;$$

aufserdem ist

$$AO = MA \sin AMO = MA \sin S''AF.$$

Folglich ist

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{AG'}{AO} = \frac{GM}{AL}.$$

Die Relation (30) giebt

$$\frac{\sin SAP}{\sin S''AF} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Das heifst: das Verhältnis vom Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels für Schwingungen von gegebener Periode ist eine konstante Gröfse (in Bezug auf zwei Medien, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 und v_2 beträgt); dies Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeit im ersten zur Geschwindigkeit im zweiten Medium. Man nennt obiges Verhältnis den relativen Brechungsquotienten. Vergleicht man alle Medien mit einem bestimmten, willkürlich gewählten, in welchem die Geschwindigkeit v_0 beträgt, so nennt man den sich auf den Übergang der Strahlen aus diesem in irgend ein anderes beliebiges Medium beziehenden den Brechungsquotienten jenes beliebigen Mediums. Seien n_1 und n_2 die Brechungsquotienten zweier Medien, in denen die Geschwindigkeiten gleich v_1 und v_2 sind, so hat man $n_1 = \frac{v_0}{v_1}$ und $n_2 = \frac{v_0}{v_2}$. Der relative Brechungsquotient n für den Übergang aus dem ersten Medium in das zweite ist, wie wir sehen,

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_0}{v_2} : \frac{v_0}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Der relative Brechungsquotient beim Übergange eines Strahles aus einem Medium in ein anderes ist gleich dem Brechungsquotienten des zweiten Mediums dividiert durch denjenigen des ersten Mediums.

In Fig. 91 ist der Übergang der Strahlen aus einem Medium mit kleinerer Geschwindigkeit v_1 in ein Medium mit gröfserer Geschwindigkeit v_2 dargestellt. Hier ist $AF > CE$ und $BG > DE$, wobei

$$\frac{AF}{CE} = \frac{BG}{DE} = \frac{v_2}{v_1} > 1$$

ist.

Wie man sieht, entfernt sich der Strahl nach seiner Brechung von der Normalen. Zieht man die Normale NN, so ist $\varphi = \angle SAN$ der Einfallswinkel und $\psi = \angle S_1AN$ der Brechungswinkel. Setzt man $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$, wobei $n > 1$ ist, so kommt

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} < 1,$$

und hieraus

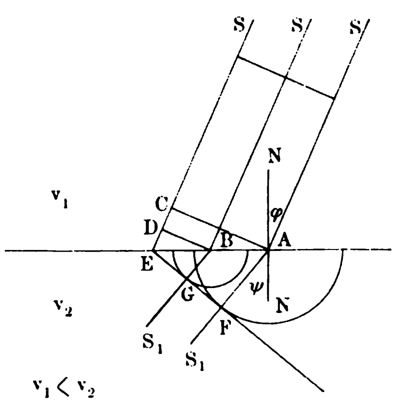
$$\sin\psi = n \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Wir erhalten $\psi = 90^0$ für einen besonderen Wert Φ von φ, welcher bestimmt wird durch die Gleichung

$$\sin\Phi = \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Ist $\varphi = \Phi$, so hat der gebrochene Strahl die Richtung AE; seine Amplitude wird übrigens, wenn φ sich Φ und ψ sich 90^0 nähert, unendlich klein. Ist $\varphi > \Phi$, so ist $\sin\varphi > \frac{1}{n}$ und nach (33) $\sin\psi > 1$, was unmöglich ist. In diesem Falle wird der Strahl überhaupt nicht gebrochen, d. h. er tritt nicht in das zweite Medium ein und wird, ohne dafs sich die Gröfse seiner Amplitude ändert, reflektiert. Man nennt diese Erscheinung **totale (innere) Reflexion**: sie erfolgt an der Trennungsfläche zweier Medien und zwar innerhalb desjenigen Mediums, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen die kleinere ist. Der durch (34) bestimmbare Winkel Φ heifst der **Grenzwinkel für die totale Reflexion**.

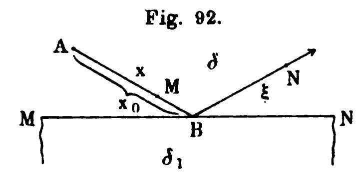
Fig. 91.



Alles in den letzten Paragraphen Erläuterte bezieht sich gleichermafsen auf Quer- wie auf Längsschwingungen.

§ 16. Verlust einer halben Wellenlänge bei der Reflexion. Wenden wir uns jetzt zu der Frage nach der Phase der reflektierten Wellen. Es fragt sich da zunächst, ob der reflektierte Strahl die einfache Fortsetzung des einfallenden Strahles in dem Sinne bildet, dafs die Phasen sich continuierlich ändern. Sei AB (Fig. 92) der einfallende, BN der reflektierte Strahl. Die Zeit t möge von dem Augenblicke an gerechnet werden, wo die Schwingungen irgend eines Punktes A beginnen. Die Entfernung y eines beliebigen Punktes M des einfallenden Strahles zur Zeit t wird nach Formel (4) auf Seite 164 folgendermafsen bestimmt:

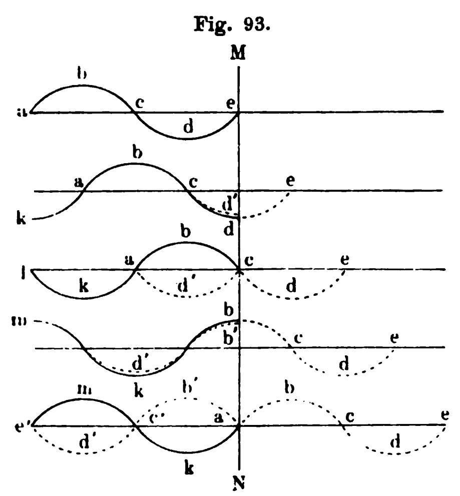
Fig. 92.



$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdots \cdots \quad (35)$$

wo x die Entfernung dieses Punktes M von A ist. Es fragt sich nun: erhalten wir die Entfernung y zur Zeit t für den Punkt N, der auf dem reflektierten Strahle liegt, wenn wir in (35) $x = x_0 + \xi$ setzen, wo $AB = x_0$ und $BN = \xi$ ist? Die theoretische Untersuchung dieser Frage, die in vollster Strenge hier nicht ausgeführt werden kann, führt zu folgendem Ergebnis.

Fig. 93.



Man mufs in dieser Frage zwei Fälle unterscheiden: 1. Wenn die Dichte δ_1 des zweiten Mediums kleiner und 2. wenn sie gröfser als die Dichte δ des ersten Mediums ist.

I. Das zweite Medium ist das weniger dichte; $\delta_1 < \delta$. In diesem Falle ist die reflektierte Schwingung die direkte Fortsetzung der einfallenden und die Phase im Punkte N ist eine ebensolche, wie sie in der Entfernung ξ von B bei direkter Verlängerung des Strahles AB erhalten worden wäre. Die dem Punkte N zugehörige Verschiebung y, d. h. die Gleichung des reflektierten Strahles wird ($a_1 < a$)

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda}\right) \quad \cdots \cdots \quad (36)$$

In Fig. 93 stellt MN die Grenze zweier Medien dar, bis zu welcher

die Schwingungsbewegung in einem gewissen Augenblicke t gelangt ist. In diesem Augenblicke wird die Anordnung der Teilchen durch die Kurve $abcde$ in Zeile 1 dargestellt (jede Schwingung beginnt mit einer Abwärtsbewegung). Die ausgezogenen Kurven in den folgenden Zeilen stellen die Anordnung der Teilchen im Einfallsstrahl für die Zeiten $t + \frac{1}{4}T$, $t + \frac{1}{2}T$, $t + \frac{3}{4}T$ und $t + T$ dar. Punktiert ist links von MN die Anordnung der Teilchen in der reflektierten Schwingung bezeichnet. Man erhält dieselbe, wenn man die Kurve für den Einfallsstrahl rechts von MN um $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ und λ verlängert und die Zeichnung um MN derart umgebogen denkt, dafs die rechte Hälfte auf die linke zu liegen kommt. Die Amplituden im reflektierten Strahl sind kleiner als im einfallenden. Ein Phasenverlust bei der Reflexion tritt nicht ein.

II. Das zweite Medium ist das dichtere; $\delta_1 > \delta$. In diesem Falle geht bei der Reflexion eine halbe Wellenlänge verloren und die reflektierte Schwingung stellt nicht mehr die direkte Fortsetzung der einfallenden Schwingung dar. Die dem Punkte N zugehörige Verschiebung y (Fig. 92) ist eine derartige, wie sie bei Verlängerung des nicht reflektierten Strahles in der Entfernung $x_0 + \xi + \frac{1}{2}\lambda$ von A erhalten würde.

Die Gleichung des reflektierten Strahles ist

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right)$$

oder

$$y = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

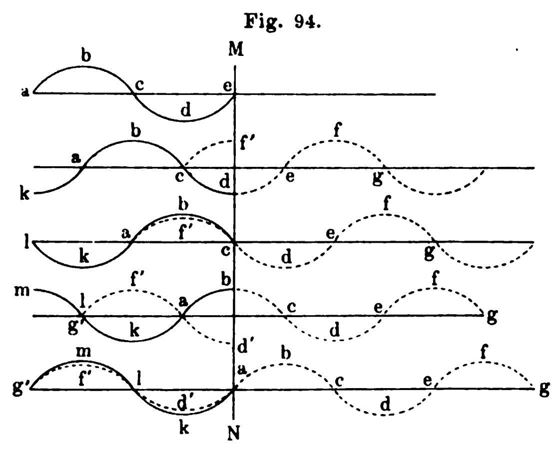
oder auch

$$y = - a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0 + \xi}{\lambda} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Der Zeichenwechsel der Amplitude drückt aus, dafs hier eine halbe Welle verloren gegangen ist; siehe Tabelle (9), Zeile 4 auf Seite 165. In Fig. 94 auf folgender Seite haben die voll ausgezogenen Kurven links von MN dieselbe Bedeutung wie in Fig. 93. Durch punktierte Kurven ist auch hier die Anordnung der Teilchen im reflektierten Strahle angedeutet. Man erhält dieselbe, wenn man die voll ausgezogene Kurve, rechts über MN hinaus verlängert, eine halbe Welle ausläfst und wiederum die rechte Hälfte der Zeichnung auf die linke umbiegt. So ist z. B. in der zweiten Zeile (entsprechend der Zeit

$t + \frac{T}{4}\Big)$ die halbe Welle *def* fortgelassen und *fg* auf der linken Seite in die Lage *f'c* gebracht worden. In der dritten Zeile ist die halbe Welle *cde* fortgelassen und *efg* in die Lage *ef'a* gebracht u. s. w. Auch hier ist die Amplitude des reflektierten Strahles kleiner als die Amplitude des einfallenden.

Fig. 94.



Alles, was von den beiden vorhergehenden Fällen der Reflexion gesagt worden ist, bezieht sich gleichermafsen auf Quer- wie auf Längsschwingungen. Stellt man das oben Erläuterte zusammen, so erhält man folgendes Resultat:

1. Bei Reflexion an einem weniger dichten Medium tritt kein Zeichenwechsel der Amplitude, kein Verlust einer halben Welle auf. Hat die Gleichung des einfallenden Strahles die Form

$$y = a \sin \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

wo $\Theta = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ist, so ist die Gleichung des reflektierten Strahles

$$y = a_1 \sin\left(\Theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Hier ist $a_1 < a$ und $\Theta_0 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)$; $x_0 = AB$ (vergl. Fig. 92).

2. Bei Reflexion an einem dichteren Medium erfährt die Amplitude einen Zeichenwechsel oder, mit anderen Worten, es geht eine halbe Welle verloren. Die Gleichung des reflektierten Strahles ist hier

$$y = a_1 \sin\left(\Theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda} - \pi\right) = -a_1 \sin\left(\Theta_0 - 2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right) \cdot \quad (41)$$

Die Ursache dafür, dafs in einem Falle eine halbe Welle verloren geht, im anderen Falle nicht, kann erst später vollständig erklärt werden. Die gewöhnliche, vielleicht nicht ganz befriedigende Erklärung

basiert vorzugsweise auf einer gewissen Analogie, die zwischen der Reflexion von Strahlen an der Grenze zweier verschiedener Medien und den Erscheinungen beim Stofse elastischer Körper besteht. Wir werden an entsprechender Stelle sehen, dafs, wenn eine elastische Kugel eine andere ruhende und ebenfalls elastische Kugel trifft, die Geschwindigkeit der ersteren sich nicht ändert, falls die Masse der zweiten geringer ist als diejenige der ersten; ist aber die Masse der zweiten Kugel gröfser, so prallt die erste Kugel zurück, d. h. ihre Geschwindigkeit ändert das Vorzeichen. In analoger Weise ändert sich die Geschwindigkeitsrichtung eines Teilchens, das sich, dem weniger dichten Medium angehörig, an der Grenze zweier Medien von verschiedener Dichte bewegt.

Wir wollen diesen Vorgang eingehender und genauer untersuchen.

Wenn sich die Schwingungsbewegung auf ihrem Wege von Teilchen zu Teilchen fortpflanzt, so mufs an der Grenze zweier Medien das Folgende eintreten: Sei A das letzte Teilchen des ersten, B das benachbarte, also erste Teilchen des zweiten Mediums.

Wenn A und B gleiche Masse haben, so überträgt sich die ganze Energie des Teilchens A ungeändert auf das Teilchen B.

Wenn jedoch das Teilchen B eine geringere Masse hat als A, so wird die Energieübertragung eine andere; nur ein Teil der Energie des Teilchens A geht auf Teilchen B über; B giebt sich dem von A ausgehenden Impulse sozusagen zu leicht hin. Teilchen A behält etwas von seiner Bewegung in der ursprünglichen Richtung und diese nicht übertragene Bewegung bildet den Impuls für das Zustandekommen einer neuen Schwingung, die sich von A rückwärts ins erste ausbreitet. Wenn in A ununterbrochen Schwingungen mit der Amplitude a ankommen, so ist klar, dafs Teilchen A mit einer Amplitude b, welche gröfser als a ist, schwingen wird; die Amplitude des reflektierten Strahles wird dagegen $b - a$. Im Grenzfall, wenn die Dichte des zweiten Mediums gleich Null ist, erhalten wir $b = 2a$; die Amplituden des einfallenden und des reflektierten Strahles sind einander gleich ($b - a = 2a - a = a$).

Wenn umgekehrt die Masse des Teilchens B gröfser ist als diejenige des Teilchens A, so wird das erste nicht dem vom zweiten Teilchen ausgehenden Impulse unterliegen; es wird bei Querschwingungen nicht der Bewegung jenes Teilchens folgen und im Falle von Längsschwingungen sich nicht in der Strahlrichtung verschieben. Im einen wie im anderen Falle wird Teilchen A von B einen Impuls erfahren, der seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Dieser entgegengesetzte Impuls ist die Ursache für das Zustandekommen einer reflektierten Schwingung, die daher keine Fortsetzung der einfallenden Schwingungsbewegung ist. Die Amplitude b des Punktes A wird kleiner als a; die Differenz $a - b$ ist gleich der Amplitude der

reflektierten Schwingung. Im Grenzfalle, wenn das Teilchen B gar nicht in Bewegung versetzt werden kann, ist $b = 0$; dann wird die Bewegung des Teilchens A von dem Nachbarteilchen B vollständig vernichtet. Auch in diesem Falle sind die Amplituden des einfallenden und des reflektierten Strahles einander gleich.

§ 17. Durch Reflexion gebildete stehende Wellen. Ist der einfallende Strahl normal zur Trennungsfläche zweier Medien, so breitet sich der reflektierte Strahl in derselben Geraden wie ersterer, jedoch in entgegengesetzter Richtung aus.

Wir haben in § 8 gesehen, daſs sich in diesem Falle längs der Geraden stehende Wellen bilden müssen, wobei ein Schwingungsbauch von seinem benachbarten Knoten um $\frac{1}{4}\lambda$ abstehen muſs. Derartige stehende Wellen bilden sich auch in der That infolge der Interferenz der einfallenden und der reflektierten Schwingungen.

Die Lage der Knoten und Bäuche ist hierbei nicht schwer zu finden. Ist das zweite Medium das weniger dichte, so muſs an der Trennungsfläche ein Bauch liegen, denn, wie wir sahen, schwingt das an der Grenze liegende Teilchen A mit der Amplitude $b > a$ (im Grenzfalle $b = 2a$). Ist dagegen das zweite Medium das dichtere, so ist die Amplitude $b < a$ (im Grenzfalle ist $b = 0$) und an der Trennungsfläche muſs sich ein Knoten befinden.

Eine strengere Ableitung ist die folgende:

1. Reflexion am weniger dichten Medium ($\delta_1 < \delta$). Im Punkte M (Fig. 95), welcher um $MP = x$ von der Fläche AB absteht, interferieren zwei Strahlen, deren Gangunterschied offenbar $MP + PM = 2x$ ist. Wir wissen, daſs verstärkte Schwingungen, d. h. Bäuche, in denjenigen Punkten sich ausbilden, für welche $2x = 2n\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2}$ ist, d. h. in den Punkten $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda \ldots$ Eine Schwächung der Schwingung, d. h. Knoten, bildet sich an den Punkten, für welche der Gangunterschied $2x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ ist, d. h. für $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}$ u. s. w.

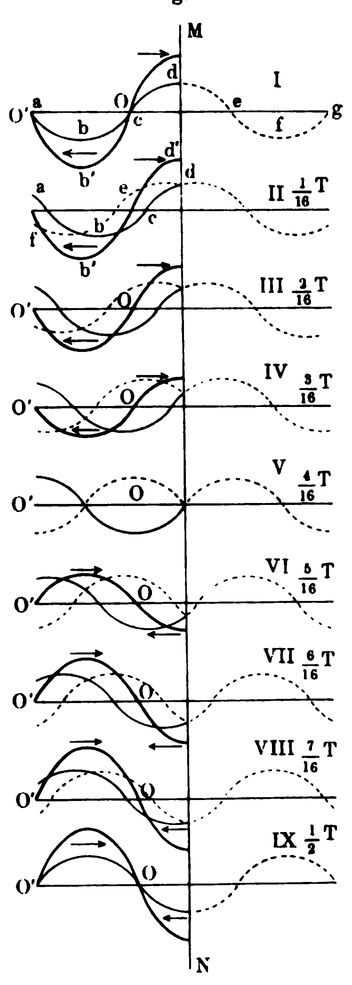
Fig. 95.

2. Reflexion am dichteren Medium ($\delta_1 > \delta$). Ist $NQ = x$, so

interferieren in N zwei Strahlen, deren Gangunterschied $2x + \frac{\lambda}{2}$ ist, denn im Punkte Q geht eine halbe Welle verloren.

Bäuche entstehen für $2x + \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}$, d. h. für $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda$ u. s. w.; Knoten entstehen dort, wo der Gangunterschied $2x + \frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ oder $x = n\frac{\lambda}{2}$ ist, d. h. für $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda$ u. s. w.

Fig. 96.



In Fig. 95 ist die Lage der Bäuche (n) und Knoten (y) für beide eben erwähnte Fälle dargestellt.

In Fig. 96 ist die Anordnung der Teilchen im einfallenden Strahle für neun aufeinanderfolgende Momente $t, t + \frac{1}{16}T, t + \frac{2}{16}T$ u. s. w. bis $t + \frac{8}{16}T = t + \frac{1}{2}T$ dargestellt und zwar durch eine dünne ausgezogene Linie (z. B. *abcd* in Zeile I und II). Durch eine punktierte Kurve ist sie ins zweite Medium hinein fortgesetzt und ohne Verlust der halben Welle ($\delta_1 < \delta$) nach links umgelegt, wo diese punktierte Kurve die reflektierte Schwingung darstellt; in Zeile I und IX fällt sie mit der Kurve für die einfallende Schwingungsbewegung zusammen. Die dickere ausgezogene Kurve zeigt die Anordnung der Teilchen in der resultierenden Schwingung; in Zeile V fällt diese Kurve mit der Geraden $O'O$ zusammen. Wir sehen, dafs das an der Grenze befindliche Teilchen seine Schwingungen mit verdoppelter Amplitude ausführt, so die Punkte M und N in Zeile I und IX; hier befindet sich ein Bauch. Der Punkt O,

welcher um $\lambda:4$ von der Grenze beider Medien absteht (in Zeile II mufs sich der Punkt O dort befinden, wo $b'd'$ die horizontale Gerade durchschneidet), bleibt in Ruhe; hier ist ein Knoten. In b' (Zeile I und II) befindet sich wiederum ein Bauch, in O' ein Knoten.

Wir hatten bisher einen einzelnen Strahl betrachtet und Bäuche und Knoten an einzelnen Punkten derselben gefunden. Hat man es dagegen mit einer einfallenden ebenen Welle zu thun, so erhält man abwechselnd Flächen stärkster Bewegung und ruhende Flächen; die letzteren nennt man Knotenflächen. Wenn Schwingungen sich nur nach zwei Dimensionen ausbreiten, also Wellenlinien bilden und von einer das gegebene Medium begrenzenden Grenzlinie reflektiert werden, so bilden sich infolge von Interferenz der ursprünglichen und der reflektierten Schwingungen Gebiete lebhaftester Bewegung (Bäuche), die von Linien relativer oder sogar vollkommener Ruhe begrenzt sind. Letztere Linien heifsen Knotenlinien.

Formel (26, a) ermöglicht uns, die Gleichung der stehenden Wellen aufzustellen, welche sich unter der Bedingung bilden, dafs die Reflexion eine vollkommene ist, d. h. dafs die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Schwingungen gleich sind ($= a$). In diesem Falle ist die Amplitude an den Bäuchen $A = 2a$, an den Knoten $A = 0$. Ist das zweite Medium weniger dicht, so liegt an der Trennungsfläche ein Bauch (wie z. B. im Punkte O in Fig. 76), daher wird die Schwingungsgleichung in der Entfernung x von dieser Fläche durch Formel (26, a) auf Seite 180 gegeben

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41, a)$$

Hier wird die Zeit t vom Beginn einer der Schwingungen des Punktes $x = 0$, oder eines der zwischen $x = 0$ und $x = \lambda:4$ liegenden Punkte an gerechnet. Ist das zweite Medium das dichtere, so liegt an der Trennungsfläche ein Knoten. In diesem Falle ist die Schwingungsgleichung

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41, b)$$

Hier wird die Zeit t von dem Momente an gerechnet, wo einer der zwischen $x = 0$ und $x = \lambda:2$ liegenden Punkte seine Schwingungen beginnt.

Fig. 97.

§ 18. Das Dopplersche Prinzip.

Nehmen wir an, im Punkte A (Fig. 97) wirke eine Kraft, welche das Teilchen A des Mediums zu harmonischen Schwingungen mit der Periode T veranlafst und diese Bewegung unausgesetzt unterhält. Nennen wir die Entstehungsursache einer solchen Kraft die Schwin-

gungsquelle (z. B. ein tönender Körper, ein leuchtender Körper, ein schwingender Körper, der hierbei auf eine flüssige Fläche aufschlägt u. s. w.). Die Schwingungen breiten sich längs der Geraden AB mit der Geschwindigkeit v aus; die Wellenlänge λ, die Ausbreitungsgeschwindigkeit v und die Periode T sind untereinander durch die Gleichung (1) auf Seite 163 verbunden

$$\lambda = vT \quad \text{. . . . .} \quad (42)$$

Die Anzahl Wellen, die von A in der Zeiteinheit ausgehen, d. h. seine Schwingungszahl, bezeichnen wir mit n. Die Definitionsgleichung $Tn = 1$ giebt uns noch Formel (3) auf Seite 163 (wo die Schwingungszahl mit N bezeichnet ist)

$$v = n\lambda \quad \text{. . . . .} \quad (43)$$

Nehmen wir ferner an, es befinde sich in B ein Beobachter, der im stande ist, die Zahl n_1 der an ihm in der Zeiteinheit vorüber gleitenden Wellen zu bestimmen, d. h. etwa bei Längsschwingungen, die sich an einer Stelle bildenden Verdichtungen zu zählen oder bei Querschwingungen zu beobachten, wievielmal ein ihm zunächst gelegenes Teilchen durch seine Ruhelage schwingt. Schliefslich sei eine selbstständige Bewegung sowohl der Schwingungsquelle A als auch des Beobachters B längs der Geraden AB möglich. Im ersten Falle heifst das: die einzelnen von der Quelle A in gleichen Intervallen T hervorgerufenen Schwingungen nehmen der Reihe nach ihren Anfang in denjenigen verschiedenen Punkten des Mediums, an welchen sich in den entsprechenden Momenten die Quelle selbst befindet. Bewegt sich dagegen der Beobachter, so setzen wir voraus, dafs er es nicht merkt, wie er von den einen Punkten des Mediums zu anderen gelangt, sondern blofs die Zahl von Verdichtungen oder die Zahl der Durchgänge durch die Gleichgewichtslage beobachtet oder überhaupt die Zahl n_1 der in seiner Nähe in der Zeiteinheit erfolgenden Wiederholungen ein und derselben Phase bestimmen kann. Dabei habe die Quelle A ihre Schwingungen so frühzeitig hervorzurufen begonnen, dafs letztere sich bereits weiter als bis zum Beobachter B haben ausbreiten können.

Es sei mit u die Geschwindigkeit des Beobachters B, mit u' die Geschwindigkeit der Schwingungsquelle A bezeichnet und beide Geschwindigkeiten seien positiv genommen, falls A und B sich einander nähern (d. h. falls AB abnimmt; siehe die Pfeile in Fig. 97).

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Zahl n_1 für verschiedene Werte von u und u' zu bestimmen.

Dabei sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Beobachter und Schwingungsquelle sind in Ruhe ($u = 0$, $u' = 0$). In diesem Falle werden offenbar alle von A nach gleichen Zeiträumen T ausgehenden Schwingungen auch Punkt B nach ebensolchen Zeitintervallen erreichen; daher ist $n_1 = n$.

II. **Der Beobachter** B **bewegt sich mit der Geschwindigkeit** u, die in der Richtung nach A positiv gerechnet wird. Im Verlaufe einer gewissen Zeit τ gelangt der Beobachter von B nach B_1, wobei er den Weg $\sigma = u\tau$ zurücklegt. In dieser Zeit begegnen ihm offenbar $n_1\tau$ Wellen. Diese Zahl ist größer als die Zahl $n\tau$ der Wellen, die an ihm vorüber geglitten wären, wenn er sich in Ruhe befunden hätte, um so viel Wellen, als Wellenlängen in der Strecke $BB_1 = \sigma$ enthalten sind, d. h. um $\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{u\tau}{\lambda}$ Wellen. Somit haben wir $n_1\tau = n\tau + \frac{u\tau}{\lambda}$, oder, setzt man nach (43) $\lambda = \frac{v}{n}$ und hebt durch τ

$$n_1 = n + n\frac{u}{v} = n\frac{v+u}{v}.$$

Wäre u negativ, etwa gleich $-u_1$ und der Beobachter in der Zeit τ von B nach B_2 gelangt, so hätten wir $n_1\tau = n\tau - \frac{\sigma}{\lambda}$, woraus sich $n_1 = n\frac{v-u_1}{v} = n\frac{v+u}{v}$ ergiebt. Durch Vereinigung beider Formeln erhält man, **falls sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit** u **bewegt** (die in der Richtung auf die Schwingungsquelle zu positiv gerechnet wird):

$$n_1 = n\frac{v+u}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

III. **Die Schwingungsquelle** A **bewegt sich mit der Geschwindigkeit** u', die in der Richtung auf den Beobachter B zu positiv gerechnet wird. Sei $AC = \lambda$ die Wellenlänge. Wäre A in Ruhe, so würden gleiche Phasen (z. B. Verdichtungen oder Durchgänge durch die Gleichgewichtslage) sich nach rechts ausbreitend im gegenseitigen Abstande λ voneinander bleiben.

Nehmen wir nun an, im Verlaufe der Schwingungsdauer T sei die Schwingungsquelle von A bis nach A_1 gelangt, wo $AA_1 = \sigma = u'T$ ist. Jetzt stehen die gleichen sich nach rechts ausbreitenden Phasen um $CA_1 = \lambda_1$ voneinander ab. Da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v nicht ändert, so giebt uns Formel (43) $v = n\lambda = n_1\lambda_1$ und es ist jetzt

$$n_1 = n\frac{\lambda}{\lambda_1} = n\frac{\lambda}{\lambda - \sigma} = n\frac{vT}{vT - u'T} = n\frac{v}{v-u'}.$$

Hätte die Schwingungsquelle eine negative Geschwindigkeit $u' = -u_1'$ und wäre sie in der Zeit T von A nach A_2 gelangt, so wären nach B Wellen mit größerer Länge $\lambda_1 = \lambda + \sigma$ gelangt und wir hätten $n_1 = n\frac{v}{v+u_1} = n\frac{v}{v+u'}$. Verbindet man beide Formeln, so erhält man **für den Fall der Bewegung der Schwin-**

gungsquelle mit der Geschwindigkeit u' (die in der Richtung auf den Beobachter zu positiv gerechnet wird)

$$n_1 = n \frac{v}{v - u'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

IV. Der Beobachter sowohl als auch die Schwingungsquelle bewegen sich mit den Geschwindigkeiten u resp. u'. Infolge der Bewegung der Schwingungsquelle vergröfsert sich die Zahl n der Schwingungen, welche für $u = 0$ und $u' = 0$ zum Beobachter gelangen würde, im Verhältnisse von v zu $(v - u')$, weil die Wellen bei positivem u' verkürzt werden. Infolge der Bewegung des Beobachters vergröfsert sich, falls u positiv ist, die Zahl der ihm begegnenden Wellen im Verhältnisse von $(v + u)$ zu v. Mithin ist

$$n_1 = n \frac{v}{v - u'} \cdot \frac{v + u}{v}$$

oder

$$n_1 = n \frac{v + u}{v - u'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

Betrachten wir nunmehr einige Sonderfälle.

1. Der Beobachter nähert sich der Schwingungsquelle mit der Geschwindigkeit v; dann ist $u = v$ und Formel (44) ergiebt $n_1 = 2n$. Für den Beobachter ist die Schwingungsdauer (Periode) halb so grofs geworden.

2. Der Beobachter entfernt sich mit der Geschwindigkeit v von der Schwingungsquelle. Hier ist $u = -v$ und nach (44) $n_1 = 0$. Dem Beobachter, der sich zugleich mit irgend einer Phase bewegt, scheint das Teilchen stille zu stehen.

3. Die Schwingungsquelle entfernt sich vom Beobachter mit der Geschwindigkeit v; hier ist $u' = -v$ und nach (45) $n_1 = \frac{1}{2} n$. Für den Beobachter hat die Schwingungsdauer sich verdoppelt.

4. Die Schwingungsquelle nähert sich dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Hier ist $u' = v$ und nach (45) $n_1 = \infty$. Zum Beobachter gelangen somit Wellen, deren Länge unendlich klein ist.

5. Die Schwingungsquelle und der Beobachter bewegen sich mit den resp. Geschwindigkeiten u und u'. Auf diesen Fall bezieht sich unsere allgemeine Formel (46).

Die drei Formeln (44), (45) und (46) zeigen uns, dafs die scheinbare Änderung der Schwingungszahl nicht nur von der relativen Geschwindigkeit von Schwingungsquelle und Beobachter abhängt. Sei diese relative Geschwindigkeit mit c bezeichnet, so nimmt (46) die Form

$$n_1 = n \frac{v + u}{v + u - c}$$

oder

$$n_1 = n \frac{v - u' + c}{v - u'}$$

an.

Diese Formeln drücken es deutlich aus, dafs n_1 nicht blofs von c, sondern auch von u oder u' abhängt. Nur für $c = 0$ haben wir $n_1 = n$ bei jedem $u' = -u$, abgesehen vom Grenzfall $u' = -u = v$, wo der Beobachter und die Schwingungsquelle sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Quelle nach dem Beobachter hin bewegen; dann erreichen die Schwingungen den Beobachter überhaupt nicht.

Bei gleichzeitiger Bewegung von Beobachter und Schwingungsquelle mit der Geschwindigkeit v in der Richtung BA (Fig. 97) haben wir $u = -u' = v$ und $n_1 = n$.

Sind u und u' sehr klein gegen v, so kann man (46) folgende Form geben:

$$n_1 = n\left(1 + \frac{u + u'}{v}\right) = n\left(1 + \frac{c}{v}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Sechstes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 1. **Das Gravitationsgesetz.** Alle Teile der in der Welt vorhandenen Materie zeigen, soweit sie unserer Beobachtung zugänglich sind, eine besondere, wenigstens scheinbare Wechselwirkung, welche, rein äufserlich betrachtet, im folgenden besteht. Nehmen wir an, wir hätten zwei Massen m und m_1, deren Dimensionen bei vollkommen beliebiger Form aufserordentlich klein sind im Vergleiche zu ihrem beiderseitigen Abstande r. Die unmittelbare Beobachtung lehrt, dafs die Anwesenheit jeder dieser Massen das Auftreten einer besonderen Kraft nach sich zieht, die auf die andere Masse einwirkt. Beide Kräfte, von denen die eine auf m, die andere auf m_1 wirkt, sind einander gleich. Wir wollen sie mit f bezeichnen.

Der Gröfse nach sind die Kräfte f dem Produkte der Massen m und m_1 direkt proportional und indirekt proportional dem Quadrate ihres gegenseitigen Abstandes. Ihr Zahlenwert wird durch die Formel

$$f = C \frac{m m_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist, bestimmt.

Die Richtung der beiden Kräfte f fällt mit der Richtung der Geraden r zusammen, dabei ist die auf m wirkende Kraft nach m_1, die auf m_1 wirkende Kraft nach m gerichtet. Hieraus folgt, dafs die Kräfte f Zentralkräfte (vergl. S. 110) sind.

Die Kraft f heifst die allgemeine Schwere oder Gravitation.

Ist die Masse m frei, so erteilt die Anwesenheit der Masse m_1 ihr eine gewisse Beschleunigung w:

$$w = C\frac{m_1}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

die nach m_1 gerichtet ist; ebenso tritt in der Bewegung von m_1, wenn diese Masse frei ist, eine Beschleunigung

$$w_1 = C\frac{m}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

auf, die nach m gerichtet ist. Aus (2) und (3) ergiebt sich

$$\frac{w}{w_1} = \frac{m_1}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

d. h. die Beschleunigungen, welche zwei Körper infolge der zwischen ihnen wirksamen allgemeinen Schwere erhalten, sind indirekt proportional ihren Massen. Sind die Massen nicht frei, so übt jede von ihnen einen Druck gleich f auf dasjenige Hindernis aus, welches ihr nicht erlaubt, sich mit der in Formel (2) und (3) gegebenen Beschleunigung zu bewegen.

Da die auf die Massen m und m_1 wirkenden Kräfte f erstere einander zu nähern suchen, so stellt sich die Erscheinung rein äufserlich betrachtet in der Weise dar, als wenn von jeder Masse eine Kraft ausginge, welche auf die andere Masse einwirkt. Man pflegt dies durch die Worte „die Körper ziehen einander an“ auszudrücken. Man hat indessen wohl zu beachten, dafs durch diesen Ausdruck die Erscheinung blofs kurz und passend beschrieben wird, keineswegs aber hat man ihn im buchstäblichen Sinne des Wortes aufzufassen, gleich als ob die Masse etwas Aktives darstellt, das unmittelbar auf die Masse m_1 einwirkt und mit der Kraft f zu sich heranzieht. In Wirklichkeit können wir blofs sagen: das Vorhandensein der Masse m im Abstande r bedingt das Auftreten einer Kraft f, welche auf m_1 wirkt. Wir werden übrigens im § 4 auf diese Frage zurückkommen.

Der Kürze halber werden wir im folgenden von einer Wechselwirkung der Massen, von Kräften, welche von irgend welchen Massen ausgehen u. s. w., reden. Eine derartige Terminologie und die auf derselben basierenden Schlufsfolgerungen können nicht zu irrtümlichen Resultaten führen, da die Erscheinungen genau in der Weise erfolgen, als ob in der That direkte Wechselwirkungen der Massen und von den Massen ausgehende Kräfte existieren würden.

Da alle Körper in der Welt „sich anziehen“, so wird die Kraft der Schwere, unter deren Einflufs sich einer von ihnen befindet, erhalten, wenn man die Resultante aller auf ihn wirkenden Gravitationskräfte bestimmt.

Die gegenseitige Anziehung zweier Körper, deren Dimensionen nicht sehr klein gegen ihre Entfernung sind, wird folgendermafsen erhalten. Man denkt sich jeden der beiden Körper in eine unendlich grofse Zahl unendlich kleiner Teile geteilt; bezeichnen wir deren Massen für den einen Körper mit μ, für den anderen mit μ_1. Zwischen jedem Massenpaar μ und μ_1 wirke eine Kraft $f = C\frac{\mu\mu_1}{r^2}$, wo r ihr Abstand ist. Alle die Kräfte f, welche auf jeden der beiden Körper einwirken, hat man schliefslich zu summieren.

Die allgemeine Schwere bestimmt die Bewegung der Himmelskörper. Sie tritt auch zwischen der Erde und den nahe ihrer Oberfläche befindlichen Körpern auf — in diesem Falle heifst sie einfach Schwerkraft (Erdschwere) oder Gewicht. Endlich kann man zeigen, dafs sie auch zwischen den Körpern, die an der Erdoberfläche unserer Beobachtung unterworfen werden können, wirksam ist.

Im folgenden (§ 5) wird bewiesen werden, dafs eine massive, homogene Kugel oder auch eine inhomogene, aus konzentrischen homogenen Schichten bestehende Kugel einen jeden aufserhalb derselben befindlichen Körper mit einer Kraft anzieht, die nach Formel (1) gefunden werden kann, falls man annimmt, dafs die ganze Masse der Kugel in ihrem Zentrum vereinigt sei. In erster Annäherung kann man die Erde für eine derartige Kugel ansehen.

Bezeichnet M die Masse, R den Radius, δ die mittlere Dichte der Erdkugel, so ist

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Kraft f, mit welcher die Erde einen Körper, dessen Masse m ist, aus einer Entfernung r vom Zentrum anzieht, ist gleich

$$f = C\frac{Mm}{r^2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Beschleunigung w der Bewegung unserer Masse m ist gleich

$$w = C\frac{M}{r^2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Formel (7) lehrt, dafs alle Körper, die von der Erdkugel gleichen Abstand haben, unter der Einwirkung ihrer Anziehung die gleiche Beschleunigung erfahren. Die Beschleunigung hängt nicht vom angezogenen Körper, sondern nur von der Masse des anziehenden Körpers und dem beiderseitigen Abstand beider Körper ab.

Bezeichnen wir mit g den speziellen Wert von w, der an der Erdoberfläche selbst gilt; es ist das die sog. Beschleunigung für den freien Fall; die Formeln (7) und (5) geben dann

$$g = C\frac{M}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\delta CR \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Alle Körper fallen auf der Erde mit derselben Beschleunigung. Das allgemeine Gravitationsgesetz wurde von Newton ausgesprochen; er hat es in seinem Werke „Philosophiae naturalis principia mathematica" veröffentlicht, welches Werk 1687 in London erschien und aller Wahrscheinlichkeit nach in den Jahren 1684 und 1685 verfafst worden ist; man nennt daher dieses Gesetz auch das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Newton nahm an, dafs es ihrem Ursprunge nach ein und dieselbe Kraft sei, welche die Körper an der Erdoberfläche mit einer Beschleunigung g zu fallen veranlafst und den Mond in seiner Bahn um die Erde mit einer Beschleunigung w zu kreisen zwingt. Ferner nahm er an, dafs die Beschleunigung indirekt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Zentrum der Erde sei und prüfte nun die aus diesen Voraussetzungen hervorgehende Gleichung, nämlich, s. (7) und (8),

$$\frac{g}{w} = \frac{r^2}{R^2},$$

wo r der mittlere Abstand des Mondes vom Erdzentrum ist. Setzt man $r = 60\,R$, so kommt

$$g = 3600\,w. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nimmt man in erster Annäherung an, dafs sich der Mond gleichförmig in einem Kreise mit der Geschwindigkeit v bewegt, so kommt nach (30) auf Seite 68 $w = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$, wo T die Zeit eines vollen Umlaufes des Mondes um die Erde ist.

Wählt man als Einheit der Zeit die Sekunde, als Längeneinheit das Meter und setzt $T = 27$ Tagen 7 Stunden 43 Minuten $=$ 39 343 . 60 Sekunden, $r = 60\,R = 60 \times 6\,300\,000$ Metern [1]), so kommt für die Geschwindigkeit $v = 1020$ m pro Sekunde, für die Beschleunigung des Mondes $w = 0{,}00271$, wobei als Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung einer solchen Bewegung gilt, bei welcher die Geschwindigkeit sich in jeder Sekunde um einen Meter pro Sekunde vermehrt. Setzt man dies in (9) ein, so kommt $g = 0{,}00271 \times 3600 = 9{,}76$. Die genügende Übereinstimmung dieser Zahl, die durch angenäherte Rechnung gefunden worden war, mit den Zahlen, welche

[1]) Der Umfang $2\pi R$ eines gröfsten Kreises auf der Erde wird hier gleich 40 000 000 m angenommen, woraus $R = 6\,360\,000$ m folgt.

sich aus unmittelbaren Beobachtungen an der Erdoberfläche ergeben, dient als Beweis für die Richtigkeit der Grundvorstellungen und der Form des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

Man kann obiges Gesetz auch aus dem dritten Keplerschen Gesetze ableiten: die Quadrate der Umlaufszeiten (T_1 und T_2) zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen (r_1 und r_2) von der Sonne:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \text{(10)}$$

Nimmt man an, dafs sich die Planeten gleichförmig in Kreisen bewegen, und bezeichnet man ihre Geschwindigkeit mit v_1 und v_2, ihre normalen Beschleunigungen mit w_1 und w_2, so erhält man

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}; \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}; \quad w_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2};$$

$$w_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

und mit Hülfe von (10) ergiebt sich

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

d. h. die Beschleunigungen der Planetenbewegungen sind indirekt proportional den Quadraten der Planetenabstände von der Sonne. Das letztere ist nichts anderes als das Newtonsche Gesetz.

§ 2. Der Proportionalitätsfaktor in der Newtonschen Gravitationsformel. In Formel (1) kommt ein Proportionalitätsfaktor C vor; der Zahlenwert eines solchen hängt bekanntlich von der Wahl derjenigen Einheiten ab, durch welche die in der Formel (1) vorkommenden Gröfsen gemessen werden. Es sind das folgende drei verschiedenartige Gröfsen: die Masse, die Länge (durch deren Einheit r gemessen wird) und die Kraft. Nehmen wir an, wir hätten eine bestimmte Wahl derselben getroffen; der Zahlenwert von C wird dann am einfachsten auf folgende Weise bestimmt.

Formel (1) giebt für

$$\left.\begin{aligned} m = m_1 &= 1 \\ r &= 1 \end{aligned}\right| \cdots f = C \quad \text{(11)}$$

Danach ist C gleich dem Zahlenwerte der Kraft, mit welcher sich zwei Einheitsmassen anziehen, die voneinander um die Längeneinheit abstehen. Die Massen müssen wir uns in Gestalt zweier homogener Kugeln mit dem gegebenen Abstand denken oder uns vorstellen, dafs sie gewissermafsen in zwei Punkten konzentriert sind.

Bei der Wahl der Einheiten für die Gröfsen m, r und f kann man auf dreierlei Weise verfahren. Entweder kann man sie vollkommen willkürlich wählen, ohne dafs sie voneinander abhängen, oder man kann m, r und f durch absolute Einheiten messen, oder man kann schliefslich eine derartige Auswahl treffen, dafs der Koeffizient C gleich Eins wird. Beginnen wir mit der letzten Methode, d. h. setzen wir $C = 1$, also

$$f = \frac{m m_1}{r_2} \quad \text{. . . . . (12)}$$

Es ist hierbei von gröfster Wichtigkeit, dessen eingedenk zu bleiben, dafs wir es, bei Benutzung von (12) für die Newtonsche Gravitationsformel nicht etwa mit absoluten Einheiten zu thun haben, sondern eine ganz besondere und eigenartige Krafteinheit einführen. Setzt man nämlich in (12) $m = m_1 = 1$ und $r = 1$, so erhalten wir für die Kraft den Wert $f = 1$. Wählt man also die Einheiten der Masse und Länge willkürlich, so mufs man als Einheit der Kraft diejenige Kraft gelten lassen, mit welcher sich zwei der gewählten Masseneinheiten anziehen, falls sie voneinander um die gewählte Längeneinheit abstehen.

Diese Krafteinheit hat mit der absoluten Krafteinheit nichts zu thun; letztere erteilt (vergl. S. 77) der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung. Unsere neue Krafteinheit wollen wir als astronomische Krafteinheit bezeichnen.

Interessant ist es, die astronomische mit derjenigen absoluten Krafteinheit zu vergleichen, bei welcher die Grundeinheiten der Masse und Länge Gramm und Centimeter sind. In diesem Falle ist die absolute Krafteinheit die Dyne (wenn gleichzeitig die Sekunde als Zeiteinheit gilt); die astronomische Krafteinheit dagegen ist, wie aus (11) hervorgeht, das in Formel (1) enthaltene C. Unsere Aufgabe kommt somit darauf hinaus, die Kraft C in Dynen auszudrücken. Zu diesem Zwecke wollen wir ein und dieselbe Kraft, nämlich das Gewicht p der Grammasse, an der Erdoberfläche zuerst in Dynen und sodann in astronomischen Einheiten C ausdrücken.

Auf S. 81 hatten wir gefunden, dafs das Gewicht p (die französische, „Gramm" genannte Gewichtseinheit) gleich ist (vergl. S. 90.)

$$p = 981 \text{ Dynen} \quad \text{. . . . . . . (13)}$$

Andererseits ist p gleich derjenigen Kraft, mit welcher sich die Erde, deren Masse gleich $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ (wo R der Radius und δ die mittlere Dichte der Erde sind) ist und die Masse eines Gramm, $m = 1$, gegenseitig anziehen. Somit ergiebt Formel (1)

$$p = C \frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3} \pi R \delta C = \frac{2}{3} \delta . 2 \pi R C \cdot \quad \text{. . (14)}$$

Es ist $2\pi R = 40\,000\,000$ Metern $= 4{,}10^9$ Centimetern; als mittlere Erddichte möge die Zahl $\delta = 5{,}51$ gelten. Vergleicht man (13) mit (14), so erhält man nach dem C. G. S.-System, wenn man den Faktor C als Kraft betrachtet (streng genommen ist er nur numerisch einer Kraft gleich)

$$C = \frac{3 \times 981}{2 \,.\, \delta \,.\, 2\pi R}\ \text{Dyn.} = \frac{3 \times 981}{2 \times 5{,}51 \times 4 \times 10^9}\ \text{Dyn.}$$

oder

$$C = \frac{1}{14\,950\,000}\ \text{Dyne} \qquad (15)$$

Nimmt man also Gramm, Centimeter und Sekunde als Einheiten für Masse, Länge und Zeit an, so ist die astronomische Krafteinheit etwa 15 Millionen mal kleiner als die absolute Krafteinheit. Mit anderen Worten heifst das: ein Gramm zieht ein anderes auf ein Centimeter Entfernung mit einer Kraft an, die nur gleich dem 15 millionten Teil einer Dyne oder etwa gleich dem ebensovielten Teile eines Milligramms ist.

§ 3. Negative Dichte. Die Einführung des Begriffs der negativen Dichte ist in der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität äusserst wichtig, ja sogar notwendig; doch auch in der Lehre von der allgemeinen Gravitation ist sie von Nutzen. Die Vorstellung von Massen mit negativer Dichte ist eine Fiktion; solche Massen giebt es in der Natur nicht. Für gewöhnlich bezeichnet man sie als „negative Massen“ und obgleich dieser Ausdruck nicht glücklich gewählt ist, so wollen wir doch an ihm der Kürze halber festhalten.

Als negative Massen wollen wir also derartige fingierte Massen bezeichnen, deren Wirkung unter sonst gleichen Bedingungen der Wirkung positiver Massen entgegengesetzt ist. Wenn eine positive und eine negative Masse unter gleichen Verhältnissen Wirkungen hervorbringen, die der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, so sagen wir, die Massen seien ihrer Menge nach gleich. Nehmen wir z. B. an, die Masse m ziehe die Masse m_1 mit der Kraft f an; dann wird die fingierte Masse $-m$ an die Stelle von m gebracht, die Masse m_1 mit der Kraft f abstossen. Läfst man auch hier die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gelten, so mufs man voraussetzen, dafs auch Masse m_1 die Masse $-m$ abstösst; endlich mufs man der Konsequenz halber auch annehmen, dafs eine Masse $-m_1$, an die Stelle von m_1 gebracht, die Masse $-m$ anzieht.

Wir wollen in diesem Abschnitte der Bequemlichkeit halber annehmen, dafs Massen mit gleichem Vorzeichen sich anziehen, solche mit entgegengesetztem Vorzeichen dagegen sich abstossen. Dabei ist es einfacher, die negativen Massen nicht etwa durch negative Zahlen zu kennzeichnen, sondern blofs symbolisch durch einen Buchstaben

(z. B. m), sowohl die positiven als auch die negativen, indem man sich denkt, der Buchstabe selbst habe das Vorzeichen. Läfst man gleichzeitig gelten, die **anziehenden** Kräfte seien **positiv**, die abstofsenden negativ, so werden alle Fälle der Wechselwirkung zweier Massen durch die allgemeine Formel

$$f = \frac{m m_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

umfafst.

Haben m und m_1 gleiches Vorzeichen (beide + oder beide —), so ist f positiv, d. h. die Massen ziehen sich an; haben dagegen m und m_1 ungleiche Vorzeichen (eines +, das andere —), so ist f negativ, entsprechend der Abstossung.

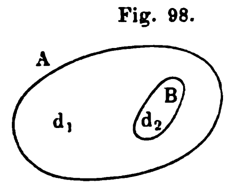
Um gewisse Aufgaben einfacher lösen zu können, führt man den Begriff der Dichte d negativer, natürlich blofs fingierter Massen ein, indem man für sie die Beziehung $m = vd$ gelten läfst, wo v der Zahlenwert des Volumens ist. Man setzt fest, negative Massen besäfsen auch eine negative Dichte und stellt sich vor, die von ihnen hervorgerufenen Kräfte hätten eine entgegengesetzte Richtung wie die von Massen mit positiver Dichte hervorgerufenen.

Bisweilen ist es vorteilhaft, sich die gegebene Dichte aus zwei Teilen d_1 und d_2 bestehend zu denken, derart, dafs $d = d_1 + d_2$ ist. Anstatt eines Körpers denkt man sich dann im gegebenen Volumen **gleichzeitig** zwei Körper vorhanden, deren Dichte d_1 und d_2 ist.

Bezieht man obiges auch auf Körper mit negativer Dichte, so kann man die gleichzeitige Existenz zweier Körper von ungleichnamiger Dichte $+ d_1$ und $- d_2$ in ein und demselben Raume annehmen, was dasselbe bedeutet, als ob sich in diesem Raume nur ein Körper von der Dichte $d = d_1 - d_2$ befinde. Ist $d_1 = d_2$, so ist $d = 0$. Statt der Abwesenheit von Massen in einem gegebenen Raume kann man sich also auch das Vorhandensein zweier Massen denken, deren Dichten der Gröfse nach gleich, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Die Einführung von negativen Massen ist bei Lösung vieler Aufgaben über die Anziehung der Körper von nicht geringem Nutzen. Nehmen wir an, wir hätten das Problem der Anziehung des Punktes M durch die homogenen Körper A und B (Fig. 98) gelöst. In diesem Falle läfst sich die Anziehung des Punktes M durch einen Körper A bestimmen, welcher überall die Dichte d_1 hat, mit Ausnahme des Theiles B, der eine andere Dichte d_2 besitzt. Die Gesamtwirkung des ganzen nicht homogenen Körpers besteht nämlich offenbar aus der Summe der Wirkungen zweier homogener Körper, des Körpers A, dessen Dichte d_1 und des Körpers B, dessen Dichte $d = d_2 - d_1$ ist. Falls $d_2 = 0$ ist (sich also inner-

Fig. 98.



Es ist $2\pi R = 40\,000\,000$ Metern $= 4{,}10^9$ Centimetern; als mittlere Erddichte möge die Zahl $\delta = 5{,}51$ gelten. Vergleicht man (13) mit (14), so erhält man nach dem C. G. S.-System, wenn man den Faktor C als Kraft betrachtet (streng genommen ist er nur numerisch einer Kraft gleich)

$$C = \frac{3 \times 981}{2 . \delta . 2\pi R} \text{ Dyn.} = \frac{3 \times 981}{2 \times 5{,}51 \times 4 \times 10^9} \text{ Dyn.}$$

oder

$$C = \frac{1}{14\,950\,000} \text{ Dyne} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Nimmt man also Gramm, Centimeter und Sekunde als Einheiten für Masse, Länge und Zeit an, so ist die astronomische Krafteinheit etwa 15 Millionen mal kleiner als die absolute Krafteinheit. Mit anderen Worten heifst das: ein Gramm zieht ein anderes auf ein Centimeter Entfernung mit einer Kraft an, die nur gleich dem 15 millionten Teil einer Dyne oder etwa gleich dem ebensovielten Teile eines Milligramms ist.

§ 3. **Negative Dichte.** Die Einführung des Begriffs der negativen Dichte ist in der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität äusserst wichtig, ja sogar notwendig; doch auch in der Lehre von der allgemeinen Gravitation ist sie von Nutzen. Die Vorstellung von Massen mit negativer Dichte ist eine Fiktion; solche Massen giebt es in der Natur nicht. Für gewöhnlich bezeichnet man sie als „negative Massen“ und obgleich dieser Ausdruck nicht glücklich gewählt ist, so wollen wir doch an ihm der Kürze halber festhalten.

Als negative Massen wollen wir also derartige fingierte Massen bezeichnen, deren Wirkung unter sonst gleichen Bedingungen der Wirkung positiver Massen entgegengesetzt ist. Wenn eine positive und eine negative Masse unter gleichen Verhältnissen Wirkungen hervorbringen, die der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, so sagen wir, die Massen seien ihrer Menge nach gleich. Nehmen wir z. B. an, die Masse m ziehe die Masse m_1 mit der Kraft f an; dann wird die fingierte Masse $-m$ an die Stelle von m gebracht, die Masse m_1 mit der Kraft f abstossen. Läfst man auch hier die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gelten, so mufs man voraussetzen, dafs auch Masse m_1 die Masse $-m$ abstösst; endlich mufs man der Konsequenz halber auch annehmen, dafs eine Masse $-m_1$, an die Stelle von m_1 gebracht, die Masse $-m$ anzieht.

Wir wollen in diesem Abschnitte der Bequemlichkeit halber annehmen, dafs Massen mit gleichem Vorzeichen sich anziehen, solche mit entgegengesetztem Vorzeichen dagegen sich abstossen. Dabei ist es einfacher, die negativen Massen nicht etwa durch negative Zahlen zu kennzeichnen, sondern blofs symbolisch durch einen Buchstaben

(z. B. m), sowohl die positiven als auch die negativen, indem man sich denkt, der Buchstabe selbst habe das Vorzeichen. Läfst man gleichzeitig gelten, die anziehenden Kräfte seien positiv, die abstofsenden negativ, so werden alle Fälle der Wechselwirkung zweier Massen durch die allgemeine Formel

$$f = \frac{m m_1}{r^2} \quad \text{. . . . . (16)}$$

umfafst.

Haben m und m_1 gleiches Vorzeichen (beide $+$ oder beide $-$), so ist f positiv, d. h. die Massen ziehen sich an; haben dagegen m und m_1 ungleiche Vorzeichen (eines $+$, das andere $-$), so ist f negativ, entsprechend der Abstossung.

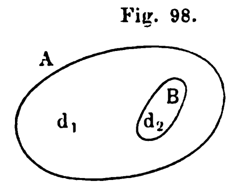
Um gewisse Aufgaben einfacher lösen zu können, führt man den Begriff der Dichte d negativer, natürlich blofs fingierter Massen ein, indem man für sie die Beziehung $m = vd$ gelten läfst, wo v der Zahlenwert des Volumens ist. Man setzt fest, negative Massen besäfsen auch eine negative Dichte und stellt sich vor, die von ihnen hervorgerufenen Kräfte hätten eine entgegengesetzte Richtung wie die von Massen mit positiver Dichte hervorgerufenen.

Bisweilen ist es vorteilhaft, sich die gegebene Dichte aus zwei Teilen d_1 und d_2 bestehend zu denken, derart, dafs $d = d_1 + d_2$ ist. Anstatt eines Körpers denkt man sich dann im gegebenen Volumen gleichzeitig zwei Körper vorhanden, deren Dichte d_1 und d_2 ist.

Bezieht man obiges auch auf Körper mit negativer Dichte, so kann man die gleichzeitige Existenz zweier Körper von ungleichnamiger Dichte $+ d_1$ und $- d_2$ in ein und demselben Raume annehmen, was dasselbe bedeutet, als ob sich in diesem Raume nur ein Körper von der Dichte $d = d_1 - d_2$ befinde. Ist $d_1 = d_2$, so ist $d = 0$. Statt der Abwesenheit von Massen in einem gegebenen Raume kann man sich also auch das Vorhandensein zweier Massen denken, deren Dichten der Gröfse nach gleich, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Die Einführung von negativen Massen ist bei Lösung vieler Aufgaben über die Anziehung der Körper von nicht geringem Nutzen. Nehmen wir an, wir hätten das Problem der Anziehung des Punktes M durch die homogenen Körper A und B (Fig. 98) gelöst, In diesem Falle läfst sich die Anziehung des Punktes M durch einen Körper A bestimmen, welcher überall die Dichte d_1 hat, mit Ausnahme des Theiles B, der eine andere Dichte d_2 besitzt. Die Gesamtwirkung des ganzen nicht homogenen Körpers besteht nämlich offenbar aus der Summe der Wirkungen zweier homogener Körper, des Körpers A, dessen Dichte d_1 und des Körpers B, dessen Dichte $d = d_2 - d_1$ ist. Falls $d_2 = 0$ ist (sich also inner-

Fig. 98.



halb A ein Hohlraum vorfindet), erhält man $d = - d_1$. Danach hat man zur Anziehung des massiv gedachten Körpers A die Abstossung von B hinzuzufügen, um die wahre Wirkung des Körpers A, der einen Hohlraum hat, zu erhalten.

§ 4. Actio in distans (Fernewirkung). Der Ausdruck „Fernewirkung" — Actio in distans — steht mit einer physikalischen Lehre im Zusammenhang, die einst allgemeine Geltung hatte, und einen schädlichen Einflufs ausgeübt, vielleicht sogar auf die Entwicklung der Physik hemmend eingewirkt hat.

Diese Lehre beruhte darauf, dafs man die Möglichkeit zugab, ein Etwas (A) könne auf ein anderes Etwas (B), das sich von ihm in einer jede Berührung ausschliefsenden Entfernung befinde, unmittelbar einwirken.

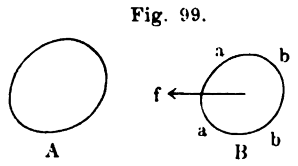
Die Entstehung dieser Lehre war folgende. Newton hatte entdeckt, dafs die Bewegungen, sowohl der Himmelskörper als auch der an der Erdoberfläche niederfallenden Körper derart vor sich gehen, als ob sich alle Körper mit einer Kraft anziehen, deren Gröfse nach Formel (1) oder (12) bestimmt wird. Die Frage nach der Ursache für das Auftreten einer solchen Kraft hatte er jedoch nicht berührt, ja sogar jeglichen Versuch hierzu durch seine Worte „hypotheses non fingo" abgelehnt. Niemals und nirgends aber hatte er sich für die Möglichkeit einer actio in distans ausgesprochen, noch auch behauptet, dafs ein Körper A einen anderen Körper B unmittelbar an sich heranziehe, also dort eine Wirkung ausübe, wo er sich selbst nicht befindet. Indem Newton somit die Frage nach dem Mechanismus, der die allgemeine Gravitation zu stande bringt, unberührt liefs, verlieh er dem von ihm entdeckten Gesetze einen rein beschreibenden Charakter, so dafs man das Gesetz im Sinne Newtons etwa wie folgt zu formulieren hätte: die Bewegungen der Körper im Weltenraume sowohl als der an der Erdoberfläche fallenden, gehen derart vor sich, wie dies geschehen müfste, wenn sie sich gegenseitig anziehen würden. Cotes, ein Schüler Newtons, ist der erste gewesen, der den Gedanken einer „actio in distans", nach welcher sich die Körper unvermittelt anziehen, im Vorworte zur zweiten Auflage der „Principia", welches Newton vor dem Drucke nicht gelesen, klar ausgesprochen hat. Mochte man nun einerseits glauben, der im Vorworte zu seinem Werke ausgesprochene Gedanke werde von Newton gutgeheifsen, mochte andererseits die grofsartige Entwicklung der Himmelsmechanik, die auf dem keiner Erklärung bedürftigen, faktisch richtigen Gravitationsgesetze beruht, es bewirken, — kurz, es wurde vergessen, dafs man in Newtons Gesetz nur eine Beschreibung vor sich habe; es wurde in demselben der endgültige Ausdruck eines in Wirklichkeit sich abspielenden physikalischen Prozesses erblickt.

Die Idee von einer Fernewirkung, die im 18. Jahrhundert unbeschränkte Herrschaft führte, erstarkte und erhielt neue Nahrung, als Coulombs Versuche gegen Ende desselben Jahrhunderts zeigten, daſs auch die magnetischen und elektrischen Kräfte auf die Wechselwirkung besonderer hypothetischer Stoffe (zweier Magnetismen und zweier Elektricitäten) zurückgeführt werden können, die unmittelbar in die Ferne nach Gesetzen, welche dem Newtonschen vollkommen analog sind, wirken.

Noch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts herrschte die „actio in distans" uneingeschränkt in der Wissenschaft. Faraday, einer der gröſsten Experimentatoren, zugleich aber auch um die Philosophie der Physik hochverdient, wies als erster auf die Unmöglichkeit der Annahme hin, daſs ein Körper unmittelbar Kräfte und Bewegungen dort hervorrufen könne, wo er sich selbst nicht befindet. Ohne auf die Frage nach der Gravitation näher einzugehen, wandte er sich besonders den magnetischen und elektrischen Erscheinungen zu und wies darauf hin, daſs bei diesen Erscheinungen das Zwischenmedium, das den Raum zwischen den sich scheinbar unmittelbar beeinflussenden Körpern erfüllt, die Hauptrolle spiele. Es ist hier nicht der Ort, sich über die weitere Geschichte dieser Frage zu verbreiten; wir werden uns mit derselben später bekannt machen. Es möge hier der Hinweis genügen, daſs die Versuche des jungen, vorzeitig dahingegangenen deutschen Forschers H. Hertz die Richtigkeit der Faradayschen Grundideen über die Bedeutung des Zwischenmediums für die magnetischen und elektrischen Erscheinungen dargethan und für alle Zeit den Gedanken an eine actio in distans aus der Lehre von diesen Erscheinungen verbannt haben.

Gegenwärtig ist man allgemein zur Überzeugung gelangt, daſs eine actio in distans bei keiner physikalischen Erscheinung zugegeben werden darf. Wie sie jedoch aus der Lehre von der allgemeinen Gravitation zu bannen sei, ist eine bis jetzt noch ungelöste Frage, obgleich nach dieser Richtung unzählige verschiedenartige Versuche von Gelehrten angestellt worden sind, die danach gestrebt haben, eine „mechanische" Erklärung der allgemeinen Gravitation zu finden. Die Hauptrolle bei allen diesen Erklärungen spielt die Annahme eines besonderen, den Weltraum erfüllenden Mediums, dessen Wirkungen die durch Formel (2) ausgedrückte Beschleunigung bedingen. Wir wollen auf dies Gebiet, das vorläufig der reinen Spekulation angehört, nicht näher eingehen, uns aber dennoch einen flüchtigen Hinweis gestatten. Wir wissen, daſs, wenn ein Körper A (Fig. 99) vorhanden ist, auf den Körper B eine Kraft f in der Richtung nach A hinwirkt. Man kann sich nun eine derartige Kraft auf zweierlei Art wirkend denken: entweder als Zug, der auf B von der

Fig. 99.



Seite *aa* aus (als solch eine Zugkraft hat man sich die actio in distans gedacht) oder als Druck, der auf *B* von der Seite *bb* aus wirkt.

Man hat nun versucht, einen solchen Druck auf das Vorhandensein des Körpers *A* zurückzuführen. Zu dem Zwecke hat man angenommen, die Teilchen des Zwischenmediums befinden sich in fortwährender Bewegung nach allen Richtungen und stossen daher von allen Seiten her auf jeden Körper. Die Anwesenheit des Körpers *A* beschirmt dann gewissermafsen den Körper *B* vor den von links erfolgenden Stöfsen. Die Zahl der Stöfse, die auf *B* von rechts her erfolgt, ist somit gröfser als die von links her und dieser Überschufs an Stöfsen soll die Ursache für das Auftreten der Kraft *f* bilden (vergl. Isenkrahe, Rätsel der Schwerkraft, 1879).

Indem wir jüngere Leser davor warnen, sich frühzeitig mit ähnlichen Spekulationen zu beschäftigen, wollen wir zunächst bemerken, dafs nichts darüber bekannt ist, was für ein Zwischenmedium hier gemeint ist, — ist es etwa der Aether, von welchem bereits öfters die Rede war, oder ist es ein besonderes, die Gravitation verursachendes? Eine unüberwindliche Schwierigkeit bereitet hier ferner das Faktum, dafs die innerhalb des anziehenden Körpers vorhandenen Teilchen eine ebensolche Wirkung auf aufserhalb gelegene Massen ausüben, wie die an seiner Oberfläche befindlichen, und dafs die Materie selbst gewissermafsen absolut durchläfsig für die allgemeine Anziehungskraft der Körper ist. — Eine Übersicht über die „Erklärungsversuche" der Gravitation und die hierher gehörige Litteratur findet man in dem Artikel „Über Fernwirkungen" von Drude in der Beilage zu W. A. 62, 1897 (p. I—XLIX).

Vielleicht wird es niemals gelingen, die Frage nach dem Zustandekommen der allgemeinen Gravitation zu lösen; des ungeachtet darf man nicht vergessen, dafs die Lehre von einer actio in distans nicht nur aus dem Gebiete der magnetischen und elektrischen Erscheinungen ausgewiesen ist, sondern auch bei Erklärung keiner einzigen Gruppe von physikalischen Erscheinungen in Anwendung kommen darf; die Lehre von der Fernewirkung ist eine einfache und bequeme Art einer Beschreibung der Erscheinungen: letztere erfolgen so, als ob eine Fernewirkung existierte.

Von einigen Seiten ist die Ansicht ausgesprochen worden, die Schwere sei eine Grundeigenschaft der Materie, die untrennbar mit ihr verbunden ist und eines der Kennzeichen ihrer Existenz bilde; eine Erklärung sei daher überhaupt unmöglich, dürfe mithin nicht gefordert werden. Die ganze Aufgabe sei mit Auffindung des Gravitationsgesetzes bereits endgültig gelöst. Mit einer solchen Auffassung kann man nicht einverstanden sein; wollte man sie in anderen Gebieten der Physik zur Geltung bringen, so würde diese ganze Wissenschaft damit aufgehoben und zerstört werden.

An dieser Stelle läfst sich etwas nachtragen, was im Vorhergehenden übergangen worden ist. Auf S. 20 war gesagt worden, man könne dem Äther ein Gewicht nur unter gewissen Einschränkungen zusprechen. Nach dem unmittelbar Vorhergehenden ist es klar, worin diese Einschränkung besteht: läfst man gelten, dafs die Ursache der Schwere auf besonderen Eigenschaften des Äthers beruht, so ist natürlich an die Möglichkeit einer Wirkung der Schwere im Äther selbst wohl kaum zu denken, wie künstlich erdacht auch die betreffenden Bedingungen sein mögen, die man sich zu diesem Zweck konstruiert.

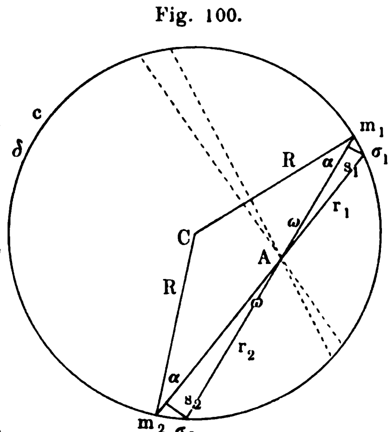
Auf S. 127 war der Gedanke ausgesprochen worden, dafs potentielle Energie vielleicht überhaupt nicht in der Welt existiere, sondern dafs in allen Fällen, wo die Fähigkeit eines Systems von Körpern eine gewisse Arbeit zu leisten nur durch deren gegenseitige Lage bedingt erscheint, wir es in der That mit kinetischer Energie eines uns noch unbekannten Stoffes zu thun haben. Wenn wir ein Gewicht heben, so verwenden wir einen Teil der in unseren Muskeln angesammelten Energie zur Leistung einer Arbeit, als deren Resultat, wie wir sagen, die potentielle Energie der sich anziehenden Körper, d. h. der Erdkugel und des gehobenen Gewichts, auftritt. Existiert indes eine actio in distans nicht, ist die Ursache für die scheinbare Anziehung in der Bewegung eines besonderen Mediums (eventuell des Äthers) zu suchen, so müssen wir als direktes Resultat der durch das Aufheben eines Gewichts geleisteten Arbeit eine Vergröfserung der kinetischen Energie dieses Mediums bezeichnen; fällt dagegen ein Körper, so geht die Energie des Mediums in Bewegungsenergie des fallenden Körpers über.

§ 5. Anziehung einer Kugelschale und einer Kugel auf einen Punkt. Es sei eine Kugelschale von sehr geringer Dicke c, der Dichte δ und dem Radius R gegeben; dann ist seine Gesamtmasse M gleich

$$M = 4\pi R^2 c\delta \quad . \quad . \quad (17)$$

In Fig. 100 ist die Dicke der Schale c überhaupt nicht angedeutet und ist dieselbe im Durchschnitt als Kreislinie gezeichnet.

Fig. 100.



Wir wollen nun bestimmen, mit welcher Kraft F_i die Kugelschale auf einen materiellen Punkt m (dessen Masse $= m$ ist) wirkt, der innerhalb derselben gelegen ist und mit welcher Kraft F_e sie auf einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt einwirkt.

Nehmen wir an, die Masse m befinde sich im Punkte A (Fig. 100). Konstruieren wir nach beiden Seiten den unendlich kleinen Raumwinkel ω; derselbe schneidet aus der Kugelschale zwei Flächenelemente σ_1 und σ_2 heraus, deren Massen $m_1 = \sigma_1 c\delta$ und $m_2 = \sigma_2 c\delta$ sind und welche die Masse m mit den Kräften f_1 und f_2 anziehen,

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{c\delta m \sigma_1}{r_1^2} \text{ und } f_2 = \frac{c\delta m \sigma_2}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

die nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind; r_1 und r_2 bedeuten hier die Entfernungen von A nach σ_1 resp. nach σ_2.

Beschreiben wir ferner um A als Mittelpunkt zwei Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2 und seien s_1 und s_2 die Flächenelemente, die aus ihnen durch den Raumwinkel ω herausgeschnitten sind. Offenbar ist

$$s_1 = r_1^2 \omega, \quad s_2 = r_2^2 \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Verbinden wir nun das Zentrum C mit σ_1 und σ_2, so erhalten wir eine Figur, die sich unendlich wenig von einem gleichschenkligen Dreieck unterscheidet; $\angle\, C m_1 A = \angle\, C m_2 A = \alpha$. Der Winkel zwischen σ_1 und s_1 ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen R und r_1, d. h. $\angle\,(\sigma_1, s_1) = \alpha$ und ebenso $\angle\,(\sigma_2, s_2) = \alpha$. Aber s_1 ist die Projektion des Elements σ_1 auf die Kugelfläche (mit dem Radius r_1), und daher ist $s_1 = \sigma_1 \cos(\sigma_1, s_1) = \sigma \cos\alpha$; hieraus folgt mit Rücksicht auf (19)

$$\sigma_1 = \frac{s_1}{\cos\alpha} = \frac{r_1^2 \omega}{\cos\alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{s_2}{\cos\alpha} = \frac{r_2^2 \omega}{\cos\alpha}.$$

Setzt man diese Werte in Formel (18) ein, so kommt

$$f_1 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}; \quad f_2 = \frac{c\delta\omega m}{\cos\alpha}.$$

Es ist also $f_1 = f_2$, d. h. die Elemente der Kugelschale, welche durch den Raumwinkel ω herausgeschnitten sind, ziehen die in A befindliche Masse m an mit Kräften, die an Gröfse gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind; ihre Resultante ist gleich Null. Legt man nun durch A als Scheitelpunkt nach allen möglichen Richtungen Raumwinkel, so kann man mit ihnen die ganze Kugelschale (siehe die punktiert gezeichneten Linien) in elementare Teile zerlegen, die paarweise einander gegenüberliegen und m mit gleicher Kraft anziehen. Die Kräfte, welche somit auf m wirken, heben sich paarweise auf, die ganze Kugelschale übt somit auf einen in ihrem Inneren gelegenen Punkt keinerlei Wirkung aus, d. h.

$$F_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Gehen wir jetzt auf die Wirkung einer Kugelschale auf eine Masse m über, die in einem aufserhalb der Schale gelegenen Punkte A

(Fig. 101) sich befindet. Der Abstand des Punktes A vom Kugelzentrum C sei gleich $CA = x$; R, c, δ und $M = 4\pi R^2 c\delta$ haben ihre frühere Bedeutung. Suchen wir zunächst auf CA einen solchen Punkt B, daſs der Radius Cg die mittlere Proportionale zwischen $CA = x$ und $CB = a$ darstellt, daſs also

Fig. 101.

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{x} \quad . \quad . \quad (21)$$

ist.

Durch B legen wir einen unendlich kleinen Raumwinkel ω, dessen Richtung in Fig. 101 eben nur angedeutet ist. Er schneidet aus der Oberfläche der Kugelschale zwei Flächenelemente σ_1 und σ_2 heraus, die sich bei den Punkten D und E befinden, aus der Schale selbst aber die Massen $m_1 = \sigma_1 c\delta$ und $m_2 = \sigma_2 c\delta$. Verbinden wir nun D und E mit C und A; sei ferner $\angle CDB = \angle CEB = \alpha$, $BD = p_1$, $BE = p_2$, $DA = r_1$ und $EA = r_2$. Endlich seien f_1 und f_2 die Kräfte, mit denen die in A befindliche Masse m von den Elementen m_1 und m_2 der Kugelschale angezogen wird. Wir erhalten

$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2} = \frac{\sigma_1 c\delta m}{r_1^2}; \quad f_2 = \frac{\sigma_2 c\delta m}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Um B beschreiben wir wieder mit den Radien p_1 und p_2 zwei Kugelflächen, die durch D und E gehen. Möge der Raumwinkel ω aus ihnen die Flächenelemente s_1 und s_2 herausschneiden. Wie schon früher, ist $s_1 = p_1^2\omega = \sigma_1 \cos\alpha$; $s_2 = p_2^2\omega = \sigma_2 \cos\alpha$. Setzt man die hieraus erhaltenen σ_1 und σ_2 in (22) ein, so erhält man

$$f_1 = \frac{c\delta m\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2; \quad f_2 = \frac{c\delta m\omega}{\cos\alpha}\left(\frac{p_2}{r_2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$\triangle DCB$ und $\triangle DCA$ sind einander ähnlich, denn Winkel C ist ihnen gemeinsam, die Seiten dieses Winkels aber stehen in Proportion; (21) giebt $CB : CD = CD : CA$.

Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt, daſs $\angle DAC = \angle CDB = \alpha$ und ferner, daſs $\frac{BD}{DA} = \frac{CD}{CA}$ oder $\frac{p_1}{r_1} = \frac{R}{x}$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ECB und ECA folgt, daſs $\angle CAE = \angle CEB = \alpha$ und $\frac{p_2}{r_2} = \frac{R}{x}$ ist. Setzt man die gefundenen Relationen in (23) ein, so ergiebt sich

$$f_1 = f_2 = \frac{c\delta m\omega R^2}{x^2 \cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Es sind also die Kräfte f_1 und f_2 einander gleich und bilden den gleichen Winkel α mit der Richtung von CA; ihre Resultante f ist nach dem Mittelpunkte gerichtet und ist gleich

$$f = 2 f_1 \cos\alpha = \frac{2\, c\, \delta\, m\, \omega\, R^2}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Legt man durch B unendlich viele Raumwinkel, so zerlegt man dadurch die Kugelschale in Elementenpaare, von denen jedes eine resultierende Kraft f, die nach dem Mittelpunkte gerichtet ist, giebt. Die gesuchte Kraft F_e, mit welcher die ganze Kugelschale auf die Masse m anziehend wirkt, erhält man durch einfache Summation der Kräfte f, d. h.

$$F_e = \sum f = \sum \frac{2\, c\, \delta\, m\, \omega\, R^2}{x^2} = \frac{2\, R^2\, c\, \delta\, m}{x^2} \sum \omega.$$

Die Summe der Raumwinkel ω, welche die ganze Kugelschale erfüllen, ist gleich 2π, da jeder von ihnen ein Doppelwinkel ist. Setzt man demgemäfs $\Sigma\omega = 2\pi$ und beachtet, dafs die ganze Masse M der Kugelschale gleich $4\pi R^2 c\,\delta$ ist, so kommt

$$F_e = \frac{M m}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Diese Formel lehrt uns, dafs die Wirkung einer dünnen Kugelschale auf einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt derart ist, als ob die ganze Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Eine homogene Kugelschale von endlicher Dicke kann man sich in eine unendliche Zahl konzentrischer, unendlich dünner Schalen zerlegt denken.

Wendet man sodann auf diese Schalen Formel (20) und (26) an, so sieht man, dafs auch eine Kugelschale von endlicher Dicke auf einen innerhalb desselben gelegenen Punkt keine Wirkung ausübt, auf einen aufserhalb gelegenen dagegen so wirkt, als ob ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Eine massive homogene Kugel kann ebenfalls in konzentrische Schalen zerlegt werden, daher ist auch ihre Wirkung auf einen aufserhalb gelegenen Punkt derart, als ob die Gesamtmasse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Wir haben von diesem Satze schon auf Seite 206 Gebrauch gemacht. Auf die Masse m, welche sich in der Entfernung x vom Kugelzentrum befindet, wirkt eine Kraft

$$F_e = \frac{M m}{x^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3 \delta m}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Befindet sich die Masse m an der Kugeloberfläche selbst, so ist die Kraft

$$F = \frac{M m}{R^2} = \frac{4}{3} \pi R \delta m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Wollen wir nunmehr die Kraft F_i bestimmen, mit welcher eine massive Kugel auf eine innerhalb derselben im Abstande $x < R$ vom Kugelzentrum befindliche Masse einwirkt. Denken wir uns eine mit der gegebenen Kugel konzentrische Kugelfläche konstruiert, deren Radius gleich x sei; dieselbe wird durch m gehen und die gegebene Kugel in zwei Stücke teilen: in eine Kugelschale, innerhalb deren m liegt, von welcher es also keine Wirkung erfährt und eine Kugel mit dem Radius x, an deren Oberfläche sich m befindet. Letztere Kugel zieht m nach ihrem Mittelpunkte mit einer Kraft, die erhalten wird, wenn man in (28) x an Stelle von R einsetzt. Wird x vom Zentrum nach m hin positiv gerechnet, so hat man den Ausdruck für die Kraft F_i mit einem Minuszeichen zu versehen, um dadurch anzudeuten, dafs dieselbe zum Zentrum hinwirkt, d. h. nach der negativen Seite hin:

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\delta x m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Hiernach ist die Anziehung einer massiven Kugel auf einen innerhalb derselben gelegenen Punkt proportional dem Abstande des letzteren vom Kugelzentrum und nach dem Zentrum gerichtet.

Formel (29) ist (20) auf Seite 136 analog, wo anstatt x die Gröfse s vorkommt. Sonach würde die Masse m, wenn sie sich in einer durchs Zentrum einer homogenen Kugel gehenden ganz engen Röhre frei bewegen könnte und nur der Anziehung dieser Kugel unterworfen wäre, eine harmonische Schwingungsbewegung ausführen. Vergleicht man Formel (29) mit der eben herangezogenen Formel (20), so darf man nicht etwa c gleich $\frac{4}{3}\pi\delta$ setzen, denn in Formel (20) ist die Kraft in absoluten, hier aber in astronomischen Einheiten ausgedrückt.

§ 6. Das homogene Kraftfeld. Denken wir uns eine homogene Kugel, deren Zentrum in A (Fig. 102) liegt und innerhalb derselben eine kugelförmige Höhlung mit dem Zentrum B und bestimmen wir die Kraft f, die auf eine in der Höhlung im Punkte M befindliche Masse m wirkt. Sei δ die Dichte der gröfseren Kugel. Eine Kugel, in welcher sich ein Hohlraum befindet, kann man durch zwei zusammengehörige Kugeln ersetzen: eine massive mit dem Zentrum A und der Dichte δ und eine andere, ebenfalls massive mit dem Zentrum B und der Dichte $-\delta$ (vergl. Fig. 98

Fig. 102.

und das auf Seite 211 Gesagte). Die erste dieser Kugeln zieht die Masse m mit der Kraft $f_2 = ME$ nach A hin an, welche Kraft nach (29) dem Abstande MA proportional ist. Man kann demnach $f_1 = K.MA$ setzen, wo K nur von der Dichte δ, nicht aber vom Kugelradius abhängt [vergl. (29)]. Die zweite Kugel stösst die Masse m mit der Kraft $f_2 = MD$ ab. Die Kraft f_2 ist nach B gerichtet und gleich $f_2 = K.MB$. Konstruiert man die Resultante f, so sieht man, dafs $\triangle CDM \sim \triangle AMB$ ist, denn es ist $\angle CDM = \angle AMB$ und ferner

$$\frac{MD}{CD} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{K.MB}{K.MA} = \frac{MB}{MA}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt, dafs $\angle DMC = \angle MBA$, folglich $MC = f$ und parallel zu BA ist. Dasselbe bezieht sich auf alle Punkte M der Höhlung. Ferner ist

$$\frac{MC}{AB} = \frac{MD}{MB}, \text{ d. h. } \frac{f}{a} = \frac{f_2}{MB} = \frac{K.MB}{MB} = K,$$

$$f = Ka \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Drückt man f in astronomischen Einheiten aus, so ist

$$K = \frac{4}{3}\pi\delta m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Formel (30) zeigt uns, dafs die Kraft f der Gröfse nach von der Lage des Punktes M innerhalb der Höhlung unabhängig ist.

Ein kugelförmiger Hohlraum im Inneren einer homogenen Kugel stellt ein homogenes Kraftfeld (Seite 97) dar, d. h. auf eine innerhalb desselben befindliche Masse m wirkt, einerlei welchen Punkt die Masse einnimmt, ein und dieselbe Kraft, die der Verbindungsgeraden des Kugel- und Hohlraumzentrums parallel und dem Abstande dieser Zentren voneinander proportional ist.

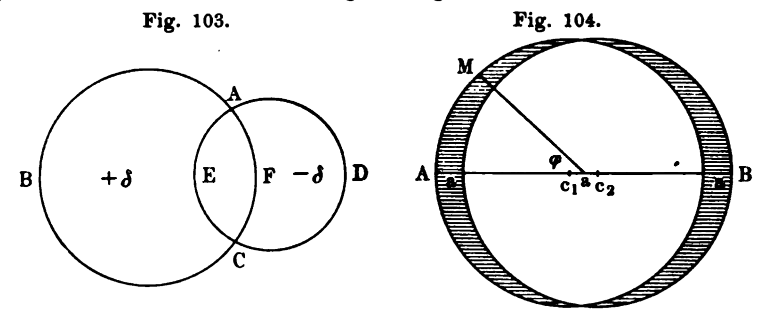
Die Intensität (Seite 97) dieses homogenen Kraftfeldes hängt von den Radien der Kugel und des kugelförmigen Hohlraumes nicht ab. Fallen die Zentren von Kugel und Hohlraum zusammen ($a = 0$), so wird die Intensität des Feldes gleich Null und wir haben den Fall einer homogenen Kugelschale, für welche, wie wir sahen, $F_i = 0$ ist.

Stellen wir uns zwei Kugeln $ABCFA$ (Fig. 103) mit der Dichte $+\delta$ und $AECDA$ mit der Dichte $-\delta$ vor; zusammengenommen bestehen sie aus der positiven Masse $ABCEA$, der negativen Masse $AFCDA$ und dem linsenförmigen Hohlraume $AECFA$. In derselben Weise wie vorhin finden wir, dafs dieser Hohlraum ein gleichförmiges Kraftfeld darstellt, dessen Intensität der Dichte δ und dem Abstande der Mittelpunkte beider Kugeln proportional ist.

Besonders wichtig ist, wie wir sehen werden, der Fall, wo die Radien beider Kugeln gleich und ihre Zentren c_1 und c_2 (Fig. 104)

einander aufserordentlich nahe sind. In diesem Falle ist das homogene Kraftfeld in einem fast kugelförmigen Raume enthalten, der von

Fig. 103. Fig. 104.



zwei gleichen Wülsten (in der Figur schraffiert) von positiver resp. negativer Masse umgeben ist. Setzt man $c_1 c_2 = a$, so ist, wie man leicht sieht, die Dicke c des Wulstes an einer beliebigen Stelle M angenähert gleich

$$c = a \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

wo φ der Winkel zwischen der durch die Zentren c_1 und c_2 gehenden Geraden AB und dem von c_1 oder c_2 (für ein sehr kleines $c_1 c_2 = a$ ist dies gleichgültig) nach M gezogenen Radius ist. Je kleiner $c_1 c_2 = a$ ist, desto genauer ist Formel (32).

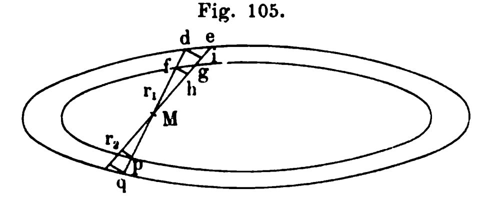
Mifst man die Kräfte in astronomischen Einheiten, d. h. geht man von Formel (12) auf Seite 209 aus, so wird die Intensität des Feldes $\psi = f : m$ gleich

$$\psi = \frac{4}{3} \pi \delta a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

wo a die gröfste Dicke der beiden Wülste ist.

§ 7. Spezieller Fall der Anziehung einer ellipsoidischen Schale auf einen Punkt. Stellen wir uns eine unendlich dünne homogene Schale (mit der Dichte δ) vor, welche von den Oberflächen

Fig. 105.



zweier ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsoide (Fig. 105) begrenzt ist. Es sind mithin die Achsen a, b, c resp. a_1, b_1, c_1 beider Ellipsoide einander proportional, also

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

In der analytischen Geometrie wird bewiesen, dafs, wenn man durch einen beliebigen Punkt M eine Gerade zieht, die zwischen beiden Ellipsoidflächen gelegenen Abschnitte derselben einander gleich sind, also $fd = pq = \alpha$ ist. In M befinde sich die Masse m; legen wir durch M als Scheitel einen unendlich kleinen Raumwinkel ω. Derselbe schneidet aus der Schale zwei Massen m_1 und m_2 heraus, welche die Masse m mit den Kräften f_1 resp. f_2 anziehen, wobei

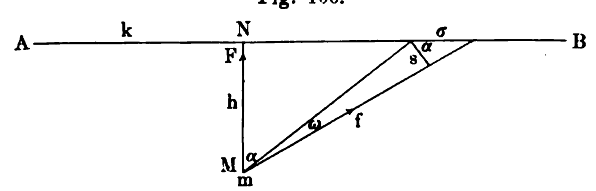
$$f_1 = \frac{m_1 m}{r_1^2}; \quad f_2 = \frac{m_2 m}{r_2^2} \quad \cdots \cdots \quad (35)$$

Legt man durch f und d Kugelflächen, deren Zentrum M ist, so schneidet unser Raumwinkel aus der von diesen Flächen begrenzten Kugelschale das Element $fdih$ heraus, dessen Volumen sich von demjenigen des Elementes $fdeg$ um eine im Vergleich zu den Elementen selbst verschwindende Gröfse unterscheidet. Man kann daher setzen $m_1 = \delta r_1^2 \omega \times fd = \delta r_1^2 \omega \alpha$; ebenso ist $m_2 = \delta r_2^2 \omega \alpha$. Setzt man diese Werte für m_1 und m_2 in Formel (35) ein, so kommt $f_1 = f_2$.

Hieraus ergiebt sich, wie vorhin für die Kugelschale: Eine von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoidflächen begrenzte Schale übt auf einen in ihrem Hohlraum gelegenen Punkt keine Wirkung aus.

§ 8. Anziehung einer unendlichen Ebene auf einen Punkt. Stellen wir uns eine unendlich grofse, dünne Scheibe vor, deren Dicke c, deren Dichte δ sei. Denken wir uns einen Teil dieser Scheibe mit der Oberfläche σ; die Masse m_1 dieses Teiles ist dann gleich $m_1 = c\delta\sigma$. Stellen wir uns ferner vor, die Dicke c nehme ab, während die Dichte δ zunimmt, so dafs $c\delta = k$ konstant bleibt. Im Grenzfalle erhalten wir dann eine Ebene AB (Fig. 106), die mit einer Schicht

Fig. 106.



eines Stoffes bedeckt ist, wobei wir jedoch die Dicke dieser Schicht vernachlässigen können. Auf dem Teile σ unserer Ebene befindet sich die Stoffmenge $m_1 = k\sigma$; wir sagen in diesem Falle, der Stoff habe die Oberflächendichte k und nennen die Massen selbst Oberflächenmassen. Die gewöhnliche (Volumen-)Dichte dieser Massen ist unendlich grofs. Berechnen wir nunmehr die Kraft F, mit welcher die Ebene die in M befindliche Masse m anzieht. Ist $MN \perp AB$, so ist die Kraft F offenbar von M nach N gerichtet. Sei nun σ ein

kleiner Teil der Ebene AB mit der Masse $m_1 = k\sigma$; sei ferner r die Entfernung $M\sigma$, ω der Raumwinkel, unter welchem der Teil σ unserer Ebene erscheint und endlich $\angle NM\sigma = \alpha$. Wir beschreiben nun um M mit dem Radius r eine Kugelfläche, aus welcher der Raumwinkel ω das Stück s herausschneidet; dann ist $s = \sigma \cos \alpha$. Die Kraft f, mit welcher die Masse $m_1 = k\sigma$ die Masse m anzieht, ist gleich $f = \frac{m m_1}{r^2} = \frac{m k \sigma}{r^2}$. Danach folgt, dafs die Resultante F aller Kräfte f gleich ist

$$F = \sum f \cos \alpha = \sum \frac{m k \sigma \cos \alpha}{r^2} = \sum \frac{m k s}{r^2} =$$

$$= \sum m k \omega = m k \sum \omega.$$

$\Sigma \omega$ ist gleich dem Raumwinkel, unter welchem die unendliche Ebene AB vom Punkte M aus erscheint; dieser Winkel ist offenbar gleich 2π, also

$$F = 2\pi k m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Die Kraft, mit welcher eine unendliche Ebene AB einen aufserhalb derselben liegenden Punkt M anzieht, hängt vom Abstande $MN = h$ dieses Punktes M von der Ebene nicht ab. Wir haben mithin zu beiden Seiten der Ebene ein gleichförmiges Kraftfeld, dessen Intensität ψ gleich ist

$$\psi = 2\pi k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Siebentes Kapitel.

Elemente der Potentialtheorie.

§ 1. **Punktfunktionen.** Den folgenden Elementen der Potentialtheorie müssen wir einige Worte über Punktfunktionen vorausschicken. Jede Gröfse, die sich auf einen bestimmten Punkt bezieht, wird Punktfunktion genannt. So ist z. B. die Temperatur eine Punktfunktion, da sich ihr Wert im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändert und man vom Werte der Temperatur in einem gegebenen Punkte M reden kann. Sei A ein gegebener Punkt und r der Abstand eines anderen Punktes M von A; dann sind r, r^2, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\sqrt{r}}$ u. s. w. ebenfalls Funktionen des Punktes M, da der Wert dieser Gröfsen von der Lage des Punktes M abhängt.

Jede Funktion V eines Punktes M kann man als Funktion der Koordinaten x, y, z dieses Punktes ansehen, d. h. man kann $V = f(x, y, z)$ setzen. So ist z. B. $V = \frac{1}{r}$ eine Punktfunktion von der Form

$$V = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

wenn a, b, c die Koordinaten des Punktes A sind. Der geometrische Ort der Punkte, für welche V ein und denselben Wert C hat, stellt eine gewisse Fläche dar; ihre Gleichung lautet

$$V = f(x, y, z) = C.$$

Eine solche Fläche heifst die Niveaufläche (Iso-Fläche) der gegebenen Punktfunktion. So nennt man eine Fläche, deren sämtliche Punkte die gleiche Temperatur haben, eine isothermische Fläche. Legt man der Zahl C verschiedene Werte bei, so erhält man unendlich viele Niveauflächen; durch jeden Punkt des Raumes geht eine solche Fläche und nur eine, wenn die Funktion eindeutig ist. Durch jeden Punkt des Raumes kann man eine Kurve ziehen, welche die Niveauflächen senkrecht durchsetzt, so dafs in jedem Punkte A die Kurventangente senkrecht ist zur Tangentialebene der Niveaufläche, welche durch A geht. Solche Kurven heifsen orthogonale Trajektorien eines Systems von Niveauflächen.

§ 2. Das Potential einer anziehenden Masse (eines materiellen Punktes). In diesem Kapitel werden wir vom Ausdrucke

$$f = \frac{mm_1}{r^2} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

ausgehen, wo f die Kraft bedeutet, mit welcher sich zwei im Abstande r voneinander befindliche Massen m und m_1 anziehen. Die hier zu Grunde liegende Krafteinheit ist die astronomische, welche 15 Millionen mal kleiner als die C. G. S.-Einheit, d. h. die Dyne ist, falls man die Massen m und m_1 in Grammen, die Entfernung r in Centimetern mifst. Für die Arbeit R wählen wir wie früher den Ausdruck.

$$R = fs \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

wo s der Weg ist, welchen der Angriffspunkt der Kraft f in der Richtung der letzteren durchläuft. Mifst man hierbei s in Centimetern, so führt man eine besondere Arbeitseinheit ein, die gleich $\frac{1}{15\,000\,000}$ Erg ist (vergl. S. 105).

Es sei nun im Punkte A (Fig. 107) die Masse m vorhanden; in der Entfernung r wählen wir einen geometrischen Punkt B und

nennen die Gröfse V, deren Zahlenwert durch die Formel

$$V = \frac{m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben ist, das Potential des Punktes B oder das Potential im Punkte B. Dieses Potential wird gewissermafsen durch die Anwesenheit der Masse m in A „hervorgerufen“. In verschiedenen Punkten B ist das Potential im allgemeinen verschieden; das Potential ist somit eine Punktfunktion. Die Niveauflächen des Potentials sind konzentrische Kugelflächen, deren Zentrum A ist. Die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen sind die Radien obiger Kugelflächen, d. h. von A ausgehende Gerade. Das Potential ist eine abnehmende Funktion, wenn der Abstand von A, d. h. r zunimmt. Für unendlich ferne Punkte strebt das Potential dem Grenzwerte Null zu. Geht man von B in der Richtung nach A, d. h. nach der Seite des wachsenden Potentials um das unendlich kleine Wegstück $BB_1 = \sigma$ weiter, so findet man in B_1 für das Potential den neuen Wert $V + \Delta V$. Hier bedeutet ΔV die Änderung des Potentials, die dem Übergang von B nach B_1 entspricht.

Fig. 107.

Offenbar ist $V + \Delta V = \frac{m}{r - \sigma}$, also $\Delta V = \frac{m}{r - \sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r - \sigma)}$. Ist σ sehr klein, so kann man $r\sigma$ vernachlässigen und erhält

$$\Delta V = \frac{m\sigma}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn irgend eine Masse m_1 sich von B nach B_1 bewegt, so verrichtet die Kraft f der Anziehung zwischen m und m_1 eine elementare Arbeit, die wir mit ΔR bezeichnen wollen. Da die Kraft f von B nach A gerichtet ist, so ist $\Delta R = f\sigma = \frac{m m_1}{r^2} \cdot \sigma$. Durch Vergleichung mit (4) ergiebt sich

$$\Delta R = m_1 \Delta V. \quad . \quad . \quad (5)$$

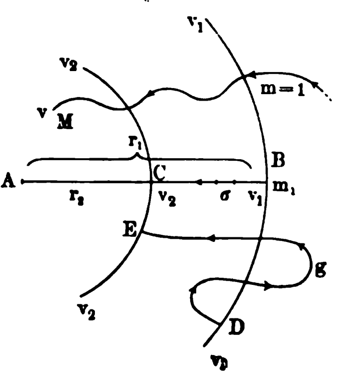


Fig. 108.

d. h. die elementare Arbeit einer Anziehungskraft wird durch das Produkt aus der fortbewegten Masse und der Potentialänderung, welche dieser Fortbewegung entspricht, gemessen.

Hat die Masse m_1 die endliche Wegstrecke von B nach C (Fig. 108) zurückgelegt, so erhält man leicht die Gesamtarbeit R der Anziehungs-

kraft, wenn man den Weg BC in Wegelemente σ zerlegt, deren jedem die kleine Arbeitsgröſse $\varDelta R$ entspricht, so daſs $R = \Sigma \varDelta R$ ist. Sei nun $AB = r_1$, $AC = r_2$; die Potentiale der Punkte B und C sind $V_1 = \frac{m}{r_1}$ und $V_2 = \frac{m}{r_2}$; dann ist nach (5)

$$R = \Sigma \varDelta R = \Sigma m_1 \varDelta V = m_1 \Sigma \varDelta V.$$

$\Sigma \varDelta V$ stellt die Summe der kleinen Potentialänderungen dar, die den Strecken σ, in welche wir den ganzen Weg von B nach C zerlegten, entsprechen; offenbar ist diese Summe gleich der Gesamtänderung des Potentials, d. h. $\Sigma \varDelta V = V_2 - V_1$ und daher

$$R = m_1 (V_2 - V_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

In Worten ausgedrückt heiſst das:

Die Arbeit einer Anziehungskraft wird durch das Produkt aus der angezogenen Masse und der Differenz der Potentiale im Anfangs- und Endpunkte des Weges gemessen.

Die Anziehungskraft gehört zu den Zentralkräften (S. 110), daher hängt die Arbeit R weder von der Form des zurückgelegten Weges, noch auch von der Lage des Anfangs- und Endpunktes desselben auf zwei Kugelflächen mit den Radien r_1 und r_2 ab, die hier Niveauflächen des Potentials sind. Formel (6) giebt mithin auch die Arbeit, die von der Kraft f bei Fortbewegung der Masse m_1 auf dem Wege DgE geleistet wird.

Die Arbeit hängt bloſs von der Potentialdifferenz derjenigen beiden Punkte ab, zwischen welchen die gegebene Masse sich bewegt hat.

Ist $m = 1$, so ist

$$R = V_2 - V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

d. h. die Potentialdifferenz zweier Punkte ist gleich der Arbeit, welche beim Transport der Masseneinheit von dem einen Punkte zum anderen geleistet wird. Es bewege sich nun die Masse $m_1 = 1$ auf einem beliebigen Wege von einem unendlich fernen Punkte zum Punkte M (Fig. 108), dessen Potential V ist. In diesem Falle ist $V_1 = 0$, $V_2 = V$ und wir erhalten statt (7)

$$R = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das Potential eines gegebenen Punktes ist gleich der Arbeit, welche von der anziehenden Kraft geleistet worden ist bei Überführung der Masseneinheit aus der Unendlichkeit nach diesem Punkt auf beliebigem Wege. Aus (6) folgt, daſs $R = 0$ ist, wenn Anfangs- und Endpunkt des zurückgelegten Weges auf derselben Niveaufläche des Potentials liegen.

Wenn sich m_1 von A entfernt, so wird die Arbeit R' geleistet entweder auf Kosten der Bewegungsenergie von m_1 selbst oder auf

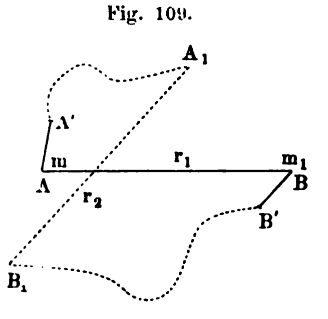
Kosten eines beliebigen anderen Energievorrates. Im letzteren Falle sagt man, R' sei die Arbeit äufserer Kräfte. Der Massenverschiebung auf dem Wege CB oder EgD mufs die Arbeit R' entsprechen, welche ihrem absoluten Betrage nach gleich R ist. Der Unterschied besteht nur darin, dafs hier der Anfangspunkt des Weges zum Endpunkte wird und umgekehrt. Unsere Formeln (6) und (8) geben $R' = m_1(V_2 - V_1)$ und $R' = V$, d. h.: Die von äufseren Kräften geleistete Arbeit wird durch das Produkt der bewegten Masse in die Potentialdifferenz zwischen dem Anfangs- und Endpunkte des Weges gemessen.

Das Potential eines gegebenen Punktes ist gleich der Arbeit, welche von äufseren Kräften geleistet werden müfste, um die Masseneinheit auf einem beliebigen Wege von diesem Punkte aus in die Unendlichkeit zu befördern.

Die Kraft f ist in jedem Punkte des Raumes nach A (Fig. 107 und 108) gerichtet, hat also dieselbe Richtung wie der Radius derjenigen Kugelfläche, welche die Niveaufläche des Potentials darstellt.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: Die wirkende Kraft ist in jedem Punkte des Raumes senkrecht zur Niveaufläche des Potentials, welche durch diesen Punkt geht. Die Kraftlinien sind die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen des Potentials.

Fig. 109.



Wir wollen nun wieder annehmen, die Massen m und m_1 befinden sich in den Punkten A und B (Fig. 109) im Abstande r voneinander. Wir führen hier eine neue Gröfse W ein, deren Zahlenwert durch die Formel

$$W = \frac{m m_1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

bestimmt wird und die wir das Potential der Massen m und m_1 aufeinander nennen wollen. Ist V das Potential des Punktes B, welches durch Punkt A „hervorgerufen“ ist und V_1 das durch B hervorgerufene Potential von A, d. h. ist $V = \frac{m}{r}$ und $V_1 = \frac{m_1}{r}$, so ist

$$W = \frac{m m_1}{r} = V m_1 = V_1 m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9, a)$$

Rückt m_1 von B nach B', so ist die von der Kraft f geleistete Arbeit ΔR gleich $\Delta R = m_1 \Delta V = \Delta(m_1 V) = \Delta W$, d. h. gleich der Potentialänderung der Massen. In analoger Weise verrichtet die Kraft f der gegenseitigen Massenanziehung bei Verschiebung von A nach A' eine Arbeit, die gleich $\Delta R = m \Delta V_1$ ist, wo ΔV_1 die Potentialdifferenz der Punkte A und A_1 bedeutet. Hieraus folgt ΔR

$= \varDelta (m V_1) = \varDelta W$. Welche von den beiden Massen ihre Lage also auch ändert, die Arbeit $\varDelta R$ ist immer gleich der Änderung von W. Wenn zuerst m von A nach A' rückt, und darauf m_1 von B nach B', so ist die gesamte, durch die gegenseitige Anziehung der beiden Massen m und m_1 geleistete Arbeit offenbar gleich der totalen Änderung der Gröfse W. Wir hatten aber gesehen, dafs die Arbeit innerer Zentralkräfte unabhängig davon ist, auf welche Weise ein System aus einer Anordnung zu einer anderen gelangt ist (S. 112), daher ist auch bei gleichzeitiger Ortsveränderung der Massen m und m_1 die Arbeit $\varDelta R$ numerisch gleich der Änderung der Gröfse W. Zerlegt man die endlichen Verschiebungen in ihre Elemente, so können wir hieraus leicht folgendes Resultat ableiten: Gelangen zwei materielle Punkte mit den Massen m und m_1 aus irgend einer Anfangslage in A und B, bei welcher ihr Potential W den speziellen Wert W_1 hat, auf irgend einem Wege in die neue Lage A_1 und B_1 (Fig. 109), für welche W den Wert W_2 hat, so ist hierbei die gesamte Arbeit R ihrer gegenseitigen Anziehung gleich

$$R = W_2 - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

d. h. gleich der Differenz ihrer Potentiale für die End- und Anfangslage. Ist $AB = r_1$ und $A_1 B_1 = r_2$, so ist

$$R = W_2 - W_1 = \frac{m m_1}{r_2} - \frac{m m_1}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Befanden sich die Massen anfänglich in unendlich grofsem Abstande und gelangten sie sodann auf beliebigen Wegen in eine Lage, bei welcher ihr Potential den Wert W hat, so hat man in (11) die Werte $W_1 = 0$, $W_2 = W$ einzusetzen und erhält

$$R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das Potential zweier Punkte aufeinander ist gleich der Arbeit der zwischen ihnen wirksamen Anziehungskraft, welche bei ihrem Übergange aus unendlichem gegenseitigen Abstande in die gegebene Lage geleistet worden ist.

Wenn W_0 der gröfste Wert von W ist, der also der gröfstmöglichen Annäherung zweier Massen entspricht, so ist $R = W_0 - W$ die Gesamtarbeit, welche diese beiden Massen leisten können. Offenbar ist demnach $W_0 - W$ der gesamte Vorrat an potentieller Energie, den das betrachtete, aus zwei Massen bestehende System besitzt.

§ 3. Das Potential eines Systems wirkender Massen (materieller Punkte). Es sei ein System materieller Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 . . . (Fig. 110) gegeben und es befinde sich der geometrische Punkt A von ihnen in den Abständen r_1, r_2, r_3, r_4 ... u. s. w. Bezeichnen

wir als das durch dieses Punktsystem m_i in A gewissermaſsen hervorgerufene Potential V die Gröſse

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = \sum \frac{m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Dasselbe ist also gleich der Summe der in A durch die einzelnen Massen des Systems hervorgerufenen Potentiale. Bilden die Massen einen massiven Körper, so denken wir uns ihn in unendlich viele kleine Teile zerlegt, von denen jeder die Rolle eines der Systempunkte übernimmt. Für die mit der Integralrechnung vertrauten Leser sei bemerkt, daſs V im gegebenen Falle die Form

Fig. 110.

$$V = \int \frac{k\,dv}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

annimmt; dv ist hierbei das Volumenelement, k seine Dichte und r sein Abstand vom Punkte, dessen Potential V ist. Das Zeichen $\int$ bezeichnet verkürzt das bestimmte dreifache Integral, das sich über das ganze Volumen des Körpers erstreckt.

Die Gröſse V [vergl. (13)] ist eine Punktfunktion, denn ändert sich die Lage des Punktes A, so ändern sich im allgemeinen alle Nenner r. Der geometrische Ort der Punkte mit gleichem Potential ist eine Niveaufläche des Potentials. Ihre Gleichung ist

$$V = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wo C eine Konstante bedeutet. Je nach der Zahl und Lage der Massen m kann die Form dieser Flächen eine auſserordentlich verschiedenartige sein. Haben wir im ganzen nur zwei wirkende Massen m_1 und m_2, so ist das Potential V des Punktes M (Fig. 111) gleich $V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$ und die Gleichung der Niveauflächen ist $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = C$.

Fig. 111.

In Fig. 112 (a. f. S.) sind durch punktierte Linien die Durchschnittslinien der Zeichnungsebene mit den Niveauflächen des Potentials dargestellt, und zwar für den Fall, daſs sich im Punkte A die Masse m_1, im Punkte B die Masse m_2 befindet und $m_1 = 4\,m_2$ ist. Die Niveauflächen selbst sind Rotationsflächen, welche durch Rotation

der Figur um die Gerade AB entstehen. Die A und B zunächst gelegenen Kurven sind Kreise und sind fortgelassen. Die voll ausgezogenen Linien sind die orthogonalen Trajektorien (S. 225) der Niveauflächen des Potentials; ihre physikalische Bedeutung wird später dargelegt werden. Offenbar schneiden sich beide Liniensysteme (die punktierten und voll ausgezogenen) unter rechten Winkeln.

Nehmen wir jetzt an, m' (Fig. 110) rücke von A, dessen Potential V_1 gleich ist

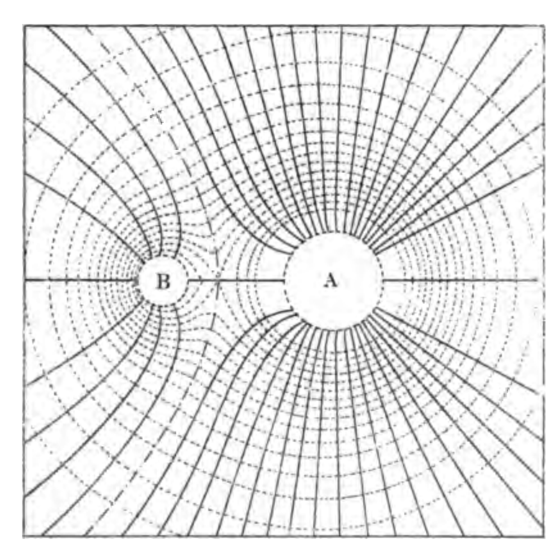
$$V_1 = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

nach einem Punkte B, dessen Potential V_2 gleich ist

$$V_2 = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} + \frac{m_3}{\varrho_3} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ϱ_i bedeutet hier den Abstand der Masse m_i von B. Gesucht wird die Gesamtarbeit R, welche bei dieser Verschiebung der Masse m' durch die Kraft F, mit welcher erstere Masse durch die Massen m_i des Systems angezogen wird, geleistet wird. Die Kraft F ist die Resultierende der Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$, mit denen die einzelnen Massen m' anziehen. Bezeichnet R_1, R_2, $R_3 \ldots$ die Arbeit der Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$, so ist die Arbeit R der Kraft F, nach dem Satze von der Arbeit der Resultante (S. 108), gleich der algebraischen Summe der Arbeiten R_1, R_2, $R_3 \ldots$, also

Fig. 112.



$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Auf Grund des Lehrsatzes, welcher den Sinn der Gleichung (6) in Worten ausdrückt, haben wir

$$R_1 = m'\left(\frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_1}{r_1}\right); \qquad R_2 = m'\left(\frac{m_2}{\varrho_2} - \frac{m_2}{r_2}\right) \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (18) ein, so ist

$$R = m'\left\{\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} + \frac{m_3}{\varrho_3} + \cdots\right\} - m'\left\{\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots\right\}$$

oder nach (16) und (17)

$$R = m'(V_2 - V_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Im Falle eines Systems von wirkenden Massen wird die beim Transport der Masse m' geleistete Arbeit durch das Produkt dieser Masse in die Potentialdifferenz des End- und Anfangspunktes des Weges gemessen.

Für $m' = 1$ erhält man eine mit (7) identische Formel. Wenn die Masse $m' = 1$ aus unendlicher Ferne auf beliebigem Wege an den Punkt gelangt, dessen Potential V ist, so giebt Formel (19), da hier $m' = 1$, $V_1 = 0$, $V_2 = V$ ist,

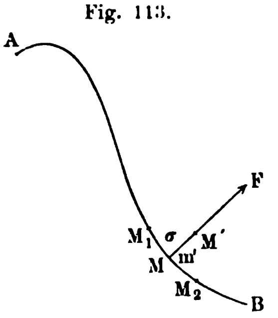
$$R = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Dies entspricht dem Satze, welcher durch Formel (8) ausgedrückt war.

Formel (19) zeigt, daſs die Arbeit R nur von den Niveauflächen des Potentials ($V = V_1$ und $V = V_2$), zwischen welchen der Transport der Masse m' stattfand, abhängt; von der Form dieses Weges oder der Lage des Anfangs- und Endpunktes desselben auf den erwähnten Flächen ist die Arbeit unabhängig.

Durch jeden Punkt M im Raume, in welchem eine Kraft wirkt, kann man eine und nur eine Niveaufläche AB des Potentials legen (Fig. 113). Bringt man in diesen Punkt M die Masse m', so wird auf dieselbe eine gewisse Kraft F wirken. Wir wollen deren Richtung bestimmen. Verschiebt man die Masse m' auf der Fläche AB um die unendlich kleine Strecke MM_1 oder MM_2 oder irgend eine andere, nicht in der Zeichnungsebene liegende, so ist nach Formel (19), da Anfangs- und Endpunkt dieses Weges auf derselben Niveaufläche des Potentials liegen, die Arbeit R der Kraft F gleich Null. Hieraus folgt (S. 107), daſs die Kraft F zu allen den kleinen Linien, die man von M auf der Fläche AB nach allen möglichen Richtungen ziehen kann, senkrecht steht. Somit ist die Kraft F selbst normal zur Fläche AB.

Fig. 113.



In jedem Punkte des Raumes ist die wirkende Kraft senkrecht zur Niveaufläche des Potentials, die durch diesen Punkt geht.

Hieraus folgt unmittelbar, daſs die Kraftlinien orthogonale Trajektorien (S. 225) der Niveauflächen des Potentials sind. Die voll ausgezogenen Linien in Fig. 112 sind mithin die Kraftlinien.

Die Kraft F ist nach der Seite des wachsenden Potentials hin gerichtet. Davon kann man sich durch folgende Betrachtung überzeugen. Wenn man m um die unendlich kleine Strecke $MM' = \sigma$ (Fig. 113) in der Richtung der Kraft F verschiebt, so ist die hierbei geleistete Arbeit R einerseits gleich $F\sigma$, andererseits nach (19)

$$R = m'(V + \Delta V - V) = m'\Delta V,$$

falls man das Potential des Punktes M (und der ganzen Fläche AB) mit V, das Potential des Punktes M' aber mit $V + \Delta V$ bezeichnet. Es ist also

$$F\sigma = m'\Delta V \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Hieraus ersieht man, dafs $\Delta V > 0$ und dafs F nach der Seite des anwachsenden Potentials hin gerichtet ist. Gleichung (21) giebt $F = m'\frac{\Delta V}{\sigma}$. Indes ist σ eine unendlich kleine Gröfse, und gilt letztere Formel nur für den Grenzfall

$$F = m' \lim \frac{\Delta V}{\sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Hier ist ΔV die Potentialänderung, welche einer unendlich kleinen Verschiebung σ normal zur Niveaufläche des Potentials entspricht.

Prüfen wir Formel (22) für den Fall nur eines wirkenden Punktes m, wo $V = \frac{m}{r}$ ist; die kleine Verschiebung sei $\sigma = BB_1$ (Fig. 107). Es ist

$$\Delta V = \frac{m}{r - \sigma} - \frac{m}{r} = \frac{m\sigma}{r(r - \sigma)}; \quad \frac{\Delta V}{\sigma} = \frac{m}{r(r - \sigma)}.$$

Für ein unendlich kleines σ kommt $\lim \frac{\Delta V}{\sigma} = \frac{m}{r^2}$ und (22) giebt den richtigen Ausdruck $F = \frac{mm'}{r^2}$.

§ 4. **Das Potential zweier Systeme aufeinander.** Wir haben es hier mit zwei Punktsystemen A und B zu thun; sei m_i die Masse eines Punktes des Systems A, m_k die Masse eines Punktes des Systems B und r der Abstand dieser beiden Punkte voneinander. Bilden wir die Summe W aller Gröfsen von der Form $\frac{m_i m_k}{r}$, die durch Kombination eines jeden Punktes des Systems A mit jedem Punkte des Systems B erhalten werden. Diese Summe

$$W = \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

nennen wir das Potential der Systeme A und B aufeinander.

Wenn beide Systeme aus irgend einer Anfangslage der Punkte, bei welcher $W = W_1$ ist, in die neue Lage, für welche $W = W_2$ ist, übergehen, so giebt die Änderung jedes Gliedes $m_i m_k : r$ die Arbeit der Kraft, welche zwischen den Punkten m_i und m_k wirkt [vergl. (11)]; daher giebt also die vollständige Änderung der Gröfse W, d. h. $W_2 - W_1$ die Gesamtarbeit R aller Kräfte, welche zwischen den Punkten beider Systeme wirken. Somit haben wir

$$R = W_2 - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Befinden sich beide Systeme anfänglich in sehr grofsem gegenseitigen Abstande und gelangen sie sodann zu der Anordnung, bei welcher ihr Potential gleich W wird, so erhält man die Arbeit R der zwischen den Systemen A und B wirkenden Kräfte, wenn man in (24) $W_1 = 0$ und $W_2 = W$ setzt; demgemäfs haben wir

$$R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Das Potential zweier Systeme aufeinander ist gleich der Arbeit, die von den zwischen ihren Punkten wirkenden Kräften beim Übergange aus unendlichem Abstande in die Lage geleistet wird, welche sie einnehmen.

W_0 sei der Maximalwert der Gröfse W, der dank den gegebenen Eigenschaften beider Systeme möglich ist und bei ihrer gröfstmöglichen Annäherung aneinander erreicht wird. Dann ist

$$R = W_0 - W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

die Gesamtarbeit, welche die beiden Systeme, deren Potential gleich W ist, noch zu leisten vermögen. Offenbar stellt daher die Gröfse $W_0 - W$ den Vorrat an potentieller Energie dar, den beide Systeme zusammengenommen infolge der wechselseitigen Anziehung ihrer Punkte besitzen.

§ 5. Das Potential eines Systems auf sich selbst. Es bestehe ein System aus den materiellen Punkten $m_1, m_2, m_3 \ldots m_i \ldots m_k \ldots$ und sei $r_{i,k}$ der Abstand zweier dieser Punkte m_i und m_k voneinander. Die Grösse $\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$ ist das Potential der Massen m_i und m_k aufeinander (Seite 227). Wir bilden nun ähnliche Brüche für alle möglichen Kombinationen zweier Massenpunkte, wobei indes jedes Paar nur einmal genommen werden darf. Ist n die Anzahl der materiellen Punkte, so ist die Zahl unserer Brüche $\frac{1}{2} n(n-1)$, wofür bei sehr grofsem n auch $\frac{n^2}{2}$ gesetzt werden kann. Die Summe aller solcher Brüche nennen wir das Potential des Systems auf sich selbst und bezeichnen sie mit W. Der symbolische Ausdruck für W ergiebt

sich leicht, wenn man durch das Symbol

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{m_i m_k}{r_{i,k}} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

die Summe aller Brüche bezeichnet, welche man erhält, falls man jeden einzelnen Systempunkt mit allen übrigen Punkten kombiniert. Offenbar erhält man bei einem derartigen Verfahren jedes Paar m_i und m_k zweimal, folglich ist $W = \frac{S}{2}$. Unter Fortlassung der Indices kann man schreiben

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum \frac{m m'}{r} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Die Gröfse S läfst sich umformen, indem man

$$S = \sum_i m_i \sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}$$

schreibt. $\sum_k \frac{m_k}{r_{i,k}}$ ist aber nichts anderes als der Wert V_i für das Potential unseres Systems im geometrischen Punkt desselben, der von der Masse m_i eingenommen ist. Man kann folglich schreiben $S = \sum_i m_i V_i$; läfst man hier die Indices fort, so erhält man für W den Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \sum m V \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Das Potential eines Systems auf sich selbst ist gleich der halben Summe der Produkte aus der Masse jedes der materiellen Punkte des Systems und dem Potential des von ihm eingenommenen geometrischen Punktes.

Nehmen wir nun an, das System sei aus irgend einer anfänglichen Anordnung, bei der $W = W_1$ war, zu einer neuen, bei der $W = W_2$ ist, gelangt und soll nun die gesamte „innere" Arbeit R bestimmt werden, die von allen Anziehungskräften, welche zwischen den Systempunkten wirken, hierbei geleistet worden ist. Wir wissen bereits (Seite 112), dafs R von den Wegen unabhängig ist, auf welchen die Systempunkte aus der ursprünglichen Lage in die neue gelangt sind.

Beim Übergange jedes Punktpaares m_i und m_k aus der ersten Lage in die neue wird von ihrer Anziehungskraft eine Arbeit $R_{i,k}$ geleistet, die gleich der Potentialänderung der beiden Punkte ist, also gleich der Änderung des ihnen entsprechenden Gliedes der Summe (28), welche uns W giebt. Die Gesamtarbeit R ist gleich der Summe aller Arbeiten $R_{i,k}$; sie ist also gleich der Summe der Änderungen,

welche die Glieder von W beim Übergange des Systems aus einer Anordnung in die andere erfahren. Hiernach ist R gleich der Änderung von W, d. h.

$$R = W_2 - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

oder in Worten: Wenn ein System von materiellen Punkten aus einer Anordnung der Punkte in eine andere übergeht, so ist die Gesamtarbeit der inneren Kräfte gleich der Änderung seines Potentials auf sich selbst.

Setzen wir den Fall, das System sei aus einem „unendlich disaggregierten" (zerstreuten) Zustande, bei dem alle Entfernungen $r_{i,k}$ unendlich grofs waren, in den gegebenen Zustand gelangt, bei welchem sein Potential auf sich selbst gleich W ist. Dann ist in (30) $W_1 = 0$ und $W_2 = W$ zu setzen und kommt daher

$$R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

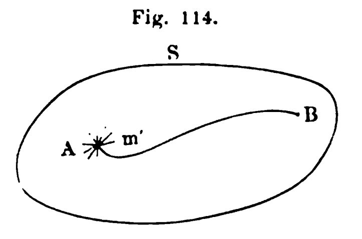
d. h. in Worten ausgedrückt: Das Potential eines Systems auf sich selbst ist gleich der Arbeit, die von inneren Kräften bei seiner Bildung aus einem unendlich disaggregierten Zustande geleistet worden ist.

Als Resultat einer solchen Arbeit mufs ein äquivalenter Energievorrat entstehen, z. B. ein Vorrat an kinetischer Energie einer sichtbaren Bewegung oder ein Vorrat an Wärmeenergie oder endlich ein Vorrat an Energie von irgend einer anderen Form.

Ist W_0 der Maximalwert von W, welcher der gröfstmöglichen Kontraktion des Systems entspricht, so ist offenbar $W_0 - W$ die potentielle Energie eines Systems, dessen Potential auf sich selbst gleich W ist.

§ 6. Lehrsatz vom Raum mit konstantem Potential. Hat das Potential V innerhalb eines geschlossenen Raumes, in dem es durch aufserhalb desselben liegende Massen hervorgerufen worden ist, überall denselben konstanten Wert $V = C$, so ist die an allen Punkten dieses Raumes wirkende Kraft $F = 0$, und umgekehrt: ist in einem geschlossenen Raume überall $F = 0$, so ist das Potential in ihm $V = C$, d. h. konstant. Diesen Satz wollen wir jetzt beweisen; zu diesem Zwecke nehmen wir an, innerhalb der Fläche S (Fig. 114) sei $V = Const.$ Denken wir uns in den beliebigen Punkt A die Masse m' versetzt; in welcher Richtung wir auch diese Masse aus A fortbewegen, die Arbeit der wirksamen Kraft F ist immer gleich Null, denn wir

Fig. 114.



haben, um sie zu erhalten, in Formel (19) zu setzen $V_1 = V_2 = C$, woraus $F = 0$ folgt. Nehmen wir umgekehrt an, dafs im Inneren von S überall $F = 0$ sei; wählen wir zwei beliebige Punkte A und B innerhalb S und befördern wir die Masse m' von A nach B. Da auf dem ganzen hierbei zurückgelegten Wege $F = 0$ ist, so ist offenbar auch $R = 0$. Für diesen Fall aber lehrt uns Formel (19), dafs die Potentiale von A und B einander gleich sind und da diese Punkte vollkommen willkürlich gewählt waren, so haben also alle Punkte innerhalb S ein und dasselbe Potential.

§ 7. Das Potential einer Kugelschale und einer Kugel. Zunächst sei hier bemerkt, dafs wir uns einer doppelten Ausdrucksweise bedient haben, indem wir entweder vom „Potential des Punktes A, das durch ein System von materiellen Punkten hervorgerufen wird“, gesprochen haben, oder aber vom „Potential eines Systems im Punkte A“. Für eine dünne Kugelschale, deren Radius R, Dicke c und Dichte δ ist, kann man das äufsere Potential V_e und das innere Potential V_i auf folgendem elementaren Wege finden. Da eine Kugelschale im Aufsenraume ebensolche Kräfte F_e hervorruft, als ob ihre Gesamtmasse M in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre (Seite 218), so ist klar, dafs auch das Potential V_e die entsprechende Eigenschaft besitzen mufs, d. h. im Punkte A, dessen Abstand vom Mittelpunkte $x > R$ ist, mufs

$$V_e = \frac{M}{x} \quad \dots\dots\dots \quad (32)$$

sein. Offenbar gilt diese Formel auch für eine homogene Kugelschale von endlicher Dicke und für eine homogene massive Kugel. Im Innenraum ist $F_i = 0$ (Seite 216); nach dem vorigen Satze in § 6 mufs $V_i = Const.$ sein; d. h. in allen Punkten innerhalb der Kugelschale mufs das Potential V ein und denselben Wert haben. Leicht ist aber der Wert V_c für das Potential im Kugelzentrum zu finden; es mufs offenbar $V_i = V_c$ sein. Zerlegen wir die Masse der Kugelschale in ihre Elemente m, die alle sich vom Zentrum im Abstande R befinden, dann ist das Potential

$$V_c = \sum \frac{m}{R} = \frac{\Sigma m}{R} = \frac{M}{R},$$

also

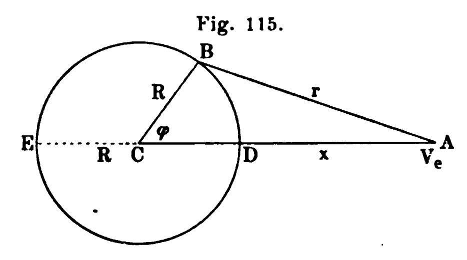
$$V_i = \frac{M}{R} \quad \dots\dots\dots \quad (33)$$

oder, da $M = 4\pi R^2 c\delta$ ist, so folgt

$$V_i = 4\pi R c\delta \quad \dots\dots\dots \quad (34)$$

Für die mit der Integralrechnung bereits vertrauten Leser sei hier noch eine strengere Ableitung der Gröfsen V_e und V_i für eine dünne Kugelschale gegeben. Sei A (Fig. 115) ein äufserer Punkt im Abstande $CA = x$ vom Kugelzentrum. Ist m die Masse eines Elementes der Kugelschale, welches sich in B befindet und $BA = r$, so ist das gesuchte $V_e = \sum \frac{m}{r}$.

Fig. 115.



Bezeichnen $\varphi = \angle BCD$ und ψ (die Länge) die Polarkoordinaten des Punktes B, so ist $R^2 \sin\varphi d\varphi d\psi$ das Flächenelement um B und $m = c\delta R^2 \sin\varphi d\varphi d\psi$. Ferner ist $r = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}$ und daher

$$\left.\begin{aligned} V_e &= c\delta R^2 \int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}} \\ &= 2\pi c\delta R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (35)$$

oder

$$V_e = \frac{2\pi c\delta R}{x} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} \quad . \quad . \quad (36)$$

Die Grenzen des Integrals sind symbolisch bezeichnet. Das unbestimmte Integral ist gleich $\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi} = r$ und deshalb können wir symbolisch schreiben $V_e = \frac{2\pi\delta c R}{x}\Big|r\Big|_D^E$, wo D und E die Punkte unserer Figur sind, für welche $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pi$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{2\pi c\delta R}{x}\{AE - AD\} = \\ &= \frac{2\pi c\delta R}{x}\{(x + R) - (x - R)\} = \frac{4\pi R^2 c\delta}{x} = \frac{M}{x}, \end{aligned}$$

was vollkommen der Formel (32) entspricht.

Das innere Potential V_i im Punkte A (Fig. 116, a. f. S.) wird durch dieselben Integrale (35) und (36) gegeben wie V_e; hier ist jedoch $x = CA < R$.

Wir haben wiederum

$$V_i = \frac{2\pi c\delta}{x} \{AE - AD\}$$

$$= \frac{2\pi c\delta R}{x} \{(R + x) - (R - x)\} = 4\pi\delta c R = \frac{M}{R},$$

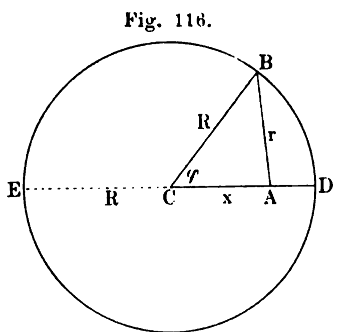
was vollkommen den Formeln (33) und (34) entspricht.

Das Potential V_i im inneren Hohlraum einer homogenen Kugelschale, die von Kugelflächen mit den Radien R_1 und R_2 begrenzt ist, wird erhalten, wenn man die gegebene Schale in unendlich dünne Schalen zerlegt und für c in Formel (34) dR einsetzt. Dann ist

$$V_i = \int_{R=R_1}^{R_2} 4\pi\delta R\,dR = 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Das Potential V im Innern einer homogenen massiven Kugel (deren Radius R, deren Dichte δ ist) im Punkte A, der vom Zentrum um x absteht, setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste V_1 ist das Potential der massiven Kugel mit dem Radius R; an ihrer Oberfläche liegt der Punkt A und wir erhalten nach (32) $V_1 = \frac{M}{x}$ $= \frac{4\pi x^3\delta}{3x} = \frac{4}{3}\pi x^2\delta$. Der zweite Teil V_2 ist das Potential einer Kugelschale, innerhalb deren sich der Punkt A befindet; es wird aus (37) erhalten, wenn man $R_2 = R$ und $R_1 = x$ setzt, so dafs $V_2 = 2\pi\delta(R^2 - x^2)$ wird. Addiert man nun $V_1 + V_2 = V$, so erhält man das Potential im Innern einer massiven homogenen Kugel

Fig. 116.



$$V = 2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3}\pi\delta x^2 = 2\pi\delta\left(R^2 - \frac{1}{3}x^2\right) \quad . \quad . \quad (38)$$

Das Potential im Zentrum einer massiven Kugel ist gleich $2\pi\delta R^2$. Wir wollen nun noch eine interessante Aufgabe behandeln, nämlich das Potential W einer massiven homogenen Kugel auf sich selbst.

Wir bedienen uns hierzu der Formel (29)

$$W = \frac{1}{2}\sum mV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Teilen wir die Kugel durch konzentrische Kugelflächen in eine unendlich grofse Zahl dünner Schalen; sei x der Radius, dx die Dicke

einer dieser Schalen. Da V für alle Punkte der Schale sich gleich bleibt, nämlich gleich der in (38) gegebenen Gröfse, so können wir in (39) m gleich der Masse der Kugelschale setzen, so dafs $m = 4\pi x^2 \delta dx$ ist. Daher kommt nach (38)

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{R}\left(2\pi\delta R^2 - \frac{2}{3}\pi\delta x^2\right)4\pi\delta x^2 dx.$$

Obiges Integral giebt, wenn M die Masse der ganzen Kugel ist,

$$W = \frac{16}{15}\pi^2\delta^2 R^5 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Somit ist das Potential einer Kugel auf sich selbst proportional dem Quadrate ihrer Dichte und der fünften Potenz ihres Radius.

Formel (40) giebt uns die Arbeit, welche bei der Bildung einer Kugel aus unendlich disaggregierter Materie geleistet wird.

Formel (40) zeigt uns ferner, dafs, wenn eine gegebene Masse M sich zu einer Kugel zusammenzieht und hierbei der Reihe nach verschiedene Radien erhält, das Potential W, folglich auch die geleistete Arbeit umgekehrt proportional dem entsprechenden Radius ist.

Wenn die Masse M, welche das Volumen einer Kugel vom Radius R erfüllte, sich derart kontrahiert, dafs sie nunmehr eine Kugel vom Radius $R_1 < R$ bildet, so ist die hierbei geleistete Arbeit der Kontraktion gleich

$$W_1 - W = \frac{3}{5}M^2\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Wir dürfen nicht vergessen, dafs die Formeln (40) und (41) uns die Arbeit der Bildung resp. der Kontraktion einer Kugel nicht etwa in absoluten Mafseinheiten geben. Drückt man M in Grammen, R in Centimetern aus, so geben uns (40) und (41) die gesuchte Arbeit in Einheiten, die etwa 15.10^6 mal kleiner sind als ein Erg (vergl. Seite 210).

Formel (41) setzt uns in den Stand, unter anderem die Arbeit zu berechnen, welche bei Kontraktion der Sonne geleistet wird. Man kann z. B. annehmen, durch diese Kontraktion vermindere sich der Sonnenradius um 0,1 Proz. und kann die hierbei frei werdende Wärme berechnen. Ferner könnte man berechnen, für welche Zeit diese Wärmemenge hinreicht unter der Annahme, dafs auf jeden Quadratcentimeter, der sich senkrecht zu den Sonnenstrahlen in der Entfernung der Erde von der Sonne befindet, je drei kleine Kalorien pro Minute fallen sollen. Nimmt man für die Wärmekapazität einer Kugel eine beliebige angenäherte Zahl an, so kann man einen Begriff von der Erwärmung erhalten, die

eine Kugel bei ihrer Bildung resp. Kontraktion erfährt, wobei freilich angenommen ist, dafs ein Wärmeverlust durch Ausstrahlung nicht stattfindet. Interessant ist es endlich, die Temperaturerhöhung der Sonne bei plötzlicher Verkleinerung ihres Radius, z. B. um 0,1 Proz., zu berechnen; als Wärmekapazität der Sonne kann man hierbei etwa $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$ oder gar 1 annehmen, welch letztere Zahl höchst wahrscheinlich zu hoch gegriffen ist.

Vorstehend genannte Aufgaben können als Anwendungen der abgeleiteten Formeln den Lesern empfohlen werden.

Achtes Kapitel.

Von der Schwerkraft.

§ 1. Das homogene Kraftfeld an der Erdoberfläche. Es war bereits früher (Seite 206) davon die Rede, dafs die Schwerkraft, welche auf alle Körper an der Erdoberfläche wirkt, nur einen speziellen Fall der allgemeinen Schwere bildet. Bezeichnet man die Masse der Erde mit M, ihren Radius mit R, die Beschleunigung beim freien Fall an der Erdoberfläche mit g, die Masse eines beliebigen Körpers mit m, sein Gewicht mit p und nimmt an, dafs die Anziehung der Erde wie die einer homogenen Kugel vor sich geht, so erhält man

$$p = C\,\frac{Mm}{R^2} = mg \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

und hieraus

$$g = C\,\frac{M}{R^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

Obgleich das Gewicht der verschiedenen Körper verschieden ist, so ist doch die Beschleunigung g des freien Falles für alle Körper im Vakuum an der Erdoberfläche die gleiche. Formel (2) zeigt, dafs die Beschleunigung g, welche überall nach dem Zentrum der Erde, welche als homogene Kugel angesehen wird, gerichtet ist, mit Zunahme der Entfernung von ihrer Oberfläche sich vermindert.

Für kleine Teile des Raumes kann man annehmen, dafs g an allen Punkten nach Gröfse und Richtung konstant ist. In diesem Falle stellt der in Betracht gezogene Teil des Raumes ein homogenes Kraftfeld (S. 97) dar, dessen Kraftlinien eine Richtung haben, die man als v e r t i k a l e be-

zeichnet. Ebenen, welche senkrecht zu diesen Kraftlinien sind, heifsen Horizontalebenen.

Die Methoden, den Zahlenwert von g zu bestimmen, sowie die Resultate solcher Bestimmungen werden im dritten Abschnitt gegeben werden.

§ 2. **Schwerpunkt.** Im § 15 auf Seite 98 sahen wir, dafs alle Kräfte, welche auf einen im homogenen Kraftfelde befindlichen Körper wirken, eine Resultante haben, deren Angriffspunkt das Trägheitszentrum des Körpers heifst. Sind die Dimensionen eines an der Erdoberfläche befindlichen Körpers nicht ungewöhnlich grofs, so kann man die Annahme gelten lassen, dafs sich alle Punkte desselben in einem und demselben homogenen Kraftfelde befinden. Der Angriffspunkt der Resultante aller Schwerkräfte, welche auf die Elemente des Körpers wirken, fällt in diesem Falle mit seinem Trägheitszentrum zusammen und wird sein Schwerpunkt genannt. Die Schwerpunktskoordinaten werden für einen inhomogenen Körper durch die Formel (31) auf Seite 98, für einen homogenen Körper durch die Formeln (32) auf derselben Seite gegeben. Die Lage des Schwerpunktes eines Körpers hängt von der Lage des Körpers selbst nicht ab, da ja diese Unabhängigkeit seinem Trägheitszentrum zukommt.

Nach Formel (34) auf Seite 99 und dem entsprechenden Lehrsatze haben wir gesehen, dafs das Trägheitsmoment K_A eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Achse A gleich dem Trägheitsmoment K_C desselben Körpers in Bezug auf die Achse C, die der ersten parallel durch den Schwerpunkt geht, vermehrt um die Gröfse Ma^2 ist, d. h. vermehrt um das Produkt der Masse M des Körpers in das Quadrat der Entfernung a der beiden Achsen A und C:

$$K_A = K_C + Ma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Beispiele von Schwerpunktsbestimmungen sollen hier nicht folgen, da solche in den Lehrbüchern der Mechanik gegeben werden. Ebenso wird an dieser Stelle auf Fragen, die sich auf die Lehre vom stabilen, labilen und indifferenten Gleichgewicht von Körpern mit einem oder mehreren Stützpunkten beziehen, nicht eingegangen werden: man findet die Elemente dieser Lehre in elementaren Physikbüchern; eine strengere Untersuchung der hierher gehörigen Probleme ist in Lehrbüchern, welche die Mechanik behandeln, zu finden.

§ 3. **Freie vertikale Bewegung der Körper im Vakuum.** Zwar wird die vorliegende Frage bereits in den elementaren Physikbüchern behandelt, doch soll auch hier eine kurze Übersicht über die auf sie bezüglichen Formeln gegeben werden. Sieht man die Beschleunigung g als konstant an, so hat man den freien Fall der Körper im

Vakuum als gleichförmig beschleunigte Bewegung, die freie Bewegung der Körper vertikal aufwärts im Vakuum als gleichförmig verzögerte Bewegung zu betrachten.

I. Fall der Körper. Sei s der durchlaufene Weg, v die Geschwindigkeit, t die Fallzeit und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit für $t = 0$; dann geben uns die Formeln (20) und (21) auf Seite 65

$$v = v_0 + gt; \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$) ist

$$v = gt; \qquad s = \frac{1}{2} g t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Im betrachteten Falle wächst die Geschwindigkeit proportional der ersten, der durchlaufene Weg proportional der zweiten Potenz der Fallzeit.

Für $t = 1$ folgt aus (5) $v_1 = g$; $s_1 = \frac{g}{2}$; d. h. die Geschwindigkeit nach Ablauf der ersten Zeiteinheit ist numerisch gleich dem doppelten in dieser Zeiteinheit zurückgelegten Wege. Der im Verlaufe der $n$ten Sekunde zurückgelegte Weg ist gleich $s_n = \frac{1}{2} g n^2 - \frac{1}{2} g (n-1)^2$ oder

$$s_n = (2n - 1)\frac{g}{2} = \frac{1}{2} g + (n-1) g = \frac{2n-1}{2} g \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Wege wachsen um denselben Zahlenwert g, um welchen auch die Geschwindigkeiten zu Ende der aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten anwachsen. Diese Wege sind $s_1 = \frac{g}{2}$; $s_2 = \frac{g}{2} + g = 3\frac{g}{2}$; $s_3 = \frac{g}{2} + 2g = 5\frac{g}{2}$; $s_4 = \frac{g}{2} + 3g = 7\frac{g}{2}$ u. s. w. Die Wege s_n verhalten sich somit wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 u. s. w., wie dies auch aus Formel (6) ersichtlich ist.

Die Formeln (5) geben, wenn man die Zeit t eliminiert,

$$s = \frac{v^2}{2g}; \qquad v = \sqrt{2gs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Bewegung nach aufwärts. Hier kann die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nicht gleich Null sein. Wir haben [vergl. (23) auf Seite 66]

$$v = v_0 - gt; \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Der Körper gelangt zur Ruhe im Zeitmoment T, für welchen

$v = v_0 - g\,T = 0$ ist, hieraus folgt

$$T = \frac{v_0}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

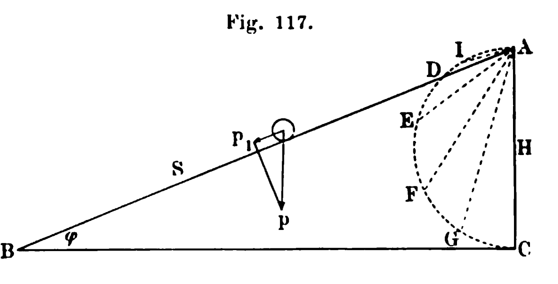
Setzt man diesen Wert in den Ausdruck für s, so erhält man die Steighöhe H

$$H = \frac{v_0^2}{2\,g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Steighöhe ist also proportional dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit. Nachdem der Körper den höchsten Punkt erreicht hat, beginnt er zu fallen. Er kehrt zur Anfangslage zurück und braucht für den Rückweg die Zeit T_1, die sich aus Formel $H = \frac{1}{2}\,g\,T_1^2$ ergiebt, vergl. (5); hieraus folgt $T_1 = \sqrt{\frac{2\,H}{g}}$; mit Hülfe von (10) wird $T_1 = \frac{v_0}{g}$, d. h. $T_1 = T$ oder: für das Zurückfallen ist eine Zeit erforderlich, welche gleich der Zeit des Aufstiegs ist. Die Geschwindigkeit v_1, welche der Körper in dem Augenblicke besitzt, wo er an den Punkt, von dem aus seine Bewegung begann, zurückgelangt, wird aus Formel (7) erhalten; sie ist $v_1 = \sqrt{2\,g\,H}$ oder mit Hülfe von (10) $v_1 = \pm\, v_0$. Im gegebenen Falle ist offenbar $v_1 = -v_0$. Der Körper langt also in seinem Ausgangspunkte mit einer Geschwindigkeit an, die ihrem absoluten Betrage nach gleich der Anfangsgeschwindigkeit beim Aufstieg ist.

III. Reibungslose Bewegung auf der schiefen Ebene. Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene AB (Fig. 117), welche mit der Horizontalebene BC den Winkel φ einschliefst, so wird die Beschleunigung g_1 seiner Bewegung durch die Komponente p_1 seines Gewichtes p hervorgerufen, die parallel zur Ebene AB ist.

Fig. 117.



Da die Beschleunigungen bei gegebener Masse proportional den Kräften sind, so haben wir $\frac{g_1}{g} = \frac{p_1}{p} = \sin\varphi$, und hieraus

$$g_1 = g\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

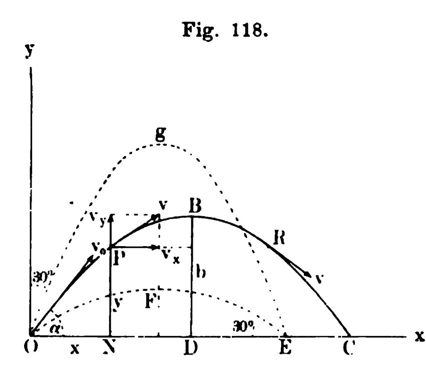
Alle Formeln unseres Paragraphen von (4) bis (10) behalten auch hier ihre Geltung, nur hat man statt g jedesmal $g\sin\varphi$ zu setzen. Formel (10) giebt in diesem Falle $H = \infty$ für $\varphi = 0$, was auch so

sein mufs, wenn nämlich keine Reibung vorhanden ist und die Bewegung im Vakuum erfolgt. Nehmen wir an, der Körper habe seine Bewegung im Punkte A ohne Anfangsgeschwindigkeit begonnen, und es sei $AC = H$, $AB = S$, dann erreicht der Körper den Punkt B mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 g_1 S} = \sqrt{2 g S \sin \varphi} = \sqrt{2 g H}$. Diese Geschwindigkeit hängt somit von der Neigung φ der schiefen Ebene nicht ab und ist gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche der Körper im Punkte C beim freien Fall von A nach C erlangen mufs.

In einer gegebenen Zeit A durchläuft der Körper längs AB den Weg $s = \frac{1}{2} g_1 t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi$. Bezeichnet man mit T die Zeit für den freien Fall von A nach C, so kommt $H = \frac{1}{2} g T^2$. In dieser selben Zeit T durchläuft der Körper längs AB den Weg H_1, der gleich ist $H_1 = \frac{1}{2} g_1 T^2 = \frac{1}{2} g T^2 \sin \varphi = H \sin \varphi$. Zieht man $CD \perp AB$ (diese Senkrechte fehlt in Fig. 117), so kommt $H_1 = AD$. Der geometrische Ort aller der Punkte, bis zu welchen ein Körper in derselben Zeit T gelangt, wenn er von einem bestimmten Punkte aus, ohne Anfangsgeschwindigkeit zu besitzen und ohne Reibung zu erfahren, auf allen nur möglichen schiefen Ebenen herabfällt, ist eine Kugelfläche mit dem Durchmesser $H = \frac{1}{2} g T^2$. Die Wege AJ, AD, AE, AF, AG, AC werden in gleichen Zeiten durchlaufen.

§ 4. Bewegung schief geworfener Körper im Vakuum. Ein gegebener Körper beginne (bei $t = 0$) seine Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 im Punkte O (Fig. 118) und in der Richtung Ov_0, die mit der Horizontalebene Ox den Winkel α einschliefst; wir wollen die Bewegung desselben, die offenbar in der Vertikalebene Ov_0 erfolgen wird, untersuchen. Wir ziehen zu diesem Zwecke die vertikale Linie Oy, wählen Ox und Oy zu Koordinatenachsen und zerlegen die Geschwindigkeit v_0 in ihre Komponenten: eine horizontale $v_0 \cos \alpha$ und eine vertikale $v_0 \sin \alpha$. Die Schwerkraft erteilt dem Körper die vertikale Beschleunigung g und ändert daher nur die vertikale Komponente der Geschwindigkeit, die horizontale dagegen bleibt (im Vakuum) ungeändert.

Fig. 118.



Der Körper wird sich auf einer gewissen Kurve bewegen und zur Zeit t im Punkte P, dessen Koordinaten x und y sind, befinden. Seine Geschwindigkeit in P sei gleich v; die auf die Koordinatenachsen bezogenen Komponenten der letzteren bezeichnen wir mit v_x und v_y. Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs die horizontale Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $v_0 \cos\alpha$, die vertikale Bewegung dagegen eine gleichförmig veränderliche mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin\alpha$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \, . \, t \\ y &= v_0 \sin\alpha \, . \, t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Eliminiert man t aus den Gleichungen (13), so kommt

$$y = x \tan g\,\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel OBC, auf welcher sich also unser Körper bewegt. Die Achse BD derselben ist vertikal. Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist gleich

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2\right)},$$

oder nach (13)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Diese Formel lehrt uns, dafs der Körper, wenn er sich längs OB aufwärts oder längs BC abwärts bewegt und hierbei in derselben Höhe y befindet, er auch dieselbe Geschwindigkeit v besitzt; so ist z. B. in den Punkten P und R die Geschwindigkeit der Gröfse nach die gleiche, aber natürlich von verschiedener Richtung. Formel (15) läfst sich auch aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie ableiten. Im Moment, wo der bewegte Körper die Geschwindigkeit v hat, hat er seit Beginn seiner Bewegung die kinetische Energie $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2$ verloren und die potentielle Energie $py = mgy$, wo p das Gewicht des Körpers bedeutet, erworben. Nach dem erwähnten Prinzip ist $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = mgy$ und hieraus folgt unmittelbar Formel (15).

Den Augenblick T_1, in welchem der höchstgelegene Punkt B (der Scheitel der Parabel) erreicht wird, erhalten wir, wenn wir $v_y = 0$ setzen.

Formel (12) ergiebt die Zeit T_1 des Aufstieges

$$T_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Setzt man in (13) T_1 an Stelle von t, so erhält man die Steighöhe $DB = b$ und die Abscisse $a = OD$ des Punktes B, nämlich

$$a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}; \qquad b = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Für $\alpha = 90^0$ bekommen wir nach (10) die Höhe $b = H$ beim vertikalen Anstieg

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Für $\alpha = 45^0$ kommt $b = \frac{1}{2} H$.

Die Zeit T_2 für die Rückkehr des Körpers zur Horizontalebene Ox wird aus der Gleichung

$$y = v_0 \sin\alpha . T_2 - \frac{1}{2} g T_2^2 = T_2 \left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g T_2\right) = 0$$

bestimmt. Hieraus ergiebt sich nach (16)

$$T_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2 T_1 \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Die Zeit des Abstieges BC ist also gleich der Zeit des Aufstieges OB. Die Geschwindigkeit im Punkte C ist gleich v_0, wie man aus (15) sieht. Die Abscisse $c = OC$ des Punktes C, die sogenannte **Wurfweite**, erhält man durch Einsetzen von T_2 an Stelle von t in den Ausdruck (13) für x; mit Berücksichtigung von (17) ergiebt sich sodann

$$c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

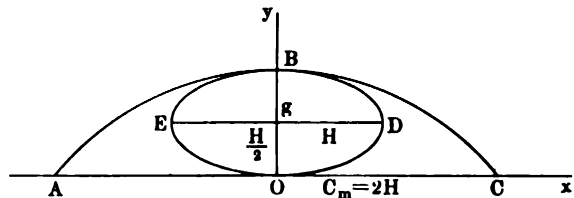
Hieraus folgt, dafs $OC = 2\,OD$ ist. Die **maximale Wurfweite** c_m wird für $\sin 2\alpha = 1$, d. h. für $\alpha = 45^0$ erhalten und ist [vergl. (18)] gleich

$$c_m = \frac{v_0^2}{g} = 2H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Die maximale Wurfweite ist gleich der doppelten vertikalen Steighöhe (wo also $\alpha = 90^0$ ist). Formel (20) lehrt uns, dafs der von O mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ausgehende Körper nach jedem beliebigen Punkte E, der auf Ox liegt, bei zwei verschiedenen Werten von α gelangen kann, wenn nur $OE < c_m$ ist. Diese beiden Werte des Winkels α ergänzen einander zu 90^0. So wird z. B. bei $\alpha = 30^0$ die Parabel OFE, bei $\alpha = 60^0$ die Parabel OgE durchlaufen. Wir

überlassen dem Leser, zu beweisen, dafs die Umhüllende aller Parabeln, welche den Werten des Winkels α von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$ zugehören, ebenfalls eine gewisse Parabel ABC (Fig. 119) ist, deren Achse mit

Fig. 119.



der Achse Oy zusammenfällt und deren Scheitel über O im Abstande $OB = H = \frac{v_0^2}{2g}$ liegt; sie schneidet die x-Achse in zwei Punkten A und C, deren Koordinate $OC = OA = \pm c_m = \pm 2H$ ist. Ihre Gleichung lautet

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Ferner läfst sich leicht beweisen, dafs der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller Parabeln eine Ellipse $BDOEB$ ist, deren kleine Achse mit der Achse Oy zusammenfällt; sie geht durch den Punkt O und durch den über O in der Höhe H gelegenen Punkt B, d. h. durch den Scheitel der einhüllenden Parabel (22). Die kleine halbe Achse $\frac{1}{2}BO$ ist also gleich $\frac{1}{2}H = \frac{v_0^2}{4g}$; die horizontale halbe grofse Achse $\frac{1}{2}ED$ ist gleich $H = \frac{v_0^2}{2g}$, so dafs $ED = OA = OC$ ist. Die Gleichung unserer Ellipse ist

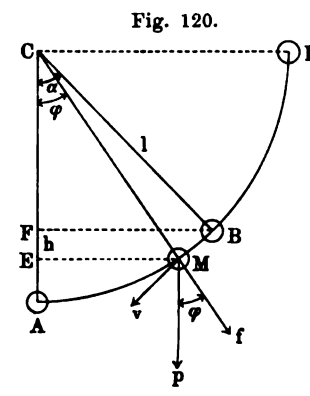
$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{v_0^2}{2g}y = 0 \cdot \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann der Körper für keinen Wert von α einen Punkt, der aufserhalb der Parabel ABC liegt, erreichen. Die Punkte, welche innerhalb der Ellipse $BDOEB$ liegen, können sowohl beim Anstieg wie beim Abstieg erreicht werden; in jedem von ihnen schneiden sich zwei Parabeln. Die Punkte, welche zwischen der Ellipse $BDOEB$ und der Parabel ABC liegen, können vom Körper nur während seines Niederfallens erreicht werden.

§ 5. Mathematisches Pendel. Das mathematische Pendel besteht aus einem materiellen Punkte, dem wir die Masse m und das Gewicht $p = mg$ beilegen und der sich an einem Ende eines idealen

Stabes CM (Fig. 120) befindet, d. h. eines Stabes, der nicht ausgereckt, nicht gebogen werden kann und selbst keine Masse besitzt. Sein anderes Ende ist mit dem Punkte C, um welchen sich das ganze Pendel drehen kann, verbunden. Die Länge des Pendels bezeichnen wir mit $l = CM$; seine Ruhelage sei CA.

Fig. 120.



Nehmen wir an, das Pendel sei um den $\angle ACB = \alpha$ zur Seite bewegt und dann sich selbst überlassen worden. Unter dem Einflusse der Schwerkraft wird es schwingen, wobei wir $AB = l\alpha$ als halben Ausschlag der Schwingung bezeichnen. Die Dauer einer vollen Schwingung, d. h. die Zeit, während welcher das Pendel, von seiner Grenzlage CB ausgehend, zu dieser Lage zurückkehrt, bezeichnen wir mit T. Wir werden nachher die Bezeichnungsweise etwas abändern. Wir bestimmen zunächst die Geschwindigkeit v des Pendelendes für eine Zwischenlage CM, wo der Winkel seiner Ablenkung aus der Gleichgewichtslage $\angle ACM = \varphi$ ist. Fällen wir von B und M die Senkrechten BF und ME auf CA und setzen wir $EF = h$. Die Wucht $\frac{1}{2} m v^2$ des Pendels in diesem Augenblick mufs gleich der Arbeit $ph = mgh$ sein, welche von der Schwerkraft beim Transport der Masse m von B nach M geleistet worden ist. Folglich ist $v^2 = 2\,gh$; $h = CE - CF = l \cos\varphi - l\cos\alpha = l\,(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Hieraus ergiebt sich:

$$v = \sqrt{2\,gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Für den Augenblick, wo das Pendel durch seine Gleichgewichtslage CA geht, bekommen wir die maximale Geschwindigkeit v_0 seines Endpunktes, wenn wir in (24) $\varphi = 0$ setzen, nämlich

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Für sehr kleine Winkel α kann man $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2l}$ setzen, so dafs man für v_0 folgenden Ausdruck erhält

$$v_0 = a\sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Die Spannung F des Stabes in dem Augenblick, welchem die Lage CM und die Geschwindigkeit v entspricht, besteht aus zwei Teilen: aus der Komponente des Gewichtes p, welche in der Richtung

des Stabes wirkt und gleich $p \cos\varphi$ ist und aus der Zentrifugalkraft f, welche gleich $\frac{mv^2}{l}$ ist. Setzt man hier den Wert von v nach (24) ein, so kommt:

$$f = \frac{mv^2}{l} = 2mg(\cos\varphi - \cos\alpha) = 2p(\cos\varphi - \cos\alpha);$$

und hieraus ist

$$F = p\cos\varphi + f = p(3\cos\varphi - 2\cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Im Augenblicke, wo $\varphi = 0$ wird, ist die Spannung gleich

$$F_0 = p(3 - 2\cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Ist $\alpha = 90^0$, d. h. ist das Pendel bis in die Lage CD gebracht, so erhalten wir $F_0 = 3p$. Mithin ist für diesen Fall die Spannung dreimal so grofs wie bei der Ruhelage des Pendels, wo auf den Stab nur das Gewicht einwirkt.

Setzen wir $\alpha = 180^0$; dann ist für $\varphi = 90^0$, wo sich das Pendel in der Lage CD befindet, nach (27) $F = 2p$; F_0 wird nach (28) gleich $F_0 = 5p$.

Sehr kleine Schwingungen. Wir wollen die Richtung AB als die positive betrachten. Die Kraft f, welche auf das Pendelende in der Richtung seiner Bewegung wirkt und die Tangentialbeschleunigung seiner Bewegung hervorruft, sei gleich $f = -p\sin\varphi$.

Setzt man $p = mg$ und läfst φ als sehr kleinen Winkel gelten, so ist $f = -mg\varphi$. Bezeichnet man mit s den Abstand AM des Pendelendes von seiner Mittellage, so ist $l\varphi = s$, folglich

$$f = -m\frac{g}{l}s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Der Form nach ist dieser Ausdruck identisch mit (20) auf Seite 136, wenn man dort

$$c = \frac{g}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

setzt.

Hieraus folgt, dafs man bei sehr kleiner Schwingungsweite in erster Annäherung annehmen kann, dafs das Pendelende eine harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude $a = AB$, jedoch nicht in gerader Linie, sondern längs eines sehr kleinen Kreisbogens ausführt. Formel (16) auf Seite 136 giebt

$$v_0 = a\sqrt{c} = a\sqrt{\frac{g}{l}},$$

was mit (26) übereinstimmt. Ferner giebt Formel (15) auf Seite 136

$$v = \sqrt{2gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}$$

vergl. (24). Es ist aber $v = l\omega_1$ [vergl. (42) auf Seite 72], folglich

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Die Gleichung $\omega = \omega_1$ giebt mithin

$$l = \frac{K}{Ma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Diese sehr wichtige Formel giebt uns die reduzierte Länge eines Pendels. Tragen wir auf der Geraden AF die Strecke $AZ = l$ ab; der Punkt Z heifst dann das Schwingungszentrum des physischen Pendels. Dieser Punkt hat offenbar folgende bemerkenswerte Eigenschaft: wenn alle materiellen Punkte des physischen Pendels, mit Ausnahme des einen in Z vorhandenen, welcher selbst ein mathematisches Pendel darstellt, verschwänden, so würde die Schwingungsdauer dieselbe bleiben, wie sie es ist, während Punkt Z dem physischen Pendel angehört. Alle Punkte des physischen Pendels, welche der Achse näher liegen als Z, schwingen langsamer, die weiter liegenden schwingen schneller, als sie es thun würden, wenn sie die unteren Endpunkte mathematischer Pendel bildeten. Streng genommen haben wir nicht einen, sondern unendlich viele Punkte Z; ihr geometrischer Ort ist ein Teil einer Cylinderfläche pq, deren Achse A, deren Grundflächenradius l ist. Beschränkt man sich auf die Punkte, welche in der durch die Achse A gelegten Vertikalebene AF liegen, so ist ihr geometrischer Ort derjenige Abschnitt einer parallel zur Achse C durch Z gehenden Geraden, welcher innerhalb des Pendels liegt.

Das Schwingungszentrum Z liegt tiefer als der Schwerpunkt, d. h. es ist immer $l > a$. Um dies zu beweisen, möge das Trägheitsmoment K_A des Körpers in Bezug auf seine Rotationsachse A gleich dem K in Formel (38) sein und das Trägheitsmoment in Bezug auf eine parallel zu A durch den Schwerpunkt C gehende Achse möge K_C sein. Auf S. 241 war gezeigt, dafs $K_A = K_C + Ma^2$ ist. Setzt man dies anstatt K in (38) ein, so kommt

$$l = \frac{K_C + Ma^2}{Ma} = a + \frac{K_C}{Ma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

woraus ersichtlich, dafs $l > a$ ist.

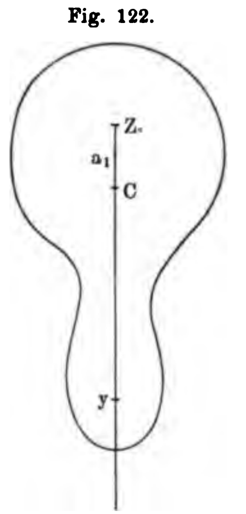
Der Drehpunkt A und das Schwingungszentrum Z besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, konjugierte Punkte zu sein, d. h. ihre Rollen vertauschen zu können. Wenn man das Pendel umkehrt und durch Z die Drehungsachse zieht (parallel zur früheren Achse A), so wird A zum Schwingungs-

zentrum; die reduzierte Länge $l = AZ$, folglich auch die Schwingungsdauer, bleiben hierbei ungeändert.

Zum Beweise bezeichnen wir die Entfernung des Schwingungszentrums vom Schwerpunkte mit $a_1 = CZ$ (Fig. 121). Es ist $a_1 = AZ - AC = l - a$, nach (39) kommt somit

$$a_1 = \frac{K_C}{Ma} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Fig. 122.



Bringen wir nunmehr das Pendel in die umgekehrte, in Fig. 122 dargestellte Lage; hier ist die Drehungsachse Z, der Schwerpunkt C und $CZ = a_1$. Das Schwingunszentrum y befindet sich im unbekannten Abstande $Zy = x$; wir müssen beweisen, dafs $x = l$ ist. Die Gröfse x erhalten wir aus (39), wenn wir a durch a_1 ersetzen:

$$x = a_1 + \frac{K_C}{Ma_1}.$$

Setzen wir hierin a_1 aus (40), so kommt

$$x = \frac{K_C}{Ma} + \frac{K_C Ma}{MK_C} = \frac{K_C}{Ma} + a,$$

oder nach (39) $x = l$, was zu beweisen war.

Da die Schwingungszeit eines physischen Pendels gleich der Schwingungszeit eines mathematischen Pendels mit der nach (38) zu bestimmenden Länge l ist, so finden wir aus (31) für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels bei sehr kleinen Ausschlägen

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

wenn statt Mg das Gewicht P des Pendels eingeführt wird. Formel (32) giebt uns den entsprechenden genauen, Formel (33) einen angenäherten Ausdruck für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Schwingt das Pendel in der Luft, oder ist Reibung an seiner Achse vorhanden, so vollführt es gedämpfte Schwingungen, wie sie auf Seite 156 von uns betrachtet worden sind. Der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Ausschläge giebt uns das logarithmische Dekrement der Pendelschwingungen [vergl. (76) auf Seite 158]. Die allmähliche Verminderung des

Winkels α hat auch eine allmähliche Abnahme der Schwingungsdauer im Gefolge, wie aus Formel (42) hervorgeht, wo das zweite Glied in der Klammer immer positiv ist. Diese Abnahme der Schwingungszeit ist jedoch sehr klein, wenn der Anfangswinkel α klein ist und sie erfolgt sehr langsam, wenn Luftwiderstand und Reibung gering sind, d. h. wenn das logarithmische Dekrement eine kleine Gröfse darstellt.

Neuntes Kapitel.

Von den Dimensionen physikalischer Gröfsen.

§ 1. Definition des Ausdrucks „Dimension". In den vorangehenden Kapiteln dieses Abschnittes haben wir die sogenannten absoluten Einheiten gewisser physikalischer Gröfsen kennen gelernt, soweit letztere in der Mechanik vorkamen. Wir haben dort gesehen, dafs ein „Mafssystem" mit Hülfe dreier Grundeinheiten, als welche von uns die Einheiten der Länge, Masse und Zeit angenommen wurden, aufgestellt werden kann. Setzt man die Proportionalitätsfaktoren in den Formeln, welche die Gröfsen, deren Einheiten bereits gewählt sind, mit einer neuen Gröfse in Beziehung bringen, gleich Eins, so erhält man die Einheit dieser neuen Gröfse; auf diese Weise wird ein System von absoluten abgeleiteten Einheiten erhalten. Je nach der Auswahl der Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit kann man eine unzählige Menge von Systemen abgeleiteter Einheiten erhalten. Wir hatten insbesondere das C. G. S.-System berücksichtigt, dessen Einheiten Gramm, Centimeter und Sekunde sind, und in welchem die Dyne und das Erg als Einheiten der Kraft und Arbeit auftreten.

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, in welcher Weise die abgeleiteten Einheiten von den Grundeinheiten abhängen. Wir wollen mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets die verschiedenartigen Gröfsen (eigentlich ihre Zahlenwerte), mit den grofsen Buchstaben die Einheiten derselben bezeichnen. Die Grundeinheiten sind L, M und T; es sei a irgend eine physikalische Gröfse und A ihre Einheit, die sich zugleich mit den Grundeinheiten L, M und T ändert.

Wenn sich die abgeleitete Einheit A proportional der $p$ten Potenz der Längeneinheit L, der $q$ten Potenz der Masseneinheit M und der $r$ten Potenz der Zeiteinheit T ändert, so sagt man, die Einheit A sei nach der Längeneinheit von der $p$ten, nach der Masseneinheit von der $q$ten und

nach der Zeiteinheit von der *r*ten **Dimension.** Übrigens spricht man der Kürze halber oft von der **Dimension der physikalischen Gröfse selbst,** z. B. von der Dimension der Arbeit, der Dimension der Bewegungsgröfse u. s. f., statt von den Dimensionen der Einheiten dieser Gröfsen zu reden. Den erwähnten Zusammenhang zwischen den abgeleiteten und den Grundeinheiten drückt man symbolisch durch Formeln von nachstehender Form aus

$$[A] = L^p M^q T^r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wie sie in der Folge benutzt werden sollen.

Oft schreibt man auch statt der grofsen Buchstaben kleine, also

$$[a] = l^p m^q t^r.$$

Die Exponenten p, q und r können ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein. So bezeichnet z. B. die symbolische Formel

$$[A] = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}}}{T^2} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dafs die abgeleitete Einheit A irgend einer physikalischen Gröfse a sich proportional der Quadratwurzel der Grundeinheit der Länge L, proportional der $\left(\frac{3}{2}\right)$ten Potenz der Masseneinheit und umgekehrt proportional dem Quadrate der Zeiteinheit ändert. Wenn z. B. zunächst das C. G. S.-System zu Grunde gelegt war und wir darauf als Grundeinheiten das Meter, Centigramm und die Minute annehmen wollten, so würde die abgeleitete Einheit zunächst 10 mal $(\sqrt{100})$ gröfser, dann 1000 mal $(\sqrt{100^3})$ kleiner und zuletzt 3600 mal (60^2) kleiner, im ganzen also 360000 mal kleiner werden. Hängt die abgeleitete Einheit A von irgend einer Grundeinheit gar nicht ab, so sagt man, die Einheit A sei von der **nullten Dimension** nach dieser Grundeinheit.

Symbolische Gleichungen in der Art von (1) nennt man **Dimensionsformeln** der entsprechenden **physikalischen Gröfsen.**

In engem Zusammenhange mit der soeben erläuterten Art, die Beziehungen der abgeleiteten Einheit zu den Grundeinheiten zu bezeichnen, steht eine **besondere Schreibart für die Zahlenwerte der Gröfsen selbst.**

Es enthalte eine Gröfse a in sich n Einheiten, z. B. 7 Einheiten. Würden wir nun $a = 7$ schreiben, so würde es unbestimmt bleiben, was für 7 Einheiten in der Gröfse a, die man durch eine unzählige Menge **absoluter** Einheiten messen kann, enthalten sind. Da nun aber die abgeleitete Einheit durch die Grundeinheit vollständig bestimmt wird, so verschwindet jede Unklarheit, wenn wir dem Zahlenwert der Gröfse, etwa in Klammern, die Benennung der drei Grund-

einheiten beifügen, auf welchen das gewählte Maſssystem beruht. So besagt z. B. der Ausdruck

$$a = 7 \text{ (Fuſs, kg, Min.)} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

daſs in der Gröſse a sieben derartige Einheiten derselben enthalten sind, wie sie sich aus den in Klammern beigefügten Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit ergeben. Ist z. B. irgend eine Arbeit $r = 10$ (cm, g, sec) Einheiten, so heiſst das einfacher, sie ist gleich $r = 10$ Erg.

Es ist jedoch äuſserst vorteilhaft, wenn man die Benennungen der Grundeinheiten nicht einfach nebeneinander in Klammern setzt, sondern sie in der Reihenfolge und mit den Exponenten folgen läſst, mit denen diese Einheiten in der Dimensionsformel der entsprechenden Gröſse auftreten, deren Zahlenwert wir anzuschreiben haben. Nimmt man z. B. an, die Dimensionsformel der Einheit A sei von der Form (2), so schreibt man an Stelle von (3)

$$a = 7 \frac{(\text{Fuſs})^{\frac{1}{2}} (\text{kg})^{\frac{3}{2}}}{(\text{Min.})^2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Eine solche Schreibweise bietet mancherlei Vorteile; wir sehen nicht bloſs, welches die Grundeinheiten des gewählten Systems sind, sondern auch in welcher Weise die Einheit der Gröſse a von den Grundeinheiten abhängt. Der Hauptnutzen obiger Schreibweise wird in § 3 dargethan werden.

§ 2. Dimensionsbestimmungen für die Einheiten verschiedener Gröſsen. Für die Ableitung der Dimensionsformeln werden wir folgenden einfachen Satz brauchen:

Wenn der Zahlenwert a einer Gröſse gleich dem Produkte resp. Quotienten der Zahlenwerte b und c zweier anderer Gröſsen ist, d. h. wenn

$$a = bc \text{ resp. } a = \frac{b}{c} \text{ ist} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und die Dimensionsformeln der Einheiten B und C der Gröſsen b und c die folgenden sind

$$[B] = M^p L^q T^r, \qquad [C] = M^x L^y T^z \quad \ldots \quad (6)$$

so ist die Dimensionsformel der Einheit A der Gröſse a

$$\left.\begin{array}{l} [A] = M^{p+x} L^{q+y} T^{r+z} \\ \text{resp.} \\ [A] = M^{p-x} L^{q-y} T^{r-z} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Die symbolische Dimensionsformel der Gröſse A entsteht also aus den symbolischen Dimensionsformeln der Gröſsen B und C in der-

selben Weise, wie das Produkt resp. der Quotient zweier algebraischer Ausdrücke, welche die Dimensionen der Einheiten von B und C bezeichnen. Beweis: Wenn $a = bc$ resp. $a = \frac{b}{c}$ ist, so ist $a = 1$, falls $b = 1$ und $c = 1$ ist. Hieraus ist ersichtlich, dafs die Einheit A proportional B und direkt resp. indirekt proportional C ist. Es ändert sich aber B proportional der $p$ten Potenz der Grundeinheit M, und C proportional der $x$ten Potenz derselben Grundeinheit M. Ist demnach $a = bc$, so ändert sich die Einheit A proportional der $(p + x)$ten oder für $a = \frac{b}{c}$ proportional der $(p - x)$ten Potenz der Einheit M, und gerade dies ist durch die Formel (7) symbolisch ausgedrückt. Der bewiesene Satz läfst sich für $a = b^n c^m$ verallgemeinern. Symbolisch ausgedrückt haben wir

$$[A] = [B]^n [C]^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7, a)$$

Es kann nun nicht mehr schwer fallen, die Dimensionsformeln für verschiedene Einheiten zu finden.

Die Einheit S der Oberfläche ist proportional dem Quadrate, die Einheit O des Volumens proportional dem Kubus der Längeneinheit. Hieraus folgt

$$[S] = L^2; \quad [O] = L^3 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Beide Einheiten sind von der nullten Dimension nach M und T.

Ein Winkel wird durch das Verhältnis seines Bogens σ zum Radius ϱ gemessen; seine Einheit (der Winkel, für welchen $\sigma = \varrho$ ist, d. h. der Winkel von $57^0 17' 44{,}8''$, vergl. Seite 44) hängt von der Wahl der Grundeinheiten gar nicht ab. Somit ist ein Winkel von der nullten Dimension nach M, L und T.

Die Geschwindigkeit v wird durch das Verhältnis des Weges zur Zeit gemessen; hieraus folgt nach (7)

$$[V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Einheit der Geschwindigkeit (bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurückgelegt wird) mufs offenbar proportional der Längeneinheit und indirekt proportional der Zeiteinheit sein. Entsprechend Formel (4) haben wir demnach beispielsweise zu schreiben:

$$v = 3 \frac{\text{Fuss}}{\text{Min.}}; \quad v = 15 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die tangentiale oder normale Beschleunigung w. Sowohl die eine wie die andere wird durch das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Zeit angegeben, daher ist die Dimension der Beschleunigungs-

einheit

$$[W] = \frac{[V]}{T} = \frac{L}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für die Normalbeschleunigung hatten wir auf Seite 68 den Ausdruck $w = \frac{v^2}{R}$ gefunden, wo R eine lineare Gröfse ist. Das giebt

$$[W] = \frac{[V^2]}{L} = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{L}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11,a)$$

entsprechend der vorhergehenden Formel (11). Wir finden also, dafs die absolute Einheit der Beschleunigung proportional der Längeneinheit und indirekt proportional dem Quadrate der Zeiteinheit ist. So ist z. B. die (m, sec)-Einheit der Beschleunigung 3600 mal gröfser als die (m, Min.)-Einheit der Beschleunigung. Erstere Einheit entspricht einer Bewegung, bei welcher sich die Geschwindigkeit in einer Sekunde um „einen Meter pro Sekunde" vergröfsert, die zweite einer Bewegung, bei der die Geschwindigkeit in einer Minute nur um „einen Meter pro Minute" zunimmt. Die Zahlenwerte verschiedener Beschleunigungen werden z. B. wie folgt geschrieben:

$$w = 4 \frac{\text{Fufs}}{(\text{Stunde})^2}; \quad w = 16 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hier ist die zweite Beschleunigung in C. G. S.-Einheiten ausgedrückt. Für die Beschleunigung g haben wir

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Kraft ist gleich $f = m w$. Hieraus folgt die Dimension der Krafteinheit

$$[F] = M[W] = \frac{ML}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nach allem vorhergehenden wird auch der Sinn folgender Gleichungen klar:

$$\left.\begin{aligned} f &= 8 \frac{\text{Pfund. Meter}}{(\text{Min.})^2} \\ f &= 75 \frac{\text{g cm}}{(\text{sec})^2} = 75 \text{ Dynen} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Es mögen hier zwei überaus wichtige Hinweise folgen.

I. Man hat sich ja davor zu hüten, Symbole, wie die in (10), (12) und (15) gegebenen, mit wirklichen Gröfsen zu verwechseln, die aus Faktoren und Divisoren bestehen. Dieser grobe Fehler wird nicht selten begangen. Das rechts vom Zahlenwerte einer Gröfse Angeschriebene stellt ein Symbol und nichts anderes als ein Symbol dar und soll nur die Benennung der betreffenden Einheiten ersetzen, wie dies aus der zweiten Formel (15) hervorgeht.

II. **Alle Glieder einer Gleichung, d. h. alle Gröfsen, welche durch die Zeichen der Addition, Subtraktion und der Gleichheit miteinander verbunden sind, müssen von derselben Dimension sein.** In der That können nur gleichartige Gröfsen miteinander verglichen werden und solche müssen natürlich von der gleichen Dimension sein. Hierin besitzt man ein bequemes Mittel zur Prüfung von Formeln.

Nehmen wir ein Beispiel: Wir hatten für die Schwingungszeit t eines Pendels die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Beide Seiten dieser Gleichung müssen von derselben Dimension sein. Die linke Seite ist von der Dimension T. Auf der rechten Seite ist L die Dimension von l, $\frac{L}{T^2}$ die Dimension von g [vergl. Formel (11)]; π als unbenannte Zahl ist von der nullten Dimension. Die ganze rechte Seite hat somit die Dimension $\sqrt{\frac{L}{L : T^2}} = \sqrt{T^2} = T$, d. h. dieselbe Dimension wie auch die linke Seite.

Wenn zwei Gröfsen a und b, welche nach ihrer ursprünglichen Definition voneinander verschieden sind, auf Grund irgend welcher Herleitungen, sobald man sie in absoluten Einheiten mifst, numerisch gleich werden, so dafs also $a = b$ wird, so sind notwendigerweise auch ihre Dimensionen gleich, d. h. die Abhängigkeit ihrer Einheiten A und B von den Grundeinheiten L, M und T mufs die gleiche sein. Die Gleichung $a = b$ mufs richtig bleiben, mit welchen absoluten Einheiten A und B wir sie auch messen, d. h. welches auch immer die Grundeinheiten L, M und T sein mögen. Wären die Dimensionen der Einheiten A und B nicht gleich, so müfsten sie sich bei Änderung von L, M und T in verschiedener Weise ändern und es könnten daher ihre Zahlenwerte a und b nicht gleich bleiben. Wir müssen daher auf Grund der Formeln (20) auf Seite 85 und (9) auf Seite 113 erwarten, dafs der Kraftimpuls und die Bewegungsmenge, die erlangte Wucht und die Arbeit von gleicher Dimension sind. Dafs die Dimensionen der Gröfsen $\frac{v}{t}$ und $\frac{v^2}{l}$, durch welche in verschiedenen Fällen ein und dieselbe Gröfse, nämlich die Beschleunigung, ausgedrückt wird, einander gleich sind [vergl. (11) und (11, a)], bestätigt das Gesagte.

Setzen wir nach diesen Abschweifungen die Herleitung der Dimensionen verschiedener Gröfsen fort.

Die **Arbeit** ist gleich $r = fs$, wo f die Kraft, s der Weg ist; die Dimension der Arbeitseinheit ist daher

$$[R] = [F]\, L = \frac{M L^2}{T^2} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Als Beispiel seien folgende Ausdrücke angeführt:

$$r = 2\ \frac{\text{kg (Meile)}^2}{(\text{Stunde})^2}\ ;\ r = 8\ \frac{\text{g (cm)}^2}{(\text{sec})^2} = 8 \text{ Erg.}$$

Die **Wucht** ist gleich $i = \frac{1}{2}\, m\, v^2$; die Dimension ihrer Einheit J ist

$$[J] = M\,[V]^2 = \frac{M L^2}{T^2} \quad \ldots\ldots \quad (16,\text{a})$$

d. h. sie ist gleich der Dimension der Arbeit, wie wir bereits voraussehen konnten. Von derselben Dimension ist auch jede andere Energieform, z. B. die **Wärme** q:

$$[Q] = \frac{M L^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16,\text{b})$$

Der **Kraftimpuls** ist gleich $u = ft$ und daher

$$[U] = [F]\ T = \frac{M L}{T} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Die **Bewegungsmenge** ist gleich $h = m v$; folglich

$$[H] = M\,[V] = \frac{M L}{T} \quad \ldots\ldots \quad (17,\text{a})$$

übereinstimmend mit (17), wie zu erwarten war.

Das **Moment eines Kräftepaares** ist gleich $m' = fl$, wo l der Arm des Kräftepaares ist; hier ist

$$[M'] = \frac{M L^2}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Die Dimension ist dieselbe wie diejenige der Arbeit; es mufs dies auch nach (8) auf Seite 109 so sein, denn der Winkel ist von der nullten Dimension.

Die **Dichte** ist gleich $d = \frac{m}{o}$, wenn o das Volumen ist; folglich

$$[D] = \frac{M}{L^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Die **Winkelgeschwindigkeit** ist $\varphi = \frac{\alpha}{t}$, wo α der Drehungswinkel des Körpers ist; hieraus kommt

$$[\Phi] = \frac{1}{T} = T^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Die **Winkelbeschleunigung** ist $\psi = \frac{\varphi}{t}$; folglich

$$[\Psi] = \frac{1}{T^2} = T^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Das Trägheitsmoment ist $k = m l^2$; folglich

$$[K] = M L^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist gleich $t = \pi \sqrt{\frac{k}{Pa}}$ (S. 253); die Dimension von k war soeben gefunden worden, P ist eine Kraft, a eine Länge. Die Dimension der rechten Seite der Gleichung ist $\sqrt{\frac{M L^2}{\frac{M L}{T^2} \cdot L}} = T$, wie es auch sein muſs.

Schreibt man das allgemeine Gravitationsgesetz in der Form

$$f = C \frac{m m'}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und miſst die Kraft f in absoluten Einheiten, so hängt der Zahlenwert des Koeffizienten C von den Grundeinheiten ab, und man kann daher von der Dimension der Gröſse C reden. Formel (23) giebt $[F] = [C] \frac{M^2}{L^2}$, somit ist nach (14)

$$[C] = \frac{L^3}{M T^2} = M^{-1} L^3 T^{-2} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Setzt man jedoch die Gravitationskonstante $C = 1$, so ist die Kraft, die wir hier zum Unterschiede mit f' bezeichnen wollen, gleich $f' = \frac{m m'}{r^2}$. Die astronomische Krafteinheit F' ist somit von der Dimension

$$[F'] = \frac{M^2}{L^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Gilt für die Arbeit r' der Ausdruck $f' s$, wo s eine lineare Gröſse ist, so erhält man als Dimension der astronomischen Arbeitseinheit R'

$$[R'] = \frac{M^2}{L} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Das Potential zweier Massen aufeinander $\frac{m m'}{r}$ ist, wie es sein muſs, von eben dieser Dimension, vergl. (9, a) und (10) auf Seite 227 und 228.

§ 3. Übergang von einem Maſssytem zum anderen. Nehmen wir irgend eine physikalische Gröſse a an, deren Zahlenwert gleich n sei, falls sie durch die absolute Einheit gemessen ist, welche ihrerseits von den Grundeinheiten λ, μ, τ abgeleitet wurde; man hat dann, um zu einem anderen Maſssystem überzugehen, den Zahlenwert n_1

derselben Gröfse a zu finden, wenn sie durch die absolute Einheit, die von den neuen Grundeinheiten λ_1, μ_1, τ_1 abgeleitet ist, gemessen wird. Es mufs hierbei der Zusammenhang zwischen den früheren und jetzigen Grundeinheiten gegeben sein, z. B. $\lambda = x\lambda_1, \mu = y\mu_1, \tau = z\tau_1$; ebenso die Dimension für die Einheit A der Gröfse a. Es sei z. B.

$$[A] = L^p M^q T^r \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Um nun n_1 zu finden, also zum neuen Mafssystem überzugehen, hat man folgende drei Operationen vorzunehmen:

1. Man hat die Gröfse a nach dem Schema (4) zu schreiben, wobei das Symbol aus den früheren Grundeinheiten besteht [vergl. (27)].

$$a = n.\lambda^p \mu^q \tau^r \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

2. Man hat symbolisch die früheren Grundeinheiten in neuen auszudrücken:

$$a = n.(x\lambda_1)^p (y\mu_1)^q (z\tau_1)^r \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

3. Man hat das Symbol zeitweilig als algebraischen Ausdruck zu betrachten und die Koeffizienten herauszuschaffen, die zwischen den früheren und jetzigen Grundeinheiten vermitteln.

$$a = n x^p y^q z^r . \lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn der neue Zahlenwert n_1 ist gefunden.

$$n_1 = n x^p y^q z^r \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Das daneben stehende $\lambda_1^p \mu_1^q \tau_1^r$ ist wiederum ein blofses Symbol der absoluten Einheit für die Gröfse a im neuen Mafssystem.

Diese eigentümliche Methode, die offenbar gegen den auf Seite 258 gegebenen Hinweis I verstöfst, kann man dennoch gelten lassen, wenn man ein- für allemal nachweist, dafs sie zu richtigen Resultaten führt. Zu diesem Zwecke genügt der Nachweis, dafs, wenn man die Längeneinheit λ durch die neue Einheit λ_1 ersetzt, sich der Zahlenwert n mit x^p multipliziert (wobei p auch negativ sein kann). Wir hatten $\lambda = x\lambda_1$ gesetzt, d. h. wir hatten die Längeneinheit x mal verkleinert; Formel (27) zeigt, dafs infolge dessen die Einheit A der Gröfse a gerade x^p mal kleiner wird, und hieraus geht wiederum hervor, dafs der Zahlenwert der Gröfse a gerade x^p mal gröfser wird. Somit ist die mit Hülfe der drei obengenannten Operationen erhaltene Formel (31) zweifellos richtig.

Beispiel: Eine gewisse Arbeit hat im [Pud, Faden, Minuten]-System [1]) den Zahlenwert 100; welcher ist der Zahlenwert derselben

[1]) Ein Pud ist gleich 40 russ. Pfunden, ein Faden ist gleich 3 Arschin, 1 Arschin = 71,12 cm.

Arbeit im (Pfund, Arschin, Sekunden)-System? Die Dimensionsformel ist nach (16)

$$[R] = \frac{ML^2}{T^2}.$$

Führen wir unsere drei Operationen, von denen im vorhergehenden die Rede war, aus:

1. $$r = 100 \frac{\text{Pud (Faden)}^2}{(\text{Min.})^2}$$

2. $$r = 100 \frac{(40 \text{ Pfund}) (3 \text{ Arschin})^2}{(60 \text{ Sek.})^2}$$

3. $$r = \frac{100.\ 40.\ 9 \text{ (Pfund) (Arschin)}^2}{3600 \text{ (Sek.)}^2}$$

oder gekürzt

$$r = 10 \frac{\text{Pfund (Arschin)}^2}{(\text{Sek.})^2}.$$

Der gesuchte neue Zahlenwert für die Arbeit ist also 10. In der Praxis brauchen wir unsere drei Operationen nicht so streng zu sondern. Lassen wir noch einige Beispiele folgen.

I. Es sei der Zahlenwert der Beschleunigung g der Erdschwere im (Fufs, Pfund, Minuten)-System zu finden, wobei ein Centimeter $=$ 0,0328 Fufs angenommen sei.

$$g = 980 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} = 980 \frac{0{,}0328 \text{ Fufs}}{(^1/_{60} \text{ Min.})^2} = 980 \times 0{,}0328 \times 3600 \frac{\text{Fufs}}{(\text{Min.})^2},$$

oder

$$g = 115\,718 \frac{\text{Fufs}}{(\text{Min.})^2}.$$

II. Wieviel C. G. S.-Einheiten der Beschleunigung, der Kraft und Arbeit sind in den entsprechenden Gaussschen Einheiten enthalten, bei welchen als Grundeinheiten Millimeter, Milligramm und Sekunde auftreten?

Die Gausssche Beschleunigungseinheit ist $= 1 \frac{\text{mm}}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{0{,}1 \text{ cm}}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}1 \frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2} = 0{,}1$ C. G. S.-Einheiten der Beschleunigung.

Die Gausssche Krafteinheit ist $= 1 \frac{\text{mm mg}}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{(0{,}1 \text{ cm})(0{,}001 \text{ g})}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}0001 \frac{\text{cm g}}{(\text{sec})^2} = 0{,}0001$ Dyne.

Die Gausssche Arbeitseinheit ist $= 1 \frac{\text{mg}(\text{mm})^2}{(\text{sec})^2} = 1 \frac{0{,}001 \text{ g} (0{,}1 \text{ cm})^2}{(\text{sec})^2}$ $= 0{,}00001 \frac{\text{g} (\text{cm})^2}{(\text{sec})^2} = 0{,}00001$ Erg.

III. Zwei (Meter, Kilogramm, $^1/_2$ Stunden)-Einheiten der Arbeit sollen in Erg ausgedrückt werden.

$$2\,\frac{\text{kg}\,(\text{m})^2}{(^1/_2\ \text{Stunde})^2} = 2\,\frac{(1000\,\text{g})\,(100\,\text{cm})^2}{(1800\,\text{sec})^2} = \frac{2\cdot 1000\cdot (100)^2\,\text{g}\,(\text{cm})^2}{(1800)^2\,(\text{sec})^2}$$

$$= 6{,}17\,\frac{\text{g}\,(\text{cm})^2}{(\text{sec})^2} = 6{,}17\ \text{Erg}.$$

IV. Die Dichte des Quecksilbers im (Meter, Kilogramm, Jahr)-System zu finden. Im C. G. S.-System ist die Dichte des Quecksilbers 13,6, s. S. 90 und (19) S. 260.

$$13{,}6\,\frac{\text{g}}{(\text{cm})^3} = 13{,}6\,\frac{0{,}001\,\text{kg}}{(0{,}01\,\text{m})^3} = \frac{13{,}6\,.\,0{,}001\,\text{kg}}{(0{,}01)^3\,(\text{m})^3} = 13\,600\,\frac{\text{kg}}{(\text{m})^3}.$$

V. Die Wucht eines Körpers, dessen Masse gleich 5 Solotnik [1]) ist und der sich mit einer Geschwindigkeit von 2 Faden in 7 Minuten bewegt, in C. G. S.-Einheiten zu finden. Nimmt man als Grundeinheiten 2 Faden, 5 Solotnik und 7 Minuten an, so ist der Zahlenwert der Wucht des gegebenen Körpers $\frac{1}{2}$ [vergl. S. 103 und S. 260 (16, a)]; daher ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{(5\ \text{Solotnik})\,(2\ \text{Faden})^2}{(7\ \text{Minuten})^2} = \frac{1}{2}\,\frac{(5\,.\,4{,}266\,\text{g})\,(2\,.\,213{,}36\,\text{cm})^2}{(7{,}60\,\text{sec})^2}$$

$$= \frac{5\,.\,4{,}266\,.\,4\,.\,(213{,}36)^2}{2\,.\,49\,.\,3600}\,\frac{\text{g}\,(\text{cm})^2}{(\text{sec})^2} = 11{,}04\ \text{Erg}.$$

VI. Die Megadyne hat im (Zoll, Pfund, x Sekunden)-System den Zahlenwert 100. Es soll die Zeiteinheit für dieses System gefunden werden, wenn 1 Zoll = 2,5 cm und 1 Pfund = 410 g ist. Eine Megadyne ist gleich 10^6 Dynen, somit ist

$$10^6\,\frac{\text{cm}\,.\,\text{g}}{(\text{sec})^2} = 100\,\frac{\text{Zoll, Pfund}}{(x\ \text{sec})^2} = 100\,\frac{(2{,}5\,\text{cm})\,(410\,\text{g})}{(x\ \text{sec})^2}$$

$$= \frac{100\,.\,2{,}5\,.\,410}{x^2}\,\frac{\text{cm g}}{(\text{sec})^2}.$$

Der erste und letzte Ausdruck geben $10^6 = \frac{100\,.\,2{,}5\,.\,410}{x^2}$; woraus sich $x = 0{,}32$ ergiebt; die gesuchte Zeiteinheit ist also gleich 0,32 Sekunden.

§ 4. Absolute Mafssysteme, welche nicht auf die Grundeinheiten L, M und T zurückgehen. Während wir gezeigt hatten, dafs man ein absolutes Mafssystem auf drei willkürlich gewählten Grundeinheiten aufbauen kann, hatten wir doch als solche immer die Einheiten der Länge (L), Masse (M) und Zeit (T) gewählt. Es wäre

[1]) 1 Solotnik = 4,266 g, 1 Faden = 213,36 cm.

indes auch möglich, die Einheiten dreier anderer Gröfsen als Grundeinheiten anzunehmen. Wir wollen in Kürze auf diesen Gegenstand eingehen, um so mehr, als man in letzterer Zeit sich wiederholt verschiedener Mafssysteme bedient hat, welche nicht auf den Einheiten M, L und T basieren.

Die Auswahl der drei Grundeinheiten kann nicht völlig willkürlich geschehen; es müssen diese drei Einheiten voneinander unabhängig sein, d. h. es darf nicht die eine von ihnen durch die beiden anderen bestimmt werden auf Grund irgend einer Formel, in welcher der Proportionalitätsfaktor beim Entwerfen des Mafssystems gleich Eins gesetzt wird. So können z. B. die Einheiten der Masse, Beschleunigung und Kraft oder der Länge, Kraft und Arbeit oder der Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung u. s. w. nicht zu Grundeinheiten gewählt werden, denn in allen aufgeführten Beispielen wird eine von den Einheiten (etwa die dritte) durch die beiden anderen bestimmt. Sind die drei Grundeinheiten gewählt, so hat man zunächst die Dimensionen der Längen-, Massen- und Zeiteinheit, die jetzt als abgeleitete Einheiten auftreten, zu bestimmen, worauf sich dann die Dimensionen der übrigen Einheiten leicht nach § 2 bestimmen lassen.

Erinnert man sich der Beziehungen, welche unsere Dimensionsformeln ausdrücken, so kann man leicht einsehen, dafs man diese Formeln zum gewünschten Zwecke wie einfache Gleichungen zu behandeln hat. Wir wählen hierfür ein Beispiel zur Erläuterung.

Als Grundeinheiten seien die Einheiten der Geschwindigkeit V, der Beschleunigung W und der Kraft F gewählt. Es sollen die Dimensionen der übrigen Einheiten gefunden werden. Wir hatten die Formeln

$$[V] = L\,T^{-1}; \quad [W] = L\,T^{-2}; \quad [F] = M\,L\,T^{-2}.$$

Hier sind V, W und F die Grundeinheiten, L, M und T die abgeleiteten Einheiten und deshalb geben uns dieselben Proportionalitäten, welche zwischen diesen sechs Gröfsen bestehen, folgende Formeln:

$$[L]\,[T]^{-1} = V; \quad [L]\,[T]^{-2} = W; \quad [M]\,[L]\,[T]^{-2} = F.$$

Löst man diese symbolischen Formeln, wie Gleichungen nach $[L]$, $[M]$ und $[T]$ auf, so erhält man

$$[L] = V^2\,W^{-1}; \quad [M] = F\,W^{-1}; \quad [T] = V \,.\, W^{-1} \quad . \quad (32)$$

Ferner erhalten wir als Dimensionen für die

Einheit der Kraft	$[R]$	$= V^2 F\,W^{-1}$
„ „ Fläche	$[S]$	$= V^4\,W^{-2}$
„ des Volumens	$[O]$	$= V^6\,W^{-3}$
„ der Winkelbeschleunigung .	$[\Psi]$	$= V^2\,W^2$

Einheit der Bewegungsmenge . . $[H]$ $\Big\} = V F W^{-1}$
„ des Kraftimpulses . . . $[U]$
„ der Dichte . . . . . . $[D] = F V^{-6} W^2$
„ des Trägkeitsmomentes . . $[K] = F V^4 W^{-3}$

Zur Übung für den Leser sei hier eine Tabelle begonnen, wo dem Maſssystem die Einheiten der Kraft F, der Arbeit R und der Dichte D zu Grunde liegen; der Leser mag das Angeschriebene auf seine Richtigkeit hin prüfen und eine Tabelle analog der vorhergehenden für die Dimensionen der Einheiten aller ihm bekannten Gröſsen entwerfen. Es ist.

$$[L] = R F^{-1};\quad [M] = D R^3 F^{-3};\quad [T] = D^{\frac{1}{2}} R^2 F^{-\frac{5}{2}};$$

$$[W] = D^{-1} R^{-3} F^4;\quad [H] = D^{\frac{1}{2}} R^2 F^{-\frac{3}{2}}$$

u. s. w.

Litteratur des zweiten Abschnittes.

Die Mechanik bildet an höheren Lehranstalten ein besonderes Lehrfach; sie zerfällt in die theoretische und praktische Mechanik mit ihren zahlreichen Unterdisziplinen. Auf die Litteratur dieser selbständigen, umfangreichen Wissenschaften kann natürlich an dieser Stelle nicht hingewiesen werden, wohl aber seien hier einige Werke genannt, welche die elementare Mechanik etwa in dem Umfange behandeln, in welchem sie bei uns in einem Kolleg über Physik Berücksichtigung finden. Es sind dies:

P. P. van der Vliet: Einleitung in die Mechanik (russ.). St. Petersburg 1886.
N. Schiller: Grundlagen der Physik. Bd. I (russ.). Kiew 1884.
N. Asbeleff: Grundlagen der Mechanik (russ.). St. Petersburg 1892.
O. Chwolson: Die Lehre von der Bewegung und den Kräften (russ.). St. Petersburg 1893.
W. Voigt: Elementare Mechanik. Leipzig 1889.
J. G. Macgregor: Elementary treatise on kinematics and dynamics. London 1887.
Antomari: Cours de mécanique. 1895.
H. Klein: Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1872.
H. Streintz: Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.
Cl. Maxwell: Substanz und Bewegung. Braunschweig 1881.
E. Mach: Die Mechanik. Leipzig 1889.
H. Helmholtz: Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Leipzig 1898.

Zum 3. Kapitel.

Arbeit und Energie.

In der Wärmelehre wird die Litteratur angeführt werden, die sich auf Wärme als besondere Energieform bezieht. Hier dagegen seien Angaben über die Litteratur gemacht, soweit sie sich überhaupt auf Energielehre bezieht.

Rob. Mayer: Bemerkungen über Kräfte der unbelebten Natur. Ann. d. Chem. u. Pharm. 1842, Bd. 42, S. 233, auch abgedruckt in seiner „Mechanik der Wärme".
H. Helmholtz: Die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. Wiss. Abhandl. I, S. 12. Ostwalds Klassiker Nr. 1.
M. Planck: Erhaltung der Energie. Leipzig 1887.
B. Stewart: Conservation of Energy; ins Deutsche übertragen unter dem Titel: Erhaltung der Energie. 2. Aufl. Leipzig 1883.
Januschke: Erhaltung der Energie. Troppau 1884.
H. Krebs: Erhaltung der Energie. München 1878.
R. Colson: L'energie et ses transformations. Paris 1889.
M. Zwerger: Die lebendige Kraft und ihr Mafs. München 1885.
G. Helm: Die Lehre von der Energie. Leipzig 1887.
E. Mach: Die Geschichte des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872.
A. Secchi: Die Einheit der Naturkräfte, deutsch von Schultze. 2. Aufl. Leipzig 1884.

Zum 4. Kapitel.

Harmonische Schwingungsbewegung.

Abhandlungen, in welchen die Eigenschaften der harmonischen Schwingungsbewegungen, sowie die Entstehung und Ausbreitung von Strahlungen untersucht werden, findet man in Werken über die Lehre vom Schall und Licht. Von der Interferenz der Schwingungen und Strahlen handeln:

Thomas Young: Philosophical Transactions 1802, p. 12 und 393 (On the theory of light and colours).
Fresnel: Oeuvres compl. I, p. 32, 51 u. a.

Das Huygenssche Prinzip:

Huygens: Traité de la lumière. Leyden 1690. Ostwalds Klassiker Nr. 20.
Fresnel: Oeuvres compl. I, p. 365.

Das Dopplersche Prinzip:

Doppler: Über das farbige Licht der Doppelsterne. Prag 1842.

Die weitere Litteratur, welche noch hierher gehören könnte, ist im zweiten Bande angegeben.

Zum 9. Kapitel.

Dimensionen der physikalischen Gröfsen und Lehre von den Mafseinheiten.

D. Everett: Units and physical constants. London 1879.
O. Chwolson: Die Lehre von den absoluten Einheiten (russ.). St. Petersburg 1887.
Schoentjes: Les grandeurs électriques et leurs unités. Paris 1884.
H. Herwig: Physikalische Begriffe und absolute Mafse. Leipzig 1880.
Blavier: Les grandeurs électriques. Paris 1881.
Serpieri: Die absoluten Mafse (aus d. Ital. übers.). Leipzig 1885.
A. Czögler: Dimensionen und absolute Mafse. Leipzig 1889.
O. Chwolson: Das metrische System der Mafse und Gewichte und ihre Einführung in Rufsland (russ.). St. Petersburg 1884.

Dritter Abschnitt.

Mefsapparate und Mefsmethoden.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen über physikalische Messungen.

§ 1. **Absolute und relative Messungen.** Wie wir sahen (S. 3), geben uns Beobachtung und Experiment die Möglichkeit, unsere Kenntnisse der Naturerscheinungen zu erweitern; sie führen uns zur Entdeckung neuer Erscheinungen, zum genaueren Studium derselben und zur Feststellung der gesetzmäfsigen Beziehungen, welche sie verbinden. Somit ist die Aufgabe, zu deren Lösung wir Beobachtung und Experiment anstellen, eine zweifache: sie kann entweder die qualitative oder die quantitative Seite der Erscheinung berühren. Rein qualitative Beobachtungen und Versuche werden jedoch nur relativ selten angestellt. Fast immer schliefsen sich an dieselben mehr oder weniger eng auch quantitative Untersuchungen an, um die näheren Bedingungen festzustellen, unter denen die beobachtete qualitative Seite der Erscheinung hervortritt und diejenigen Daten zu erhalten, durch welche eben diese qualitative Seite genau bestimmt wird. Die gesetzmäfsigen Beziehungen aber werden, wie dies im § 7 auf Seite 21 gesagt war, durch das Studium der quantitativen Seite der Erscheinungen enthüllt, indem Messungen verschiedener Gröfsen, welche für die Entstehungsbedingungen wichtig sind oder manche Seiten der Erscheinungen charakterisieren, vorgenommen werden.

Demnach spielt die Messung verschiedener Gröfsen bei physikalischen Untersuchungen eine hervorragende Rolle. Die Mefsmethoden werden in zahlreichen Spezialwerken behandelt, doch sind, um sich ihrer zu bedienen, nicht blofs Kenntnisse, sondern auch eine gewisse Fertigkeit erforderlich. Natürlich kann letztere nur durch die Aus-

führung von Messungen selbst und während derselben erworben werden; Bücher können unmöglich alle diejenigen Winke und Hinweise enthalten, die für die Vornahme solcher Arbeiten sich als notwendig erweisen.

Gewissenhaftigkeit, Geduld und Arbeitsfreudigkeit, das sind die Eigenschaften, die ein jeder besitzen mufs, der sich an physikalische Messungen machen will; sie erfordern aber auch äufserste Vorsicht und Umsicht. Nicht blofs der gewöhnlichen Vorsicht bedarf es, ohne welche leicht die Apparate beschädigt, ja in manchen Fällen uns und Anderen Schaden zugefügt werden könnte; es bedarf auch ganz besonders einer weitgehenden Umsicht bei Wahl der Mefsmethode, der Aufstellung der Mefsapparate und schliefslich bei dem Versuche, aus den erhaltenen Resultaten der Messungen irgend welche Schlüsse zu ziehen.

Wir können in diesem Buche nicht auf alle Einzelheiten eingehen, die in den entsprechenden Lehrbüchern, welche die physikalischen Messungen zu ihrem speziellen Gegenstande haben, behandelt werden; wir müssen uns hier vielmehr auf einige Bemerkungen beschränken, die von grundlegender Bedeutung sind, sobald man es mit Messungen zu thun hat; ferner werden wir auf die wichtige Frage, wie die Beobachtungsresultate rechnerisch zu behandeln sind, eingehen. Wir werden uns endlich mit einigen Hülfsapparaten und einigen der wichtigsten Mefsmethoden bekannt machen, die zur Messung von Längen, Winkeln, Volumina, Massen, Kräften und Zeit dienen. Gesondert werden wir sodann die Methoden zur Bestimmung der Beschleunigung g der Schwerkraft und der mittleren Erddichte behandeln.

Eine physikalische Gröfse messen (vergl. Seite 16), heifst bestimmen, wieviel mal in ihr eine als Einheit gewählte Gröfse derselben Art enthalten ist.

Man pflegt absolute und relative Messungen zu unterscheiden. Die absoluten Messungen geben uns den Zahlenwert der zu messenden Gröfse in genau festgesetzten, vollkommen bekannten Einheiten, z. B. die Länge in Metern, die Kraft in Dynen, die Wärmemenge in Kalorien u. s. w. Die relativen Messungen können von dreierlei Art sein:

1. Für die zu messende Gröfse wird ihr Zahlenwert in sogenannten „willkürlichen Einheiten" ermittelt, d. h. in Einheiten, deren Gröfse von zufälligen Eigenschaften des Mefsapparates abhängen, von seiner Aufstellung u. s. w. Das Verhältnis zwischen diesen Einheiten und den allgemein üblichen braucht uns hierbei nicht bekannt zu sein. Messungen solcher Art können uns das Verhältnis zweier gleichzeitig zu messender Gröfsen sehr genau liefern, ferner die relative Änderung einer von ihnen u. s. w. Der Zahlenwert a, den man bei einer derartigen Messung der Gröfse erhält, ist dem Zahlenwert b, den eine

absolute Messung ergeben hätte, proportional. Der Proportionalitätsfaktor C in der Formel

$$b = Ca \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

heifst Reduktionsfaktor. Er ist im allgemeinen selbst für Apparate derselben Art verschieden, da letztere immer gewisse Verschiedenheit gegeneinander aufweisen werden. Der Faktor C kann in einigen Fällen durch gesonderte oder sogar gleichzeitige Messungen irgend einer Gröfse nach zwei Methoden bestimmt werden, von welchen eine ihren Zahlenwert b in bestimmten und bekannten, die andere ihren Zahlenwert a in „willkürlichen" Einheiten ergiebt. Ist der Reduktionsfaktor C einmal nach Formel (1) bestimmt worden, so kann man mit Hülfe derselben Formel jedesmal die Messungsresultate, die uns die Zahlen a geben, auf das „absolute" Mafs reduzieren. Die Bestimmung von C mufs von Zeit zu Zeit wiederholt werden, da unmerkliche Veränderungen am Apparate selbst, in seiner Aufstellung oder den äufseren Einflüssen eine Änderung jener willkürlichen Einheit zur Folge haben können, für welche der Apparat den Zahlenwert a giebt. Besondere Komplikationen treten meist dann auf, wenn die erwähnte Einheit von äufseren Ursachen, z. B. von der Temperatur, abhängt.

2. Die relative Messung reduziert sich auf eine einfache Bestimmung des Verhältnisses zweier Gröfsen x und y, von denen eine, z. B. x, als „willkürliche Einheit" gelten kann. Ist es möglich, eine absolute Messung der Gröfse x vorzunehmen und ist man sicher, dafs während dieser Messung und der Vergleichung mit y keine Änderung von x erfolgt ist, so hat man auch y in absolutem Mafse gemessen.

3. Zu den relativen Messungen gehören auch die Variationsmessungen, bei denen nicht die Gröfse selbst gemessen wird, sondern blofs deren Änderungen mit der Zeit, Temperatur und anderen Faktoren, von welchen die Gröfse abhängt. Werden aufser solchen Ändederungsmessungen von Zeit zu Zeit auch absolute Messungen vorgenommen, so erhält man auch für die Zwischenzeiten, wo die Änderungen der Gröfse bestimmt wurden, deren Werte in absolutem Mafse.

§ 2. Etalons und Mefsinstrumente. Ein Körper, von dem eine ihn charakterisierende physikalische Gröfse mit aller nur erreichbaren Genauigkeit bekannt ist, heifst, wenn er zur Vergleichung dieser Gröfse mit anderen Gröfsen derselben Art dienen kann, „Etalon" dieser Gröfse. So können z. B ein Stab, dessen in Metern ausgedrückte Länge genau bekannt ist oder ein Draht, dessen galvanischer Widerstand in Widerstandseinheiten (in Ohms) mit gröfstmöglicher Sorgfalt bestimmt ist, als Etalons bei Messungen der Länge, resp. des galvanischen Widerstandes irgend eines anderen Körpers dienen. Gewöhnlich sucht man zu erreichen, dafs die „Gröfse des Etalons" entweder der Einheit selbst oder einem

gewissen Vielfachen oder Teile derselben möglichst nahe komme. So hat z. B. das Etalon der Länge — der Normalmafsstab — entweder die Länge der ganzen Längeneinheit, oder eines bestimmten Vielfachen oder eines einfachen Teiles ($^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$) derselben; das Gleiche gilt vom Etalon des Widerstandes etc.

Zur Ausführung der Messungen dienen besondere Instrumente, die je nach der Art der mit ihnen zu mefsenden Gröfse oder der in Anwendung gebrachten Messungsmethode verschieden sind. Eine dritte Verschiedenheit der Instrumente entspringt dem Umstande, dafs die Werkstätten, in denen sie verfertigt werden, diese oder jene Konstruktion, Anordnung der einzelnen Teile u. s. w. bevorzugen. Im Laufe der Zeit werden an den Mefsinstrumenten verschiedene Änderungen angebracht, die übrigens nicht immer als Verbesserungen gelten können.

Je nach der Art der Messung, für welche sie bestimmt sind, kann man „absolute", „relative" und „Variationsinstrumente" unterscheiden. Hinsichtlich der Benennungen für die verschiedenen Instrumente sei hier bemerkt, dafs viele von ihnen auf die Silben „skop", „meter" und „graph" endigen.

Die Instrumente, deren Benennungen mit der Silbe „**skop**" endigen, dürften eigentlich streng genommen nicht zu den Mefsinstrumenten gezählt werden, wenngleich sie bisweilen bei Messungen, insbesondere nach der später zu erwähnenden „Nullmethode", eine wichtige Rolle spielen. Eine unmittelbare Messung irgend einer Gröfse gestatten sie nicht; sie zeigen nur an, welches Vorzeichen eine gegebene Gröfse hat oder ob dieselbe gleich Null oder von Null um ein Mefsbares verschieden ist (z. B. das Elektroskop, Galvanoskop). Hierher gehören auch die Apparate, die blofs zum Betrachten von irgend welchen Dingen dienen (das Mikroskop, Teleskop); solche Instrumente haben entweder gar nichts mit Messungen zu thun oder sie bilden nur gewisse Teile von wirklichen Mefsinstrumenten.

Apparate mit der Bezeichnung „**meter**" sind wirkliche Mefsinstrumente und dienen mehr oder weniger unmittelbar zur Bestimmung des Zahlenwertes der zu messenden Gröfse (Elektrometer, Galvanometer, Barometer, Spektrometer, Hygrometer, Kalorimeter u. s. w.). Apparate mit der Bezeichnung „**graph**" bilden die besondere Gruppe von „selbstregistrierenden Apparaten", die entweder ununterbrochen oder in bestimmten, meist gleichen Zeitintervallen das Mafs der einen oder anderen Gröfse aufzeichnen. Die Mehrzahl der hierher gehörigen Apparate (jedoch nicht alle) sind Variationsinstrumente: sie verzeichnen die Änderung, welche eine Gröfse innerhalb einer gewissen Zeit im Vergleich zu ihrem Wert für einen bestimmten Anfangsmoment erfahren hat (Barograph, Magnetograph, Thermograph u. s. w.). Dagegen gehört z. B. der Anemograph, welcher unmittelbar das Azimut

der Windrichtung und die Windstärke (Windgeschwindigkeit) verzeichnet, offenbar nicht zu den Variationsinstrumenten.

§ 3. Die Manipulationen beim Messen. Jede Messung einer physikalischen Gröſse zerfällt in eine Reihe verschiedener Manipulationen, die zusammengenommen zu den Daten führen, aus welchen entweder unmittelbar oder durch verschiedene Kombinationen und Rechnungen der gesuchte Zahlenwert der zu messenden Gröſse sich ergiebt.

Es ist unmöglich, eine genaue Übersicht über alle die Manipulationen zu geben, mit denen man es bei Ausführung physikalischer Messungen zu thun hat; über diesen Gegenstand muſs sich der Leser in den oben erwähnten Spezialwerken orientieren.

Bei der überwiegenden Mehrzahl physikalischer Messungen hat man es mit drei aufeinander folgenden Operationen zu thun: der Aufstellung, der Beobachtung und der Ablesung.

I. Die Aufstellung besteht darin, daſs man den Apparaten den rechten Ort und die rechte Stellung anweist und sie in geeigneter Weise anordnet, wobei auf äuſsere und innere Umstände zu achten ist, die sowohl von den Eigenschaften der benutzten Apparate, als auch von den Besonderheiten derjenigen Erscheinungen abhängen, die der Beobachtung unterworfen werden. Sehr oft muſs ein Apparat so aufgestellt werden, daſs eine gewisse Ebene desselben horizontal wird. Eine solche Aufstellung wird häufig unter Zuhülfenahme der Libelle (s. u.) durch Drehen der Fuſsschrauben des Apparates erzielt. Ferner muſs ein Apparat so aufgestellt sein, daſs die Messungen mit ihm überhaupt ausführbar und zwar bequem ausführbar seien, zu welchem Zwecke gewisse Teile desselben eine ganz bestimmte Lage haben müssen. Zu den äuſseren Aufstellungsbedingungen, auf welche man ganz besonders acht zu geben hat, gehört, daſs die Aufstellung eine feste sei: der Apparat darf keinen zufälligen Erschütterungen ausgesetzt sein, die z. B. seine horizontale Stellung allmählich ändern können. Dazu stellt man ihn z. B. auf besondere, an der Wand angebrachte Konsolen oder auf steinerne Pfeiler mit fester Unterlage oder auf Mauerpfosten mit gesondertem Fundament. In vielen Fällen kann auch der Fuſsboden selbst hinlänglich fest sein, wie z. B. wenn er aus in Asphalt gelegtem Parkett besteht, der auf gewölbten Decken ruht. Ferner ist bei der Aufstellung zu achten auf den Einfluſs der Umgebung; hierher gehört das Vorhandensein von Luftströmungen, auftretende Temperaturwechsel (durch die Nähe eines Ofens, eines Fensters, des Beobachters), vorhandene Luftfeuchtigkeit (welche z. B. die Länge der Kokonfäden beeinfluſst) u. s. w.; die gegenseitige Beeinflussung der Apparate; der Einfluſs von benachbarten Eisenmassen oder Leitern, auf welchen elektrische Ströme auftreten (auf magnetische

Apparate) u. s. f. — Die Aufstellung mufs von der allergenauesten Untersuchung aller Nebenumstände begleitet sein, die auf die Angaben des Apparates von Einflufs sein können; solche Umstände müssen dann entweder beseitigt werden oder es mufs die Gröfse ihres Einflusses mit in Rechnung gezogen werden. Indefs mufs hierbei berücksichtigt werden, bis zu welchem Grade der Genauigkeit die Messungen überhaupt geführt werden können, um nicht auf die Vorbereitungen eine unnötige Mühe zu verwenden.

II. Die Beobachtung besteht bei sehr vielen Messungen in einer derartigen allmählichen Änderung eines Apparatteils oder der Lage eines aufserhalb befindlichen Gegenstandes, bei welcher irgend ein bestimmtes Resultat zu Tage tritt. Der Zeitmoment, wo dieses geschieht, wird meist durch direktes Hinsehen, bisweilen auch nach dem Gehör oder Gefühl (s. u. das Sphärometer) bestimmt. Eine solche Art von Beobachtung nennt man die „Einstellung" dieses oder jenes Apparatteiles. Diese Operation mufs möglich sein, woraus jedoch nicht folgt, dafs sie einem Jeden auch gleich das erste Mal gelingt. Eine solche Einstellung gelingt vielmehr oft nur durch langdauernde Übung und eine genaue Messung, d. h. das möglichst richtige Auffassen des Augenblicks, wo irgend ein bestimmtes Resultat erlangt wird, kann demnach, wie bereits früher angedeutet wurde, nur einem „geschickten" Beobachter gelingen.

Die Verstellung eines Apparatteiles oder eines aufserhalb des Apparates befindlichen Gegenstandes wird in sehr vielen Fällen durch Drehung eines Schraubenkopfes und nur selten aus freier Hand (wie bei einigen Photometern) vorgenommen. Hierbei ist es meist möglich, die Einstellung von zwei entgegengesetzten Seiten vorzunehmen und dadurch, dafs man sie zweimal macht, das eine Mal von der einen, das andere Mal von der entgegengesetzten Seite, ein genaueres Resultat zu erhalten. Besonders hat man hierbei auf den sogenannten toten Gang der Schrauben zu achten; hatte man die Schrauben zuerst nach der einen Seite gedreht, wobei sich ein gewisser Teil des Apparates verschob, und dreht man sie darauf zurück, so beginnt sich der von der Schraube geführte Teil des Apparates nicht auch gleichzeitig nach der anderen Seite zu bewegen, so dafs die Gröfse der Schraubendrehung nicht als Mafs für die Verschiebung des betreffenden Apparatteiles dienen kann. Der Experimentator hat nun zu entscheiden, auf welche Weise in jedem gegebenen Falle der schädliche Einflufs des toten Ganges zu eliminieren ist; er kann entweder, bei jeder Messung zwei Beobachtungen, die auf entgegengesetzten Seiten liegen, machen, d. h. die Schraube erst vorwärts, dann rückwärts drehen oder eine Reihe aufeinander folgender Messungen vornehmen, indem er die Schraube immer nach derselben Seite hin dreht.

Im vorhergehenden war darauf hingewiesen worden, dafs die Ver-

schiebung eines Apparatteiles so lange vorgenommen wird, bis man mit dem Auge, Ohre oder Gefühl ein gewisses, ganz bestimmtes Resultat erlangt hat. Dieses Resultat kann seinem Charakter nach ein sehr verschiedenartiges sein; meist besteht es darin, dafs zwei beobachtete Gröfsen, extensive Gröfsen (wie Länge, Winkel) oder intensive Gröfsen (wie Schallstärke, Helligkeitsgrad) einander numerisch gleich gemacht werden sollen. Hierher gehört auch der Fall, wo eine gleiche Färbung zweier Flächen, gleiche Höhe zweier Töne und andere qualitative Übereinstimmungen erlangt werden sollen. Wir sind eben nicht im stande, den Augenblick zu erfassen, wo zwei Gröfsen, welche wir beobachten, sich in einem bestimmten Verhältnisse zu einander befinden, z. B. eine von ihnen gerade zweimal intensiver ist als die andere. Dagegen kann die Frage, ob zwei Gröfsen einander gleich sind oder nicht, bei gehöriger Übung mit grofser Genauigkeit entschieden werden.

Bei vielen Mefsmethoden hat man den Moment des Verschwindens einer gewissen Erscheinung zu beobachten; solche Methoden sollen Nullmethoden genannt werden. Sie sind besonders wertvoll, denn über das Vorhandensein oder die Abwesenheit einer Einwirkung auf die Sinnesorgane kann man noch sicherer urteilen, als über die Gleichheit zweier Eindrücke. Übrigens läfst sich in Bezug auf die angedeuteten Erscheinungen keine scharfe Grenze ziehen, denn oft kommt gerade das Verschwinden einer Erscheinung auf das Gleichwerden zweier Eindrücke zurück. Wird z. B. (im Photometer) ein Fleck oder Streifen auf hellem Grunde beobachtet und man hat den Augenblick zu erfassen, wo derselbe gerade verschwindet, so hat man doch eigentlich den Moment zu beobachten, wo die Helligkeit der von ihm eingenommenen Stelle gleich wird derjenigen des Hintergrundes, von dem er sich abhebt.

Bei sehr vielen Messungen hat man zwei Punkte, einen Punkt und einen Strich, oder zwei Striche zur möglichst vollkommenen Koincidenz zu bringen, indem man den beweglichen unter ihnen an den anderen festbleibenden heranbringt. Auch hierzu ist Übung erforderlich, denn der „Punkt“ oder „Strich“ ist in Wirklichkeit ein kleiner Kreis, resp. ein schmaler Streifen; zusammenfallen sollen aber ihre geometrischen Mitten.

Wir hatten die „Beobachtung“ im Sinne der genauen Einstellung eines Apparatteiles als zweite der Hauptoperationen bei jeder Messung bezeichnet. Bei einigen Messungen fehlt dieselbe gänzlich; sie wird durch eine Manipulation ersetzt, welche im Apparate selbst irgend eine Verschiebung oder überhaupt eine gewisse Veränderung hervorruft. So ruft z. B. die Schliefsung des elektrischen Stromes eine Drehung der Galvanometernadel, die Erwärmung (bei Messungen des Ausdehnungskoeffizienten, des Schmelz- und Siedepunktes) eine Bewegung des Quecksilbers hervor u. s. w.

III. Die Ablesung kann sich entweder auf eine Länge oder auf eine Zeit beziehen. Die Ablesung der Länge wird an einer Skala ausgeführt, die entweder an einer Geraden oder einer Kreislinie angebracht ist; hier mufs man den Zahlenwert der Skala bestimmen, welcher einem bestimmten Punkte derselben entspricht. Liegt dieser Punkt zwischen zwei ganzen Teilstrichen der Skala, so werden die Bruchteile nach Augenmafs geschätzt.

Die Ablesung der Zeit geschieht 1. nach dem Gehör mittels einer Vorrichtung, welche die ganzen oder halben Sekunden schlägt, wobei der Moment zu bestimmen ist, in welchem die zu beobachtende Erscheinung auftritt, und 2. mit Hülfe sogenannter Chronographen (s. u.), welche die Ablesung der Zeit ebenfalls auf eine Längenablesung zurückführen

§ 4. Einige speziellere Angaben über die Ausführung der physikalischen Messungen. Nachdem wir die Aufstellung, Beobachtung und Ablesung als die Hauptoperationen, aus welchen jede physikalische Messung besteht, besprochen haben, wollen wir noch einige Hinweise geben, die für Anfänger von Nutzen sein können.

1. Die Kunst, gute, d. h. genaue Messungen auszuführen, besteht darin, dafs man die äufsersten Grenzen dessen erreicht, was der Apparat zu geben vermag. Für grobe, angenäherte Messungen, mit denen man sich für technische Zwecke (z. B. in der Elektrotechnik) begnügt, können einfache Apparate Verwendung finden, die so bequem konstruiert sind, dafs ein jeder in kürzester Zeit mit ihnen umzugehen lernt. Etwas ganz anderes ist es aber um wissenschaftliche Untersuchungen, wo die äufserste Grenze der Genauigkeit erreicht werden mufs. Hierzu ist ein sorgfältiges Studium aller Eigenschaften des Instrumentes und jene Umsicht erforderlich, von welcher weiter oben die Rede war. Ein geschickter Experimentator wird selbst mit einem relativ schlechten Apparate bessere Resultate erzielen, als ein ungeschickter mit einem vollkommen konstruierten.

2. Wo es irgend möglich ist, mufs jede Messung vielmals wiederholt werden. Diese Bemerkung gilt insbesondere für Anfänger, welche erfahrungsgemäfs geneigt sind, sich mit nur einer Messung zu begnügen. Meist hat man viel Zeit und Mühe darauf zu verwenden gehabt, um das Resultat der ersten Messung zu erlangen; die späteren, wiederholten Messungen verlangen dagegen schon viel weniger und nicht selten immer weniger Zeit und Mühe.

3. Wenn der Einflufs irgend einer Wirkung A auf eine gewisse Gröfse B gemessen wird (z. B. der Einflufs einer Temperaturänderung auf den elektrischen Widerstand eines Drahtes), so mufs man entweder abwechselnd Messungen bei Anwesenheit und Abwesenheit dieses Einflusses vornehmen, oder wenigstens, wenn man die

Messung von B, ohne dafs A vorhanden war, begonnen hatte, wieder auf den Anfangszustand zurückgehen, d. h. wieder eine Messung von B bei Abwesenheit von A vornehmen. So kann man sich davon überzeugen, ob während der Versuche am Instrumente selbst oder in der Versuchsanordnung nicht irgend welche Veränderungen vorgegangen sind, welche auf die Angaben des Instrumentes von Einflufs sein können. Bemerkt man eine solche Veränderung und ist sie auch nur gering, so mufs man sie mit in Betracht ziehen, indem man etwa annimmt, dafs sie allmählich und proportional der Zeit, welche seit der ersten Messung verflossen war, erfolgt ist.

4. Niemals darf man unterlassen, zu Beginn der Versuchsreihe sich anzuschreiben, was man mifst und nach welcher Methode man die Messung vornimmt; ferner hat man den Beobachtungsort und die Beobachtungszeit zu notieren und zwar das genaue Datum und bei jeder Einzelmessung die Minuten, eventuell auch die Sekunden bis auf Bruchteile. Fast immer ist auch eine Angabe der Temperatur erforderlich. Auch andere Gröfsen, wie Luftdruck, Luftfeuchtigkeit, magnetische Deklination u. s. w. hat man zu notieren, falls sie einen Einflufs auf das Resultat der Messungen haben können.

5. Die numerischen Daten, welche man bei der direkten Ablesung erhält, sind nur in seltenen Fällen den Zahlenwerten der zu messenden Gröfsen gleich, welche man zu bestimmen wünscht. Fast immer erhält man die gesuchten Werte durch Rechnung mittels bestimmter Formeln, in welche man die Resultate der Ablesungen einzusetzen hat. Man mufs es sich zur Regel machen. die unberechneten Beobachtungsresultate sich nicht anhäufen zu lassen, sondern sie sobald wie möglich zu berechnen, denn die Resultate der Berechnung können oftmals sehr wertvolle Winke über Mängel der angewandten Methode, über äufsere Einflüsse u. s. w. geben. Die Berechnungen, die bisweilen mehr Zeit und Mühe erfordern als die Messungen selbst und jedenfalls eine weit weniger interessante Arbeit darstellen, mufs man derart ausführen, dafs sie sich leicht übersehen und nachprüfen lassen. Als Hülfsmittel können Rechenmaschinen und verschiedene Tabellen verwandt werden, wie z. B. die Barlowschen Tafeln (enthaltend die Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln der ganzen Zahlen und ihre reciproken Werte) und Crelles Rechentafeln (Multiplikationstabellen).

6. Die gewählte Mefsmethode ist zunächst einer theoretischen Prüfung zu unterziehen, um die Bedingungen für ihre gröfstmögliche Empfindlichkeit zu finden. Letztere ist dann erreicht, wenn eine sehr kleine Änderung der zu messenden Gröfse eine möglichst grofse Änderung der Ablesung hervorruft. Allgemeine Regeln lassen sich hier nicht aufstellen, aufser etwa für

den Fall, dafs man die kleine Änderung Δx der Gröfse x zu messen hat, welche durch irgend eine äufsere Ursache hervorgerufen wird (z. B. die Änderung Δx des Widerstandes x eines Teiles einer galvanischen Kette durch Erwärmung oder die Änderung Δx der Lichtstärke x unter dem Einflusse magnetischer Kräfte; cf. die magnetische Drehung der Polarisationsebene). In diesem Falle hat man darauf zu achten, dafs das anfängliche x möglichst klein, womöglich gleich Null sei, oder dafs die Gröfse x selbst ohne Einflufs auf die Ablesung sei. Letztere mufs einzig von Δx abhängen. Ist der Widerstand x einer galvanischen Kette sehr grofs, so ruft eine dem absoluten Betrage nach kleine Änderung Δx desselben keine merkliche Änderung der Stromstärke hervor, folglich auch keine merkliche Änderung in den Angaben des Instrumentes (des Galvanometers); dieselbe Gröfse Δx ruft dagegen eine grofse Änderung in den Angaben des Instrumentes hervor, wenn letztere von x gar nicht abhängen. Eine kleine Änderung Δx einer intensiven Helligkeit bleibt unbemerkt, die ihrem absoluten Betrage nach gleiche Lichtstärke Δx auf dunklem Hintergrunde ist dagegen äufserst merklich.

Eine wichtige Rolle in der vorliegenden Frage spielt das von Fechner aufgestellte psychophysische Gesetz. Bezeichnet man mit J die Gröfse eines auf unsere Sinnesorgane ausgeübten Reizes, mit ΔJ diejenige Änderung desselben, welche eine eben noch merkbare Änderung der Empfindung hervorruft (Schwellenwert der Empfindung), so mufs ΔJ proportional J sein. Findet man z. B. beim Heben von zwei einander fast gleichen Gewichten eben noch einen Unterschied heraus, so mufs der Unterschied zweier $n$mal gröfserer Gewichte auch selbst $n$mal gröfser sein, um noch mit demselben Grade von Sicherheit erkannt zu werden. Fechner folgert hieraus, dafs die Empfindungen eine arithmetische Reihe bilden, wenn die Reize in einer geometrischen anwachsen. Bekanntlich hat man die Sterne nach ihrer Helligkeit in eine Reihe eingeordnet und unterscheidet demgemäfs Sterne erster, zweiter Gröfse u. s. f.; dabei ordnete man sie der Empfindung nach in eine arithmetische Reihe. Durch photometrische Messungen hat man sich nun überzeugt, dafs die wahre Helligkeit der Sterne aufeinander folgender Gröfsenklassen eine geometrische Reihe bildet. In der Akustik werden wir sehen, dafs die Schwingungszahlen der Töne, welche in gleichen Intervallen voneinander abstehen, eine geometrische Progression bilden.

7. Jede theoretisch gefundene Mefsmethode stellt etwas Abstraktes, ja man könnte sagen Ideales dar. Bei Anwendung derselben in der Praxis tritt stets eine ganze Reihe von Nebenumständen zu Tage, welche die endgültige Ablesung beeinflussen und somit die theoretische Formel, die uns den gesuchten Zahlenwert der zu messenden Gröfse giebt, ändern. Mit Rücksicht auf diesen Umstand müssen wir, um den

wahren Wert der gemessenen Gröfse zu erhalten, an unseren Rechnungen noch gewisse Korrektionen anbringen. Eine Hauptaufgabe des Experimentators besteht somit auch darin, alle diejenigen Nebenumstände ausfindig zu machen, welche das Resultat der Messung beeinflussen können und die entsprechenden Korrektionen zu bestimmen.

Bei der Berechnung dieser Korrektionen mufs man mit besonderer Umsicht verfahren, um nicht im Streben nach einem möglichst genauen Resultate in folgenden leicht möglichen Fehler zu verfallen. Die verschiedenen das Resultat beeinflussenden Nebenumstände üben einen sehr verschieden grofsen Einflufs aus; einige der Korrektionen betragen vielleicht mehrere Prozent, andere nur zehntel, hundertstel oder sogar tausendstel Prozent des Resultates. Man hat sich nun durchaus vor einer unnötigen Einführung kleinster Korrektionen zu hüten, bevor nicht die relativ grofsen Korrektionen bereits angebracht sind. Bei Beobachtung der Schwingungen eines Wagebalkens kann man Korrektionen anbringen, die nur 0,001 Proz. des zu bestimmenden Gewichtes (und noch weniger) betragen; solche Korrektionen sind aber ganz zwecklos und führen zu einer Selbsttäuschung, wenn man nicht gleichzeitig auch die viel bedeutenderen Korrektionen, so z. B. die Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft, die 0,1 Proz. übersteigen kann, angebracht hat.

8. Beim Endresultat, das meist in Form einer Zahl mit einem Decimalbruch erscheint, hat man die absolute Genauigkeit desselben von seiner relativen Genauigkeit zu unterscheiden. Diese und jene wird durch denjenigen Teil der erhaltenen Zahl bestimmt, für dessen Richtigkeit wir uns zu verbürgen im stande glauben. Hat sich z. B. ein Gewicht zu 125,0463 g ergeben, und wir können sicher sein, dafs die vorletzte Ziffer 6 sein mufs (dafs also das Gewicht gröfser als 125,0455 g und kleiner als 125,0465 g ist), so beträgt die absolute Genauigkeit der Wägung ein Milligramm, die relative Genauigkeit dagegen 0,00001. Ist die Genauigkeit nur in geringem Mafse oder gar nicht von den Dimensionen der zu messenden Gröfse (Winkel, Temperaturdifferenz, bisweilen auch Länge und Zeit) abhängig, so spricht man nur von der absoluten Genauigkeit („genau bis auf 0,1 Bogensekunde“, „bis auf 0,01° C.“, „bis auf 0,001 mm“, „bis auf 0,01 Sekunde“). In der weitaus gröfsten Mehrzahl der Fälle hat man jedoch, wenn man von der Genauigkeit eines Messungsresultates spricht, die relative Genauigkeit desselben im Sinne. Sie wird durch die Ordnung derjenigen von links nach rechts gezählten Ziffer bestimmt, für welche man sich noch eben verbürgen kann. Bisweilen ist das Resultat infolge der für die Messung gewählten Einheit durch einen kleinen Decimalbruch gegeben. In diesem Falle werden die links stehenden Nullen nicht gezählt; als erste geltende Ziffer wird die erste von

Null verschiedene angesehen und von ihr aus die Zählung begonnen. Ist z. B. die gemessene Gröfse gleich 0,0016843 und wir können uns für die Richtigkeit der Ziffer 8 verbürgen, so heifst dies nicht etwa, dafs die Genauigkeit 0,00001 beträgt, vielmehr hat man zu sagen, die Gröfse sei „bis auf die dritte geltende Ziffer genau“ oder bis auf 0,01 genau gemessen. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die erste geltende Ziffer 9 und die folgende 5 oder darüber beträgt. Wäre beispielsweise das Resultat der Messung 0,0096843 und die Ziffer 8 verbürgt, so würde die Genauigkeit fast 0,001 betragen.

Man darf nun nicht vergessen, dafs zwischen der Genauigkeit der einzelnen Messungen, die man zur Bestimmung des Zahlenwertes einer Gröfse vorzunehmen hat und der Genauigkeit des letzteren noch ein grofser Unterschied bestehen kann. Hat man z. B., um eine gewisse Gröfse y (Torsionskoeffizient, vergl. sechster Abschnitt) zu messen, den Radius x eines Drahtes, der etwa 0,4 mm beträgt, zu bestimmen und ist y proportional x^4, so kann man selbst bei der äufsersten noch erreichbaren Genauigkeitsgrenze, falls nämlich x bis auf 0,001 mm genau gemessen ist, doch einen Fehler von 1 Proz. im Zahlenwerte der Gröfse y erwarten. Mit Hülfe der Differentialrechnung kann man sich leicht in ähnlichen Fragen zurechtfinden. Hat man im allgemeinen $y = f(x)$, wo x unmittelbar gemessen, y nach einer bestimmten Formel berechnet wird, so zieht der bei Messung von x möglicherweise auftretende Fehler Δx den relativen Fehler Δy in der Bestimmung von y nach sich; letzteren kann man hinreichend genau durch die Näherungsgleichung

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)\,\Delta x}{f(x)} = \Delta lg f(x) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

$$\frac{dy}{y} = d\, lg\, y \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2, a)$$

finden.

9. Eine oftmalige Wiederholung ein und derselben Messung durch ein und dieselbe Person, ohne Änderung in der Anordnung oder Methode, wird uns stets im Zweifel darüber lassen, ob sich nicht bei diesen Wiederholungen auch gewisse Fehler, die von einer falschen Aufstellung oder Fehlerhaftigkeit der Apparate, äufseren Nebenumständen herrühren oder vom Beobachter selbst begangen sind, ebenfalls wiederholt haben. Daher ist die Änderung der Mefsmethode eines der hauptsächlichsten Hülfsmittel zur Erlangung genauer Resultate. Die Änderung kann sich auf gewisse Einzelheiten bei der Messung oder auf die gesamte Methode beziehen.

Die Details der Messung mufs man unbedingt, wo es nur irgend angeht, variieren; es mufs dies schon aus dem Grunde geschehen, weil oftmals irgend eine Ursache A, deren Gröfse man nicht

bestimmen kann, das Resultat der Messung beeinfluſst. In solchem Falle muſs man die Messung zweimal vorzunehmen suchen, jedoch so, daſs der Einfluſs von A beide Male der entgegengesetzte wird, d. h. in einem Falle das numerische Resultat vergröſsert, im zweiten vermindert. Nimmt man sodann das arithmetische Mittel aus beiden Resultaten, so wird dadurch „der Einfluſs von A eliminiert", freilich nicht ganz, denn jene zwei entgegengesetzte Wirkungen können auch nicht genau gleich sein. Wenn möglich, muſs man auch die Messungen so vornehmen, daſs man zu der Gröſse nach wesentlich verschiedenen Angaben gelangt, die dann übereinstimmende Endresultate geben müssen.

§ 5. Näherungsweise Berechnung der Messungsresultate. Bei Ausrechnung der Messungsresultate muſs man sich vergegenwärtigen, daſs dieselben nur auf einen gewissen Grad von Genauigkeit Anspruch erheben dürfen. Der Beobachter wird sich über diesen Genauigkeitsgrad einigermaſsen klar sein; er kann daher bei der Ausrechnung gewisse Vereinfachungen vornehmen, die allerdings Fehler in die Rechnung bringen, jedoch Fehler, die kleiner sind als die infolge der Messungsfehler im Endresultate ohnehin verbleibenden. Solche Vereinfachungen oder näherungsweise Berechnungen sind ganz besonders bequem, wenn in den Formeln Gröſsen vorkommen, deren Quadrate oder höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Es seien hier einige Beispiele dafür gegeben, wie man die vereinfachte Rechnung ausführt. Seien α, β, γ sehr kleine Gröſsen, dann kann man schreiben:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\cdots = 1+\alpha+\beta+\gamma+\cdots$$

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha;\ \text{z. B. } (1+\alpha)^2 = 1+2\alpha;$$

$$\sqrt{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\alpha.$$

$$\frac{1}{1+\alpha} = (1+\alpha)^{-1} = 1-\alpha;\quad \frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha;\quad \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$= (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\alpha;\quad \frac{1}{(1+\alpha)^m} = (1+\alpha)^{-m} = 1-m\alpha.$$

$$\sin\alpha = \alpha;\quad \cos\alpha = 1;\quad tg\,\alpha = \alpha;\quad \sin\alpha = tg\,\alpha;\quad lg\,(1+\alpha) = \alpha.$$

Genauer ist:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3;\quad \cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2};\quad tg\,\alpha = \alpha+\frac{1}{3}\alpha^3;\quad \sin(x\pm\alpha)$$

$$= \sin x \pm \alpha\cos x;\quad \cos(x\mp\alpha) = \cos x \pm \alpha\sin x;\quad lg\,(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Ist $x_1 - x_2 = \alpha$ eine sehr kleine Gröſse, so kann man

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1+x_2}{2}$$

setzen, denn es ist

$$\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1(x_1 - \alpha)} = x_1 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{x_1}} = x_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_1}\right)$$
$$= \frac{2x_1 - \alpha}{2} = \frac{x_1 + (x_1 - \alpha)}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

§ 6. Berechnung des wahrscheinlichen Resultates aus einer Reihe von Bestimmungen derselben Gröfse. Nehmen wir an, wir hätten n Bestimmungen einer Gröfse vorgenommen und dabei die n Zahlenwerte $x_1, x_2, x_3 \ldots x_i \ldots x_n$ erhalten. Wären nun unsere Bestimmungen absolut genau, so müfsten alle erhaltenen Zahlen untereinander gleich und gleich dem wahren Werte x der zu messenden Gröfse sein. Infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler entfernen sich jedoch die Resultate von einer solchen idealen Gleichheit.

Man teilt die Beobachtungsfehler in zwei Gruppen ein, nämlich in systematische und zufällige Fehler.

Die systematischen Beobachtungsfehler entspringen Mängeln der Methode, äufseren Ursachen, die immer in derselben Richtung wirken, oder den persönlichen Eigenschaften des Beobachters, der nicht selten geneigt ist, bei den Einstellungen oder Ablesungen vorzugsweise Fehler in einer Richtung zu begehen, z. B. sich immer in der Auffassung des Momentes, wo die zu beobachtende Erscheinung auftritt, zu verspäten. Die systematischen Fehler beeinflussen alle Zahlen x_i mehr oder weniger in derselben Weise und können offenbar durch keinerlei Rechnung eliminiert werden. Man kann sie nur durch direktes Aufsuchen entfernen, und hierfür können keine allgemeinen Regeln gegeben werden. Nicht selten erhält man dadurch, dafs man die angewandte Mefsmethode durch irgend eine andere, von ihr völlig verschiedene ersetzt, Hinweise, die zur Auffindung der erwähnten Fehler führen.

Die zufälligen Beobachtungsfehler entstehen durch zufällige Änderungen in der Aufstellung und Fehler bei den Beobachtungen und Ablesungen oder durch solche Zufälligkeiten, die oft wechselnd auf das Messungsergebnis bald im einen, bald im anderen Sinne wirken. Die Wahrscheinlichkeit, infolge der zufälligen Fehler im Resultat eine zu grofse Zahl zu erhalten, ist die gleiche wie die für das Gegenteil und daher stellt das arithmetische Mittel x_0 der erhaltenen Zahlen x_i das wahrscheinlichste Resultat dar. Somit ist

$$x_0 = \frac{\Sigma x_i}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als der wahrscheinlichste Zahlenwert der gemessenen Gröfse anzusehen. In der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der obige Satz bewiesen. Subtrahiert man nun die beobachteten Zahlen x_i vom Mittelwerte x_0, so erhält man die sogenannten Abweichungen δ der

Einzelbeobachtungen vom Mittelwert. Die algebraische Summe derselben mufs offenbar gleich Null sein.

Bildet man den Ausdruck

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \cdots + \delta_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

so ergeben sich folgende Relationen, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung streng bewiesen werden:

1. Der mittlere Fehler f jeder Einzelbeobachtung ist gleich

$$f = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Der mittlere Fehler F des Resultates, d. h. des arithmetischen Mittels x_0 ist gleich

$$F = \pm \sqrt{\frac{S}{n\,(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

3. Der wahrscheinliche Fehler φ der Einzelbeobachtung und der wahrscheinliche Fehler Φ des Resultates werden durch Multiplikation des mittleren Fehlers mit der Zahl 0,6745 oder angenähert mit $\frac{2}{3}$ erhalten. Es ist demnach

$$\varphi = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{S}{n-1}} \text{ oder } \varphi = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n-1}} \quad . \quad (7)$$

$$\Phi = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{S}{n\,(n-1)}} \text{ oder } \Phi = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{S}{n\,(n-1)}} \quad . \quad (8)$$

Für die gesuchte Gröfse x erhält man schliefslich $x = x_0 \pm \Phi$, d. h.

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n} \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma \delta_i^2}{n\,(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Nehmen wir ein Beispiel (entlehnt aus Terquem et Damien Introduction à la physique expérimentale). Ein Winkel x wurde $n = 10$ mal gemessen, wobei folgende Werte x_i für denselben gefunden wurden:

x_i	Abweichung δ_i	δ_i^2
20,666°	— 0,0023	0,00000529
20,740	— 0,0763	0,00582169
20,701	— 0,0373	0,00139139
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,641	+ 0,0227	0,00051529
20,700	— 0,0363	0,00131769
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,616	+ 0,0477	0,00227529
20,658	+ 0,0057	0,00003249
20,641	+ 0,0227	0,00051529
Summa 206,637		$S = \Sigma \delta_i^2 = 0{,}01418220$

Mittel

$$f = \pm\sqrt{\frac{S}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{S}{9}} = \pm\sqrt{0{,}00157580}$$
$$= \pm\ 0{,}0397^0 = \pm\ 2'23''.$$

$x_0 = 20{,}6637^0$

$$F = \pm\sqrt{\frac{S}{n\,(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{S}{90}} = \pm\ 0{,}01256^0$$
$$= \pm\ 45''.$$

oder

$x_0 = 20^0\,39'\,49''$

$$\varphi = \frac{2}{3}f = \pm\ 0{,}0261^0 = \pm\ 1'\,34''.$$

$$\Phi = \frac{2}{3}F = \pm\ 0{,}00837^0 = \pm\ 30''.$$

Endresultat: $x = 20^0\,39'\,49'' \pm 30''$.

Ist der Zahlenwert einer Gröfse durch mehrere Beobachtungsreihen bestimmt worden, welche nach verschiedenen Methoden, bei verschiedenen Versuchsanordnungen oder endlich von verschiedenen Beobachtern gewonnen sind, so werden die numerischen Resultate dieser Beobachtungsreihen im allgemeinen einen verschiedenen Grad von Zuverlässigkeit besitzen. Es wäre falsch, wenn man auch in diesem Falle beim arithmetischen Mittel x_i der bei den einzelnen Beobachtungsreihen erhaltenen Zahlen stehen bliebe, denn hierdurch würden wir ihnen allen die gleiche Bedeutung beimessen. Man mufs jedem Resultate ein besonderes Gewicht beilegen, wobei man unter dem Gewicht eine Zahl versteht, die den Wert oder den Grad der Zuverlässigkeit des Resultates jeder einzelnen Beobachtungsreihe charakterisiert.

Bei Herleitung des Endresultates x mufs man jede der Zahlen x_i mit ihrem Gewichte p_i multiplizieren und das Mittel dieser Produkte durch Division mit der Summe der Gewichte bilden.

So erhält man

$$x = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

In vielen Fällen hat man das Gewicht nach persönlichem Ermessen zu bestimmen. Nicht selten berechnet man es auch aus den Beobachtungen selbst; es ist nämlich das Gewicht des Resultates einer Beobachtungsreihe indirekt proportional dem Quadrate seines wahrscheinlichen Fehlers Φ, vergl. (8).

Nehmen wir an, eine Beobachtungsreihe habe für die geographische Breite λ eines Ortes

$$\lambda_1 = 49^0\,16'\,13'' \pm 5''$$

ergeben; eine andere Beobachtungsreihe, die mit einem anderen Instrumente und von einem anderen Beobachter erhalten wurde, dagegen

$$\lambda_2 = 49^0\,16'\,10'' \pm 3''.$$

Die Gewichte verhalten sich hier wie 9 : 25, also ist

$$\lambda = \frac{9\,\lambda_1 + 25\,\lambda_2}{9 + 25} = 49^0\,16' + \frac{9 \,.\, 13'' + 25 \,.\, 10''}{34} = 49^0\,16'\,10{,}8''.$$

§ 7. Berechnung des wahrscheinlichen Wertes mehrerer Gröſsen. Methode der kleinsten Quadrate. Eine ausführliche Behandlung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate findet man in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hier soll nur ein kurzer Hinweis auf die Bedeutung und das Wesen dieser Methode gegeben werden.

Wir sahen früher (S. 21), daſs der gesuchte gesetzmäſsige Zusammenhang zwischen den Erscheinungen, durch den algebraischen Zusammenhang zwischen den Zahlenwerten verschiedener Gröſsen ausgedrückt wird. Nehmen wir an, eine gewisse Gröſse v sei eine Funktion der Gröſsen x, y, z . . ., so daſs man $v = F\,(x,\ y,\ z\ldots)$ schreiben kann. In der Funktion F sind auſser x, y, z . . . noch verschiedene numerische „Parameter" a, b, c . . ., z. B. Koeffizienten, Potenzexponenten, Basen variabler Potenzen u. s. w. enthalten. Daher kann man allgemein setzen

$$v = F\,(x,\ y,\ z\ldots a,\ b,\ c\ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In den weitaus meisten Fällen sucht man nur den Zusammenhang zwischen zwei Gröſsen v und x und hat daher statt (11) den Ausdruck

$$v = F\,(x,\ a,\ b,\ c\ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Form der Funktion F ist entweder theoretisch ermittelt worden oder versuchsweise gebildet, oder endlich die Funktion ist eine empirische (S. 29). In allen drei Fällen legen wir uns die Frage vor, ob man die Konstanten a, b, c . . . derart bestimmen kann, daſs die beobachteten Werte der Gröſsen v, x, y, z . . . oder bloſs v und x der abgeleiteten, erratenen oder durch Erfahrung gewonnenen Funktion F genügen. Im letzteren Falle giebt man dem empirischen Zusammenhang bei zwei Gröſsen v und x sehr häufig die Form

$$v = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Zahlenwerte der Gröſsen v, x, y, z . . . oder auch nur der Gröſsen v und x werden durch die Beobachtungen gefunden; die Zahlenwerte der Parameter a, b, c . . . jedoch sind derart zu bestimmen, daſs, wenn man sie in (11), (12) oder (13) einsetzt, sich eine algebraische Abhängigkeit ergiebt, mit welcher die beobachteten Zahlenwerte nach Möglichkeit übereinstimmen. So haben wir z. B. in (13) eine Reihe beobachteter und zusammengehöriger Werte von v und x; es stellen daher v, x, x^2, x^3 . . . in Formel (13) uns bekannte Koeffizienten, a, b, c, d . . . die gesuchten Unbekanntan dar.

Ist die Zahl der Beobachtungen, d. h. die Zahl der bekannten zusammengehörigen Werte der Gröfsen v und x gleich der Zahl der unbekannten Parameter $a, b, c \ldots$, so werden letztere eindeutig bestimmt und von einer Kontrolle der in der abgeleiteten oder empirischen Funktion vorkommenden Parameter kann keine Rede sein. Nehmen wir z. B. an, es seien v und x durch die Formel

$$v = a + bx + cx^2$$

miteinander verbunden; geben die Messungen gerade drei Paare zusammengehöriger Werte der Gröfsen v und x, nämlich v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3, so genügen die drei Gleichungen von der Form

$$v_i = a + bx_i + cx_i^2,$$

wo $i = 1, 2, 3$ ist, zur Bestimmung der drei Unbekannten a, b und c. Ebenso dienen für

$$v = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x$$

vier Paare zusammengehöriger Werte der Gröfsen x und v zur Bestimmung der vier Parameter a, b, c und d.

Anders verhält es sich, wenn die Zahl n der Beobachtungen gröfser ist als die Zahl m der unbekannten Parameter, wenn man z. B. 20 Beobachtungen und nur 3 Parameter hat. Dann hat man n (z. B. 20) Gleichungen mit nur m (z. B. 3) Parametern. Wenn die angewandte Funktion den wirklichen gesetzmäfsigen Zusammenhang der beobachteten Gröfsen ausdrückte und die Messungen absolut genau wären, so müfsten die m Parameter, aus m Gleichungen bestimmt, den übrigen $n - m$ Gleichungen genügen. Die Beobachtungen sind aber nie fehlerfrei und die angewandte Formel, insbesondere wenn sie empirisch gefunden wurde, drückt nur angenähert den gesetzmäfsigen Zusammenhang der Gröfsen aus; wenn wir daher die Parameter aus verschiedenen Gruppen von je m Gleichungen bestimmen, so werden wir nicht ganz gleiche Werte für dieselben erhalten. Es tritt daher an uns die Frage heran, welche Werte für die Parameter gewählt werden sollen, d. h. welche von ihnen die wahrscheinlichsten sind.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung antwortet auf diese Frage folgendermafsen: Man hat diejenigen Werte der Parameter zu wählen, für welche die Quadratsumme der Abweichungen der beobachteten Funktionswerte von den berechneten ein Minimum ist. Also mufs der Ausdruck

$$S = \Sigma [v_i - F(x_i, a, b, c \ldots)]^2 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

in welchem v_i und x_i zusammengehörige, durch Beobachtung gefundene Werte der Gröfsen v und x sind, für die gesuchten Werte der Parameter a, b, $c \ldots$ ein Minimum werden.

Die Differentialrechnung lehrt uns, dafs S ein Minimum wird,

wenn folgende Relationen bestehen:

$$\frac{dS}{da} = 0, \quad \frac{dS}{db} = 0, \quad \frac{dS}{dc} = 0 \text{ u. s. w.} \quad \cdots \quad (15)$$

Man erhält somit so viel Gleichungen, als unbekannte Parameter vorhanden sind; es erübrigt nur, diese Gleichungen zu lösen.

Nehmen wir an, unsere Funktion habe die Form

$$v = ax + by + cz \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

(wobei z. B. $y = x^2$, $z = x^3$ oder $x = 1$, $z = y^2$ ist) und die Beobachtungen haben uns n Werte der Gröfsen v, x, y und z geliefert. Es sind nun die wahrscheinlichsten Werte der Koeffizienten a, b und c zu finden. Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{da} \sum [v_i - ax_i - by_i - cz_i]^2 &= 0 \\ \frac{d}{db} \sum [v_i - ax_i - by_i - cz_i]^2 &= 0 \\ \frac{d}{dc} \sum [v_i - ax_i - by_i - cz_i]^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Hier sind alle Werte v_i, x_i, y_i und z_i bekannt. Die erste der Gleichungen (17) giebt

$$\Sigma [v_i - ax_i - by_i - cz_i]\, x_i = 0$$

oder

$$\Sigma v_i x_i = a \Sigma x_i^2 + b \Sigma x_i y_i + c \Sigma x_i z_i$$

ebenso erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Sigma v_i y_i &= a \Sigma x_i y_i + b \Sigma y_i^2 + c \Sigma y_i z_i \\ \Sigma v_i z_i &= a \Sigma x_i z_i + b \Sigma y_i z_i + c \Sigma z_i^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (18)$$

Diese drei Gleichungen dienen zur Bestimmung der drei Parameter a, b und c. Es ist leicht die voraufgehende Herleitung für eine gröfsere Anzahl von Parametern zu verallgemeinern.

Nehmen wir ein Beispiel: Die Gröfsen v und x seien durch folgende Gleichung gegeben

$$v = ax + bx^2 \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Die beobachteten Zahlenwerte seien

x	v	x	v
0,33	2,51	2,60	8,81
1,04	5,23	3,14	9,10
1,32	6,12	3,82	8,26
2,06	7,97	4,13	8,04

Vergleicht man (19) mit (16), so sieht man, dafs hier $y = x^2$, $z = 0$ ist, daher giebt (18) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma v_i x_i &= a \Sigma x_i^2 + b \Sigma x_i^3 \\ \Sigma v_i x_i^2 &= a \Sigma x_i^3 + b \Sigma x_i^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Zur Berechnung obiger Summen bedient man sich der Tabellen, in denen die Quadrate und Kuben ganzer Zahlen gegeben sind und der Formel

$$pq = \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2}{2},$$

also

$$\Sigma pq = \frac{\Sigma (p+q)^2 - \Sigma p^2 - \Sigma q^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Letztere Formel reduziert die Berechnung der Produktsumme auf die Berechnung von Quadratsummen. Für unseren Fall ist $\Sigma v_i x_i = 147{,}01$; $\Sigma x_i^2 = 55{,}446$; $\Sigma x_i^3 = 186{,}92$; $\Sigma x_i^4 = 669{,}00$ und $\Sigma v_i x_i^2 = 457{,}33$. Setzt man diese Zahlen in (20) ein, so kommt $a = 5{,}9735$ und $b = -0{,}9851$; daher nimmt der gesuchte Ausdruck die Form an

$$v = 5{,}9735\, x - 0{,}9851\, x^2.$$

Wenn man in den so erhaltenen Ausdruck für $F(x, y, z \ldots)$ die Zahlen x_i, y_i, z_i ... einsetzt, so erhält man die „berechneten" Werte v_i', welche sich von den „beobachteten" Werten v_i unterscheiden. Die Abweichungen wollen wir mit $\delta_i = v_i' - v_i$ bezeichnen. Der mittlere Fehler f des Resultates ist, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesen wird, gleich

$$f = \frac{\Sigma \delta_i^2}{n - m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

wo n die Zahl der Gleichungen, m die Zahl der Parameter ist. In unserem Beispiel ist $\Sigma \delta_i^2 = 0{,}529$, $n = 8$, $m = 2$, folglich $f = \frac{0{,}529}{6} = 0{,}088$. Hat die Funktion F, cf. (11), nicht die Form (16), so dafs also die gesuchten Parameter in ihr nicht als lineare Koeffizienten der Gröfsen x, y, z ... auftreten, so berechnet man zunächst aus m Gleichungen genäherte Werte a_0, b_0, c_0 ... der gesuchten Gröfsen.

Setzt man dann $a = a_0 + \alpha$, $b = b_0 + \beta$, $c = c_0 + \gamma \ldots$, so ist

$$v = F(x, y, z \ldots a_0 + \alpha, b_0 + \beta, c_0 + \gamma \ldots).$$

Da α, β, γ kleine Gröfsen darstellen, so kann man schreiben

$$v = F(x, y, z \ldots, a_0, b_0, c_0 \ldots) + \frac{dF}{da}\alpha + \frac{dF}{db}\beta + \frac{dF}{dc}\gamma + \cdots$$

Führt man dann die folgenden Bezeichnungen ein

$$v - F(x, y, z \ldots, a_0, b_0, c_0 \ldots) = v'$$

$$\frac{dF}{da} = x', \quad \frac{dF}{db} = y', \quad \frac{dF}{dc} = z' \ldots$$

so kommt

$$v' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \ldots$$

wo v', x', y', z' bekannt sind; es bleibt somit übrig, die Zahlen α, β, $\gamma \ldots$ nach derselben Methode zu bestimmen, nach welcher $a, b, c \ldots$ in (11) gefunden wurden.

Litteratur.

Von physikalischen Experimenten, Messungen und sonstigen Laboratoriumsarbeiten handeln u. a. folgende Werke:

E. Wiedemann u. H. Ebert: Physikalisches Praktikum. Braunschweig.
F. Kohlrausch: Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig (auch ins Russ. übersetzt).
W. Ostwald: Hand- und Hülfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen. Leipzig.
O. Lehmann (Frick): Physikalische Technik. Zwei Teile. Braunschweig 1890, 1895.
L. Kuelp: Die Schule des Physikers.
Glazebrook and Shaw: Practical physics.
B. Stewart and H. Gee: Lessons in elementary practical physics.
A. Witz: Cours des manipulations de physique.
Terquem et Damien: Introduction à la physique expérimentale.
B. Weinberg u. J. Todschidlowski: Handbuch der prakt. Physik (russ.). Odessa 1901.
W. Lermantow: Erklär. prakt. phys. Arbeiten (russ.). St. Petersburg. 1891 bis 1901 (lithogr.).
W. Pscheidl: Einleitung in die praktische Physik.
A. Stepanow: Anleitung zu prakt. physik. Arbeiten (russ.).
Bunsen: Gasometrische Methoden.
Weinhold: Physikalische Demonstrationen. Leipzig 1887.
G. Hopkins: Experimental science. London.

Werke, die sich speziell auf elektrische Messungen beziehen, sollen im IV. Bande namhaft gemacht werden.

Die Beobachtungsfehler, Berechnung der Messungsergebnisse und die Methode der kleinsten Quadrate werden gewöhnlich in den Werken über Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt, doch existieren auch Werke, die sich spezieller mit obigen Fragen beschäftigen. Es sei hier auf folgende verwiesen:

Airy: On the algebraical and numerial theory of errors of observations. Cambridge 1861.
Bienaymé: Probabilité des erreurs (Journ. de Lionville, 1 série, t. 17).
Gaufs: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.
Bruno: Calcul des erreurs. Paris 1869.
Weinstein: Handbuch der physikalischen Maſsbestimmungen. Zwei Teile. Berlin 1886 bis 1892.
M. Merriman: Method of least squares. London 1877.
G. Hagen: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1867.
J. Bertrand: Calcul des probabilités. Paris 1868.

Zweites Kapitel.

Einige Hülfsapparate.

§ 1. **Die Längenteilmaschine.** Wie auf Seite 275 gesagt war, werden die Ablesungen der Instrumente an geradlinigen Skalen oder an Kreisteilungen ausgeführt. Dementsprechend existieren Längen- und Kreisteilmaschinen. Die ersteren teilt man noch ein in gewöhnliche und kopierende. Die gewöhnlichen dienen dazu, bestimmte vorgeschriebene Teilstriche aufzutragen, die kopierenden übertragen die Teilstriche vom fertigen Mafsstab auf einen neuen erst herzustellenden.

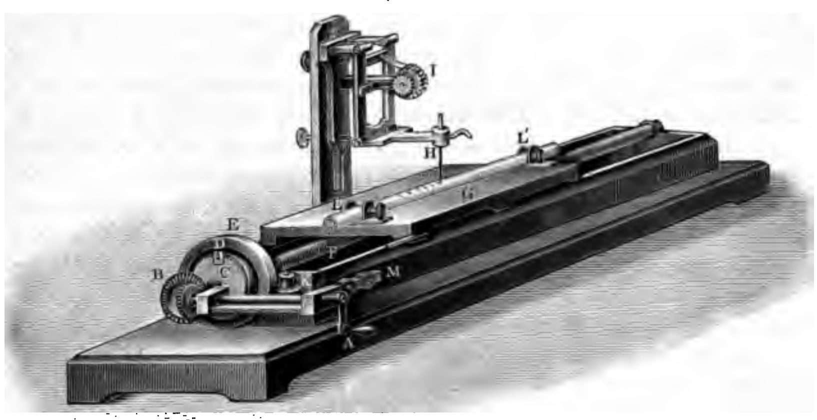
Es existiert eine grofse Zahl von Teilmaschinen verschiedener Konstruktion, die sich voneinander im Detail unterscheiden. Der wichtigste und allen gewöhnlichen Teilmaschinen gemeinsame Bestandteil ist eine horizontal angebrachte Schraube mit äufserst sorgfältig geschnittenen und möglichst gleichen Windungen. Die Enden dieser Schraube sind mit einer Kreisteilung versehen und ruhen in entsprechenden Zapfenlöchern (vergl. Fig. 124, *N*, rechts), infolgedessen die Schraube bei Drehung um ihre Achse keine fortschreitende Bewegung annehmen kann. Die Schraube führt durch eine Mutter, die ihrerseits an einem horizontal über der Schraube befindlichen Schlitten befestigt ist. Dreht man die Schraube, so erhalten Schraubenmutter und Schlitten eine fortschreitende Bewegung, deren Gröfse, falls die Schraubeneinschnitte absolut gleichmäfsig wären, dem Drehungswinkel der Schraube genau proportional sein müfste. Besondere Vorrichtungen gestatten es, die Schraube jedesmal um ein und denselben Winkel zu drehen und somit den Schlitten um dieselbe Strecke zu verschieben. Neben dem Schlitten ist ein Grabstichel angebracht, mit welchem man auf dem am Schlitten befestigten und sich mit ihm seitlich verschiebenden Stabe Teilstriche anbringen kann. Häufig verschiebt sich auch der Grabstichel gleichzeitig mit dem Schlitten, und ist dann der Stab parallel zur Schraubenachse festgeklemmt.

Im Detail unterscheiden sich die verschiedenen Teilmaschinen voneinander hauptsächlich durch die Art, wie die Schraube immer um den gleichen Winkel vorwärts gedreht wird und durch die Konstruktion des Grabstichels, der die Teilstriche aufzutragen hat. Diese Teilstriche sind nicht alle von gleicher Länge, in der Regel ist jeder fünfte und zehnte Teilstrich länger als die zwischenliegenden, oder es wechseln längere und kürzere Teilstriche unmittelbar miteinander ab (wie bei Teilung in halbe Millimeter) oder es folgen aufeinander kürzere und längere Teilstriche in irgend einer anderen bestimmten Reihenfolge. Das Drehen der Schraube um einen bestimmten Winkel und das Auftragen von Teilstrichen von bestimmter Länge mufs automatisch erfolgen, damit der Arbeiter seine

ganze Aufmerksamkeit auf den Grabstichel richten kann, und die einzelnen Teilstriche möglichst deutlich und gleichmäfsig ausfallen.

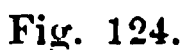
In Fig. 123 ist eine Teilmaschine von verhältnismäfsig einfacher Konstruktion dargestellt, man sieht hier die erwähnte Schraube F, den Schlitten G mit dem zu teilenden Stabe LL' und nebenan den Grabstichel H. Der Teil $ECBB'$ wird durch die Kurbel A in Bewegung

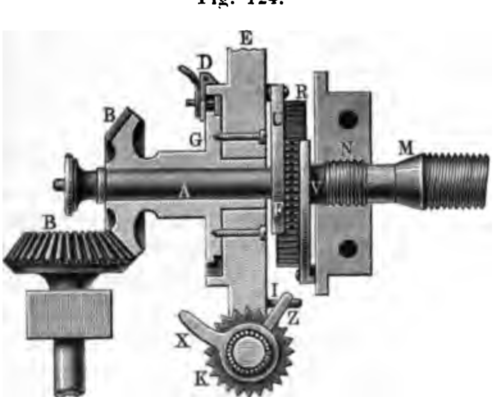

Fig. 123.



versetzt; Fig. 124 stellt diesen Teil gesondert dar, während Fig. 125 die den Grabstichel tragende Vorrichtung zeigt.

Die Drehung der Kurbel A wird durch zwei zu einander senkrechte kegelförmige Zahnräder BB (Fig. 124) auf den Teil BGE übertragen, der leicht auf der verlängerten Achse AV der Schraube NM aufsitzt, auf welcher aufserdem das Zahnrad R befestigt ist, so dafs sich gleichzeitig mit letzterem auch die Schraube selbst dreht. In die Zähne des Rades R greift die Feder UF, welche derart angebracht ist, dafs ihr Ende F bei Drehung von BGE in der Uhrzeigerrichtung (von links gesehen) von Zahn zu Zahn überspringt, die Achse AVM also fest bleibt; die Feder V ist an dem gufseisernen Rahmen (MM in Fig. 123) be-


Fig. 124.



festigt, welcher die Schraube trägt, und UF daran verhindert das Rad R mitzunehmen. Dreht man die Kurbel und somit den Teil BGE in entgegengesetzter Richtung, so stöfst das Ende F der Feder gegen einen der Zähne des Rades R, welches sich nun zugleich mit der Schraube M derart dreht, als wäre BGE fest mit der Achse AV verbunden. Der schmale Cylinder E dient dazu, dafs sich die Kurbel A und damit die Schraube selbst immer um einen und denselben gegebenen Winkel vorwärts dreht. E ist mit einem Schraubengewinde versehen, in welches das Zahnrad K hineingreift, und trägt die Zapfen J und D, von welchen letzterer an jedem beliebigen Punkte des Kreisumfanges GG festgeschraubt werden kann, so dafs der Winkelabstand von J und D beliebig grofs gemacht werden kann. Auf der Achse des Rades K sitzen zwei weitere Zapfen Z und X, die ebenfalls in beliebigem Winkelabstande befestigt werden können. Offenbar dreht sich bei einer vollen Umdrehung von BGE das Rad K um einen Zahn vorwärts. Dreht man die Kurbel und das Stück BGE in der Uhrzeigerrichtung, so stöfst schliefslich D an X, ebenso kann man in entgegengesetzter Richtung nur so lange drehen, bis J an Z stöfst.

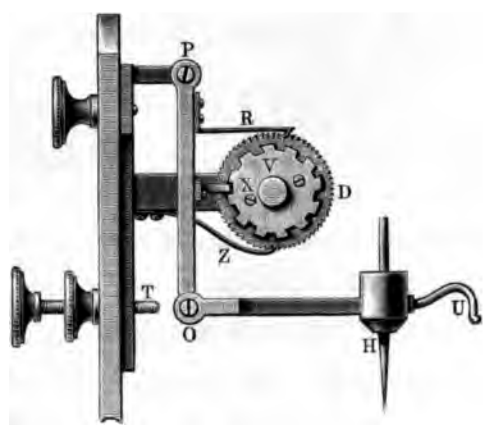
Man sieht nun leicht ein, wie die Schraube wiederholt um denselben Winkel gedreht und der Schlitten (GG in Fig. 123) immer um dieselbe Strecke vorwärts bewegt wird. Nehmen wir an, die Höhe eines Schraubenganges betrage 1 mm, und man habe Teilstriche aufzutragen, die um $\frac{1}{n}$ Millimeter voneinander abstehen. Zu diesem Zwecke stellt man den Zapfen D derart fest, dafs sein Winkelabstand von J gerade $\frac{360^0}{n}$ beträgt und befestigt die Zapfen Z und X an solchen Stellen, dafs J und D mit ihnen zusammenstofsen, sobald BGE sich nach der einen oder anderen Seite um $\frac{360^0}{n}$ gedreht hat. Sollen z. B. die Teilstriche um 0,1, 0,25, 0,5 oder 1 mm voneinander abstehen, so müssen die Winkelabstände von J und D entsprechend gleich 36^0, 90^0, 180^0 oder 360^0 (d. h. J und D müssen zu beiden Seiten von E sich gerade gegenüber stehen) sein. Sind die Teilstriche in gröfserem Abstande voneinander aufzutragen, etwa im Abstande von 1,5 mm oder 5 mm, so hat man den Zapfen X derart zur Seite zu rücken, dafs D einmal resp. viermal an K frei vorbeigeht und nur nach der zweiten resp. fünften Umdrehung mit X zusammentrifft. Dies ist dadurch möglich, dafs sich X zugleich mit dem Rade K langsam nach der einen oder anderen Seite dreht. Im ersten der erwähnten Fälle mufs der Winkelabstand von J und D 180^0, im zweiten Falle 0^0 betragen.

Während man die Kurbel abwechselnd im einen oder anderen Sinne dreht, bis die Zapfen J und Z oder D und X zusammentreffen, bleibt die

Schraube entweder in Ruhe oder sie dreht sich um einen bestimmten Winkel und verschiebt den Schlitten um die gewünschte Strecke. Das erste tritt ein bei einer Drehung nach links (gegen den Uhrzeiger), das andere bei einer Drehung nach rechts.

Damit sich das Rad *R* und die Schraube gleichzeitig mit *BGE* zu drehen beginnen, ist es notwendig, dafs das Ende der Feder *UF* fest gegen einen der Zähne von *R* drückt, so lange nämlich die Lage der Teile eine derartige ist, wie sie Fig. 124 darstellt. Ferner mufs die Zahl der Zähne von *R* durch *n* ohne Rest teilbar sein, d. h. dem Winkelabstande der Zapfen *J* und *D* mufs eine ganze Anzahl Zähne von *R* entsprechen. Wird die Schraube um gleiche Winkel gedreht, so verschiebt sich der Schlitten nur dann um gleiche Strecken, wenn auf der ganzen Schraubenlänge die Höhe der einzelnen Schraubengänge die gleiche ist. Letzteres trifft nun genau genommen niemals zu, man hat daher den Schraubeneinschnitt der Teilmaschine auf seine Besonderheiten hin genau zu untersuchen; übrigens darf auch nicht vergessen werden, dafs die Temperatur gleichfalls die Höhe des Schraubenganges beeinflufst.

Fig. 125.



In Fig. 125 ist ein verhältnismäfsig einfacher Grabstichel dargestellt; derselbe trägt den Schreibstift *H* mittels des Rahmens *POH*, welcher in *P* und *O* mit Scharnieren versehen ist. Auf einer gemeinsamen Achse befinden sich die beiden Zahnräder *D* und *V*, und greift der Zapfen *X* gerade in das Rad *V*. Der Rahmen *PO* und die übrigen Teile des Grabstichels sind übrigens deutlicher in Fig. 123 zu sehen, da Fig. 125 nur eine Seitenansicht darstellt.

Die Teilstriche werden auf folgende Weise hergestellt: Man hebt den Stift *H* mittels des Hakens *U* und führt ihn nach rechts, bis der vorspringende Zapfen *X* gegen den Rand des Rades *V* stöfst, darauf senkt man den Stift, bis er den Stab berührt, auf welchem die Teilstriche eingeritzt werden sollen. Hierauf bewegt man den Stift nach links, bis der untere Teil des Rahmens *O* (vergl. Fig. 123 und 125) gegen die Schraube *T* stöfst, die zuvor in geeigneter Weise eingestellt worden ist. Damit man abwechselnd Teilstriche von verschiedener Länge erhält, sind am Rade *V* Vertiefungen angebracht, die übrigens nicht alle gleich tief sind und ist das Rad *D* mit Zähnen versehen, die

von der Feder *R* erfafst werden. Bewegt man den Stift nach links, so werden beide Räder mittels *R* vorwärts gedreht und kann *X* bei seiner Rückkehr entweder gegen einen Zahn von *V* stofsen oder in eine der ungleich tiefen Lücken dringen. Die Verteilung und Tiefe der Lücken mufs danach bestimmt werden, in welcher Weise sich längere und kürzere Teilstriche folgen sollen, und um einen wie grofsen Winkel sich die Räder *D* und *V* bei Bewegung des Rahmens *PO* drehen.

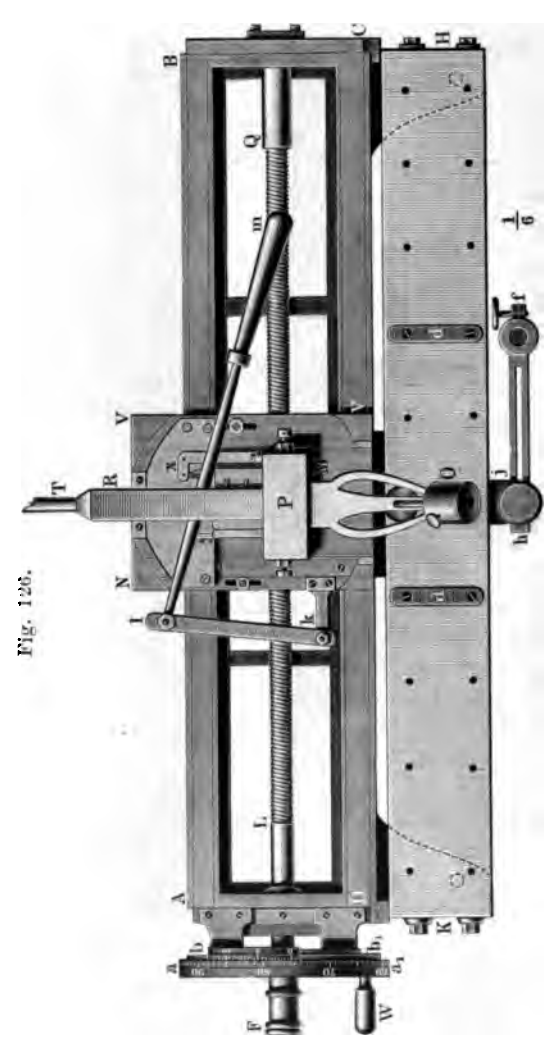


Fig. 126.

Wir wollen nunmehr die Beschreibung einer genaueren, vom Petersburger Mechaniker **Brauer** angefertigten Teilmaschine folgen lassen; die technische Reichsanstalt in Charlottenburg besitzt eine solche Teilmaschine von Brauer. Die nachfolgende Beschreibung derselben, sowie die entsprechenden Figuren sind aus **Th. Petruschewski**'s Physikkursus (russ.) entlehnt. Die Maschine ist in Fig. 126 in der Draufsicht und in Fig. 127 in der Seitenansicht dargestellt (in $^1/_6$ der natürl. Gröfse). Fig. 128 stellt die Stichelvorrichtung gesondert und Fig. 129 einen Teil derselben dar. In allen vier Figuren sind die gleichen Teile auch mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, und nimmt die folgende Beschreibung auf alle diese vier Figuren Bezug.

In Fig. 126 sieht man die Schraube *LQ*, an deren verlängerter

Achse der Schraubenkopf aa_1 befestigt ist. Der Deutlichkeit wegen sind die Schraubengänge grob gezeichnet; in Wirklichkeit sind dieselben von grofser Feinheit. Der erwähnte Schraubenkopf aa_1 ist auf seinem Umfange in 100 gleiche Teile geteilt, und kann man mit Hülfe des Nonius b (s. Kap. III, § 2) den Umdrehungswinkel der Schraube, die durch die Kurbel W gedreht wird, bis auf 0,001 des Kreisumfanges bestimmen. Die Schraube geht durch eine Mutter hindurch, welche den Schlittenapparat NVV' trägt und zwischen den Schienen $ABCD$ hinführt. Auf dem Schlitten befindet sich die Stichelvorrichtung, die also, wenn die Schraube gedreht wird, parallel zur Schraubenachse fortbewegt wird. Am Schlitten befindet sich die Platte M (Fig. 128), welche sich senkrecht zur Schraubenachse bewegen kann.

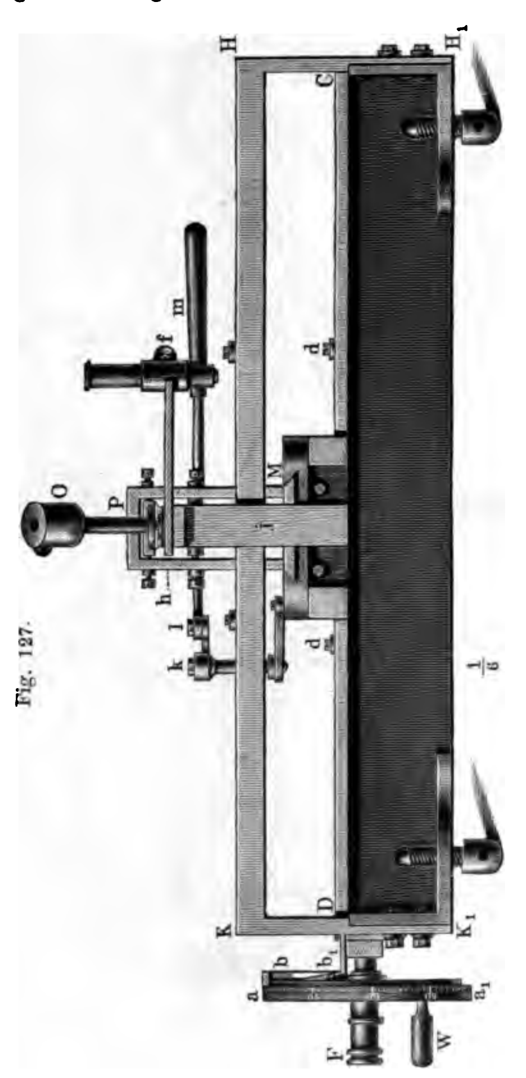
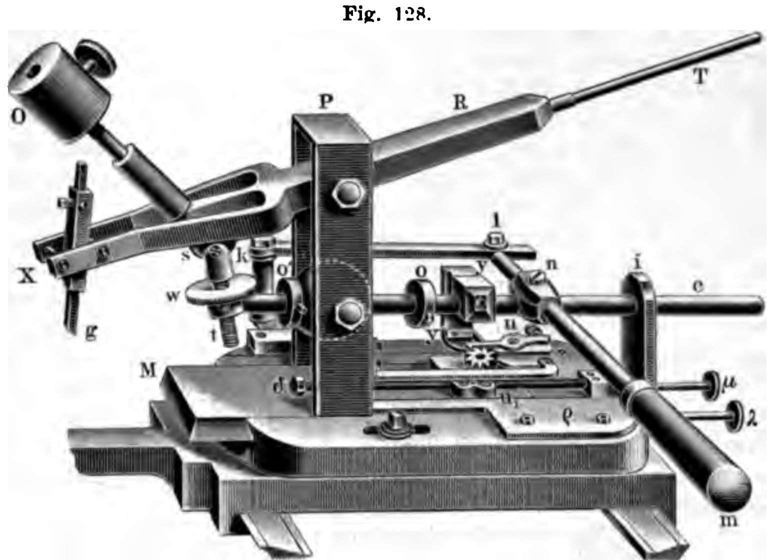


Fig. 127.

Die Stichelvorrichtung ist in Fig. 128 und Fig. 129 dargestellt. Auf M befindet sich der Rahmen P, welcher den Hebel TRX trägt; bei X ist der Stichel g selbst befestigt. Dieser Stichel bewegt sich automatisch nach oben, bewegt sich nach der Stelle hin, wo der Teilstrich seinen Anfang haben soll, senkt sich bis zur Berührung mit dem zu teilenden Objekte, bewegt sich horizontal um die Länge eines Teilstriches nach vorn und hebt sich dann wieder. Diese ganze Manipulation wiederholt sich dann, nachdem man durch entsprechende Drehung des Schraubenkopfes aa_1 (Fig. 127) die Stichelvorrichtung

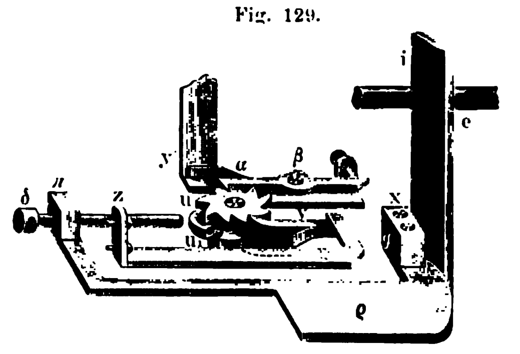
bis zu jener Stelle verschoben hat, wo der nächstfolgende Teilstrich gezogen werden soll. Der Stab, auf welchem die Teilstriche angebracht werden, ist während der ganzen Zeit auf dem gufseisernen Tischchen *KH* (Fig. 126) mit Hülfe der Stäbchen *dd* befestigt, die an verschiedene Stellen

Fig. 128.



von *KH* geschraubt werden können. Die beschriebenen Bewegungen des Stichels *g* werden durch verschiedene Teile der Maschine bewirkt. Der Stab *e* (Fig. 128) geht frei durch den Träger *i* und die Kugel hindurch, die sich innerhalb des Rahmens *P* befindet und wird mit Hülfe des Stabes *kl*, der auf dem cylindrischen Säulchen *k* befestigt ist, und mittels des Hebels *m*, der mit ihm in *n* zusammenhängt, in Bewegung versetzt. Die beiden Kreisscheiben *o* und *o'* stofsen gegen die erwähnte Kugel, sobald man den Griff *m* nach links oder rechts bewegt und verhindern dadurch,

Fig. 129.



dafs der Stab *e* über ein Gewisses hinaus nach links oder rechts gleitet. Der Stab *e* selbst nun hebt oder senkt mit Hülfe des Rädchens *s* den Stichel *g*. Bewegt man den Griff *m*, wenn die Kreisscheiben *o* resp. *o'* die Kugel bereits berühren, noch weiter, so wird die ganze Platte *M*

zugleich mit dem darauf befindlichen Rahmen P und Stichel g in Bewegung gesetzt; auf diese Weise wird der gesenkte Stichel nach rechts bewegt und der Teilstrich gezogen resp. der gehobene Stichel zurückbewegt. Um den Teilstrichen die gewünschte Länge zu geben, sind die Schrauben δ und μ (in Fig. 129 ist μ fortgelassen) angebracht; sie gehen durch die Schraubenmuttern π und φ, welche mit der Platte ϱ zusammenhängen; ϱ dagegen ist am Schlitten befestigt. Diese Schrauben beschränken durch die Lage ihrer Enden die Bewegung der Platte M auf dem Schlitten, da sie gegen das Rad u_1 stofsen, das sich zugleich mit dem Sperrad u um eine in M befindliche Spindel dreht. Der Sperrhaken β ist mittels einer krummen Lamelle yy am Stabe e befestigt und treibt das mit 10 Zähnen versehene Rad u um je einen Zahn vorwärts, wobei sich auch das Rad u_1 um den gleichen Winkel (d. h. um 36°) dreht. Letzteres besitzt zwei einander diametral entgegenstehende Lücken, deren Tiefe durch in denselben befindliche Schräubchen (vergl. Fig. 129) reguliert werden kann. Nach je vier Bewegungen nach links und rechts gelangt die Schraube δ in eine dieser Lücken, so dafs jeder fünfte und zehnte Teilstrich länger ausfällt und zwar der zehnte noch etwas länger als der fünfte. Dadurch, dafs man den Schräubchen eine geeignete Stellung giebt, kann man es erreichen, dafs die Wirkung der Lücken völlig aufgehoben wird und alle Teilstriche die gleiche Länge erhalten.

Um die Höhe der Schraubengänge zu bestimmen, also auch die Gröfse der Verschiebung des Stichels bei einer vollen Schraubenumdrehung, legt man auf das Tischchen KH (Fig. 126) einen richtigen Mafsstab und richtet das Mikroskop f (Fig. 126 und 127), das am Schlitten befestigt ist, auf einen seiner Teilstriche. Hierauf dreht man den Schraubenkopf aa_1 so lange, bis sich das Mikroskop um eine bestimmte Anzahl Skalenteile verschoben hat. Der gesuchte Schraubengang ist gleich dieser Zahl, dividiert durch die Anzahl der Schraubenumdrehungen. Hierauf ist es leicht, den Winkel zu bestimmen, um welchen man aa_1 zu drehen hat, damit die aufzutragenden Teilstriche die gewünschte Entfernung erhalten.

Welche Bedeutung der Nonius b_1 hat, der sich neben dem Schraubenkopfe aa_1 befindet, soll hier nicht erörtert werden.

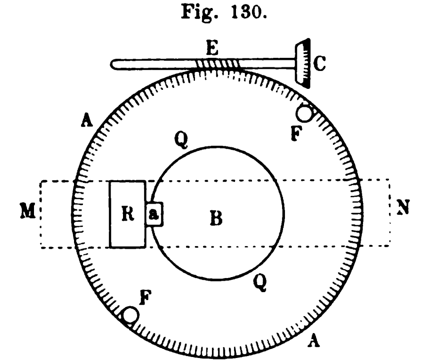
Die kopierende Längenteilmaschine dient dazu, auf einem gewissen Stabe A eine Skala herzustellen, die mit der auf einem als Muster dienenden, bereits fertigen Mafsstabe B befindlichen Skala vollkommen übereinstimmt. Es möge hier blofs auf die Grundidee hingewiesen werden, auf welcher die Konstruktion derartiger Maschinen beruht.

Der mit einer Teilung zu versehende Stab A und der Mafsstab B werden einander parallel befestigt; oberhalb A befindet sich der Stichel C, oberhalb B ein Mikroskop D. Die Entfernungen des

Stichels C und Mikroskops D und ebenso des Stabes A und Mafsstabes B voneinander bleiben immer unverändert dieselben. Eines der beiden Systeme, entweder A und B oder C und D kann sich verschieben, und geschieht dies, wie bei den vorhergehend beschriebenen Teilmaschinen, mit Hülfe einer Schraube und Schlittenvorrichtung. Das Kopieren geschieht nun folgendermafsen. Durch entsprechende Verschiebung des beweglichen Systems bringt man einen der Teilstriche des Mafsstabes unter das Mikroskop (d. h. man bringt ihn zur Koincidenz mit dem Faden, welcher in der Mitte des Gesichtsfeldes im Mikroskop erscheint) und zieht mit dem Stichel einen Teilstrich auf A. Hierauf bringt man den nächsten Teilstrich des Mafsstabes unter das Mikroskop und trägt den zweiten Teilstrich auf u. s. w. Offenbar kann jede Teilmaschine zum Kopieren dienen, wenn sie nur mit einem Mikroskop versehen ist und man neben dem zu teilenden Mafsstabe noch einen zweiten, als Muster dienenden, anbringen kann.

§ 2. **Die Kreisteilmaschine.** Dieses Instrument dient dazu, auf Kreisen eine Skalenteilung anzubringen, die für alle solche Apparate wichtig ist, an denen man den Drehungswinkel irgend eines ihrer Teile zu messen hat. Die Kreisteilmaschine dient nur zum Kopieren, d. h. zur Übertragung der Teilstriche von einem bereits geteilten, horizontalen Kreise auf beliebige andere. Jener als Muster für die Kreisteilung dienende Kreis bildet den wesentlichsten und wertvollsten Teil der Kreisteilmaschine.

Fig. 130.



Das Prinzip der Konstruktion einer Kreisteilmaschine kann man an der schematischen Fig. 130 erkennen. Der geteilte Kreis AA ist um die Achse B drehbar und am Rande mit Zähnen versehen; er wird mittels der endlosen Schraube E in Drehung versetzt, deren Kopf C ebenfalls eine Teilung trägt. Oberhalb der Teilung von AA befinden sich ein oder mehrere Mikroskope FF. Der Kreis QQ, auf welchem die Teilung anzubringen ist, wird über AA auf derselben Achse B konzentrisch mit ihm befestigt. Die Stichelvorrichtung R ist längs der Brücke MN, welche über AA hinführt oder seitlich von der Richtung der Radien dahingleitet, beweglich. Je nach der Gröfse des Radius des zu teilenden Kreises QQ befestigt man den Stichel an einer solchen Stelle der Brücke, dafs die Spitze a des Stichels sich gerade oberhalb der Stelle von QQ befindet, an welcher die Teilstriche aufgetragen werden sollen. Durch Drehung

von E bringt man die Teilstriche des Kreises AA der Reihe nach unter das Mikroskop F und zieht jedesmal mit dem Stichel a einen Strich auf dem Kreise QQ, der sich gleichzeitig mit AA dreht. Die Stichelvorrichtung ist auch hier eine derartige, dafs sich der Stichel automatisch hebt, senkt und in gewünschter Reihenfolge Striche von verschiedener Länge zieht.

Bedient man sich der am Schraubenkopfe C angebrachten Teilung, so kann man auf QQ gleich weit abstehende Teilstriche auftragen, ohne von den Mikroskopen Gebrauch zu machen. Dies geschieht, wenn keine grofse Genauigkeit erstrebt wird oder wenn Teilstriche aufgetragen werden sollen, die keinen vorher bestimmten Winkelgröfsen zu entsprechen haben.

In Fig. 131 ist eine Kreisteilmaschine dargestellt; die daselbst vorkommenden Buchstaben entsprechen der schematischen Zeichnung

Fig. 131.



Fig. 130. Der Kreis QQ ist fortgelassen. Man sieht hier den geteilten Kreis A, die endlose Schraube E, deren Kopf C, an welchem sich ein Nonius befindet, den zum Feststellen des zweiten Kreises (QQ in Fig. 130) dienenden Teil B, das Mikroskop F (dasselbe ist im vorliegenden Falle ein gebrochenes), die Stichelvorrichtung R, deren Stichel in einer beliebigen Entfernung von der Achse der Kreise befestigt werden kann, indem man die Stichelvorrichtung auf MN (das hier nicht die Form einer Brücke hat, sondern seitlich angebracht ist) verschiebt. Eine eingehendere Beschreibung der Stichelvorrichtung soll hier nicht gegeben werden. Der Kreis A ist im vorliegenden Falle in Teile von je 10′ geteilt, sein Durchmesser beträgt 25 cm.

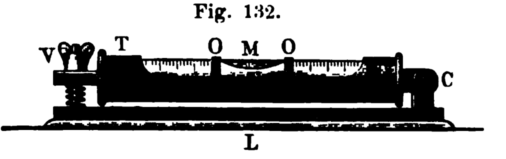
Im Jahre 1893 wurde in Washington eine Kreisteilmaschine hergestellt, welche die Teilung von Kreisen vollkommen automatisch voll-

führt. Die ganze Arbeit der Teilung in 360×12 Teile (so dafs die einzelnen Teile um 5′ voneinander abstehen) wird von jener Maschine in acht Stunden vollendet.

§ 3. Die Libelle. Dieser Hülfsapparat dient dazu, Ebenen in horizontale Lage zu bringen und besteht, wie aus der Elementarphysik bekannt ist, aus einer horizontalen Röhre, deren obere Wandung in der Längsrichtung schwach kreisförmig gebogen ist. Die Röhre ist fast ganz mit einer möglichst beweglichen Flüssigkeit angefüllt und enthält aufserdem ein Gasbläschen; gewöhnlich nimmt man zur Füllung Schwefeläther, so dafs das Bläschen vorzugsweise aus Ätherdampf besteht. Auf der oberen Wandung der Röhre befindet sich eine Teilung, in deren Mitte sich das Bläschen einstellt, wenn die Röhrenachse horizontal ist; ist die Achse gegen den Horizont geneigt, so bewegt sich das Bläschen zur Seite.

Fig. 132 stellt eine Libelle dar; dieselbe ist auf dem Brettchen *L* befestigt, das Bläschen befindet sich in *M*. Mit Hülfe der Schraube *V* mufs die Röhre zunächst so eingestellt werden, dafs sich das Bläschen *M* zwischen *O O* befindet, wenn *L* genau horizontal ist. Wie dies geschehen kann, soll hier nicht erörtert werden.

Fig. 132.



Eine gegebene Ebene ist horizontal, wenn sich in zwei auf dieselbe senkrecht zu einander gesetzten Libellen die Bläschen in der Mitte einstellen. Natürlich kann man dieselbe Prüfung auch mit Hülfe nur einer Libelle ausführen, die man dann zweimal in zu einander senkrechten Lagen auf die Ebene zu stellen hat.

Aufser den Röhrenlibellen giebt es noch runde sogenannte Dosenlibellen, deren Deckelwandung schwach sphärisch gekrümmt ist. In der Mitte der Deckelwandung ist ein kleiner Kreis verzeichnet, konzentrisch mit diesem mufs sich das Bläschen einstellen, wenn die Ebene, auf welche man die Dosenlibelle gesetzt hat, horizontal ist. Die Dosenlibellen sind weniger empfindlich als Röhrenlibellen.

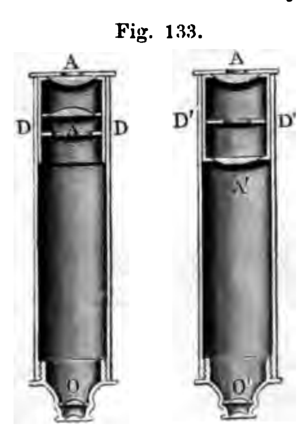
Man hat stets darauf Rücksicht zu nehmen, dafs sich die Gröfse des Bläschens mit der Temperatur und zwar sehr beträchtlich ändert.

§ 4. Lupe, Mikroskop und Fernrohr. Zur schärferen Betrachtung von kleinen Teilungen oder anderen kleinen Gegenständen bringt man an vielen Apparaten leicht verschiebbare Lupen oder Mikroskope an. Es ist hierbei besonders darauf zu achten, dafs das betrachtete Objekt gut beleuchtet ist. Zur Betrachtung entfernterer

Gegenstände benutzt man ein Fernrohr; letzteres, ebenso wie das Mikroskop, giebt im allgemeinen umgekehrte Bilder.

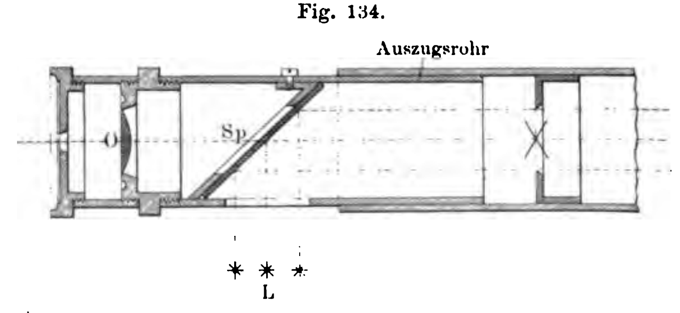
Wie bekannt, enthalten Mikroskope und Fernrohre zwei Systeme von Linsen, das Objektiv- und das Okularsystem. Das Objektivsystem giebt ein umgekehrtes, reelles Bild in der Fokalebene, die von ihm weiter als der Hauptbrennpunkt entfernt ist. Dieses Bild wird mit Hülfe des Okulars betrachtet, so dafs also letzteres die einfache oder zusammengesetzte Lupe vertritt und ein imaginäres, vergröfsertes Bild giebt. In der Fokalebene, die bei Fernröhren dem Hauptfokus des Objektivsystems immer sehr nahe ist, spannt man möglichst feine Fäden (Drähte oder Spinnenfäden) aus, die alsdann im Gesichtsfelde zugleich mit dem betrachteten Objekte auftreten. In Fig. 133 sind zwei Mikroskope im Längsdurchschnitt dargestellt. O und O' bezeichnen das Objektivsystem, das mehr oder weniger kompliziert sein kann. Dasselbe hat bei dem links skizzierten Apparate seine Fokalebene in DD, hier befinden sich auch die Fäden. Das Okularsystem besteht aus zwei plankonvexen Linsen, deren konvexe Seiten einander zugekehrt sind; man nennt dieses Okularsystem **Ramsdensches Okular**. Die Skizze rechts stellt ein Mikroskop mit **Huygensschem Okular** dar; zwei plankonvexe Linsen sind hier beide mit ihren planen Seiten dem Auge des Beobachters zugekehrt. Die Fokalebene befindet sich in $D'D'$ und die Fäden zwischen den Linsen A und A', so dafs man eigentlich die Linse A' zum Objektivsystem rechnen könnte.

Fig. 133.



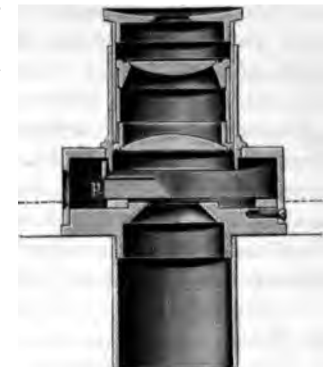
In vielen Fällen wird das in Fig. 134 abgebildete **Gaufssche Okular** benutzt, in welchem die Fäden auf eine besondere Weise beleuchtet werden. Zu diesem Zwecke befindet sich an der einen Seite der Okularröhre ein Ausschnitt, durch welchen die Strahlen einer Licht-

Fig. 134.



quelle L auf die spiegelnde Glasplatte Sp auffallen; von dieser werden sie nach dem Fadenkreuz reflektiert. Blickt man durch ein mit solchem Okular versehenes Fernrohr auf eine zu der Achse desselben senkrechte spiegelnde Fläche, so sieht man gleichzeitig das wirkliche und das gespiegelte Fadenkreuz. Dieselben müssen zusammenfallen, wenn der Kreuzungspunkt der Fäden genau auf der Achse des Fernrohres liegt, und zwar müssen sie auch bei seitlichen Verschiebungen des Auges vor der Okularöffnung zusammenbleiben. Hat man dies erreicht, so kann man mit Hülfe dieses Okulars die Achse des Fernrohres genau senkrecht zu einer gegebenen spiegelnden Fläche einstellen.

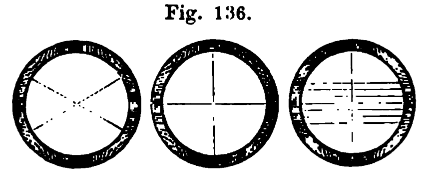
Fig. 135.



Lamont und Abbe haben die schräge Glasplatte durch ein Reflexionsprisma ersetzt. In Fig. 135 ist ein von F. Martens angegebenes Okular abgebildet, in welchem p das Prisma ist, welches die aus der Öffnung links kommenden Strahlen zu den Fäden reflektiert.

In Fig. 136 sind einige Ringe mit ausgespannten Fäden dargestellt, wie sie in den Fokalebenen von Mikroskopen und Fernröhren je nach den verschiedenen Zwecken, denen sie dienen sollen, Verwendung finden. In manchen Instrumenten sind diese Ringe durch dünne Glasplättchen ersetzt, auf denen mittels eines Diamanten sehr feine Striche gezogen sind.

Fig. 136.



Ausführlicher wird die Konstruktion von Fernröhren im zweiten Bande behandelt werden.

Drittes Kapitel.

Messung von Längen und Flächen.

§ 1. **Mafsstäbe.** Im vorhergehenden Kapitel haben wir einige Apparate betrachtet, die zwar nicht zu den Mefsinstrumenten selbst gerechnet werden können, die aber bei Herstellung letzterer oder auch als Teile von Mefsinstrumenten verwendet werden. In den nun folgenden Kapiteln sollen Methoden zur Messung einiger der auf S. 269 ge-

nannten Gröfsen behandelt werden; von der Art, wie die anderen im späteren vorkommenden Gröfsen gemessen werden, soll an entsprechender Stelle die Rede sein.

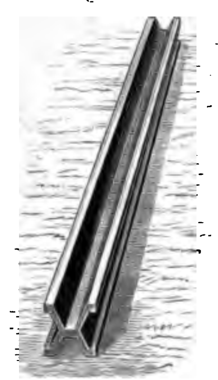
Um genaue Messungen ausführen zu können, mufs man die Skalen der einzelnen Instrumente mit einer sicher richtigen Skala vergleichen und zu diesem Zwecke braucht man genaue Normalmafsstäbe (Längenetalons).

Es giebt zwei Arten von Längenmafsstäben: 1. Endmafsstäbe (étalons à bout); dieselben besitzen geringere Genauigkeit und wird bei ihnen die Länge durch den Abstand bestimmt, welchen zwei einander parallele zu den schwach abgerundeten Enden gezogene Tangentialebenen, die zur Achse des Mafsstabes senkrecht sind, besitzen (und zwar bei bestimmter Temperatur). 2. Strich-Etalons (étalons à trait), auf denen zwei Teilstriche senkrecht zur Achse angebracht sind; als Länge des Mafsstabes gilt der Abstand zwischen diesen Teilstrichen bei bestimmter Temperatur.

Die genauesten Metermafsstäbe werden gegenwärtig im internationalen Bureau der Mafse und Gewichte hergestellt; dasselbe befindet sich in Sèvres bei Paris und wird auf Kosten fast aller zivilisierten Nationen unterhalten.

Diese Mafsstäbe bestehen aus einer Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium und haben die Dichte 21,53; ihre Gestalt giebt Fig. 137 wieder. Der Querschnitt ähnelt einem X und ist diese Gestalt aus dem Grunde gewählt worden, weil bei ihr eine Durchbiegung nur in geringem Mafse auftritt. Die Endstriche sind auf dem Grunde der oberen Rinne in je 1 cm Abstand von jedem der beiden Enden eingeschnitten; die Fläche, auf der sie sich befinden, geht durch den Schwerpunkt des Mafsstabes. Als Urprototyp des Meters gilt der Mafsstab, welcher 1799 verfertigt wurde.

Fig. 137.



Seitens der internationalen Kommission wurde zunächst eine Kopie dieses Mafsstabes hergestellt und darauf nach letzterer 31 Mafsstäbe, die im Jahre 1891 durch Loos an die verschiedenen Staaten verteilt wurden, die an der Einrichtung des internationalen Bureaus der Mafse und Gewichte mitgewirkt hatten.

Dem Deutschen Reiche fiel der Stab Nr. 18 zu; die Länge desselben beträgt

$$1\,\text{m} - 1{,}0\,\mu + [8{,}642\,t + 0{,}00100\,t^2]\,\mu,$$

wo die Temperatur t in Graden der im internationalen Dienst für Mafs und Gewicht angenommenen Normalskala ausgedrückt ist und $\mu = 0{,}001$ mm bedeutet. Bei 0° ist die Länge also gleich 1 m — 1,0 μ.

Die Genauigkeit der Bestimmung beträgt bei mittlerer Temperatur ein bis zwei Zehntausendteile Millimeter.

Die wahre, als Längeneinheit geltende Meterlänge wird durch dasjenige Meter dargestellt, welches als internationales Prototyp in dem früher genannten Bureau der Mafse und Gewichte im Pavillon de Breteuil zu Sèvres bei Paris aufbewahrt wird; für jeden einzelnen Staat gilt das in den Besitz desselben übergegangene Mafs als Prototyp der Längeneinheit, natürlich mit Rücksicht auf die für dasselbe geltenden, dem Mafsstabe beigegebenen Korrektionen. Diese einzelnen Prototype unterscheiden sich voneinander nicht, wenigstens nicht innerhalb der Grenzen, welche für die heutige Entwickelung der Technik und der Mefsmethoden gelten.

Zum Vergleichen der verschiedenen Mafsstäbe untereinander dient der sogenannte Komparator. In § 4 wird das Prinzip angedeutet werden, auf welchem seine Konstruktion beruht.

Wiederholt ist die Frage aufgeworfen worden, ob es nicht möglich sei, dafs die aufgestellte Längeneinheit durch irgend eine gewaltige Katastrophe oder durch die allmähliche Abnutzung der Urmafsstäbe verloren gehen oder sich ganz allmählich verändern könnte. In solchem Falle müfste es erwünscht scheinen, dafs man im stande wäre, die verloren gegangene Meterlänge genau wiederzufinden. Dafs solches möglich, darauf ist seitens des amerikanischen Gelehrten Michelson hingewiesen worden; dieser schlug vor, das Verhältnis der Meterlänge zu einer solchen Länge zu bestimmen, die durch Beobachtungen einer bestimmten Erscheinung, welche nur von den Grundeigenschaften des Äthers oder der Materie abhängt, erhalten werden kann. Eine solche Erscheinung ist die Ausbreitung der Lichtschwingungen durch Luft von bestimmter Temperatur und bestimmtem Drucke bezw. im Vakuum. Wir haben schon wiederholt erwähnt, dafs man das Licht als harmonische Schwingungsbewegung betrachten kann, die sich in einem besonderen Medium — dem Äther — fortpflanzt. Die verschiedenfarbigen Strahlen des Spektrums unterscheiden sich voneinander durch ihre Schwingungsdauer (Periode), und einem Lichtstrahl von gegebener Farbe (Brechbarkeit) entspricht eine ganz bestimmte Wellenlänge λ. Nach dem Vorschlage von Michelson hat man die Wellenlänge eines bestimmten Strahles unter streng formulierten Bedingungen als ursprüngliche Längeneinheit anzusehen und ein für allemal ihr Verhältnis zur Meterlänge festzustellen. Zu diesem Zwecke wählte Michelson drei Strahlen, einen roten, einen grünen und einen blauen, welche alle von den leuchtenden Dämpfen des Kadmiums ausgesandt werden, und fand in Luft von 15° C. und 0,76 m Quecksilberdruck

für den roten Strahl . . . . 1 m = 1553163,6 λ_1,
„ „ grünen „ . . . . 1 m = 1966249,7 λ_2,
„ „ blauen „ . . . . 1 m = 2083372,1 λ_3,

wenn λ_1, λ_2 und λ_3 die Wellenlängen der betreffenden drei Strahlen sind. Hieraus folgt umgekehrt

$$\lambda_1 = 0{,}64384722\,\mu,$$
$$\lambda_2 = 0{,}50858240\,\mu,$$
$$\lambda_3 = 0{,}47999105\,\mu\ ^{1}).$$

Mit anderen Methoden, kleine Längen mit Hülfe der Lichtwellen zu messen, werden wir uns im zweiten Bande bekannt machen.

§ 2. **Nonius.** Der Nonius dient dazu, die Zehntel der auf Maſsstäben angebrachten Teilungen abzulesen und ist einfach ein kleines Lineal, das am Maſsstabe entlang gleiten kann und gewöhnlich in zehn Teile geteilt ist, deren Gesamtlänge neun (Fig. 138) resp. elf (Fig. 140) Teilungen des Maſsstabes gleichkommt. In beiden Fällen ist jeder Teil des Nonius von jedem Teil des Maſsstabes um 0,1 der letzteren unterschieden. Im ersten Falle müssen die Noniusteilungen sich nach derselben Seite folgen, wie die Teilungen am Maſsstabe (Fig. 138 und 139), im zweiten Falle haben die Noniusteilungen sich nach entgegengesetzter Seite zu folgen. Aus Fig. 139 ist ersichtlich, wie man mit Hülfe des Nonius CD eine Länge EC am Maſsstabe AB bis auf 0,1 der Teilungen des letzteren miſst. Ist der Nonius an EC herangebracht, so fällt sein siebenter Teilstrich mit einem Teilstrich des Maſsstabes zusammen. Der sechste Teilstrich des Nonius ist vom nächsten Teilstrich (a) des Maſsstabes um 0,1, der fünfte von (b) um 0,2, der vierte um 0,3 entfernt u. s. w. Somit ist offenbar $EC = 12{,}7$ Teilungen des Maſsstabes. Eben dieselbe Länge hat EC auch in Fig. 140.

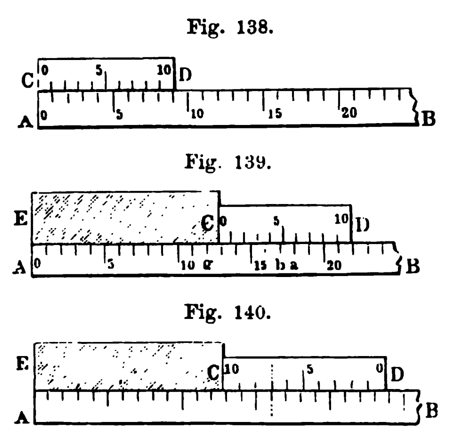


Fig. 138.

Fig. 139.

Fig. 140.

Bei uns werden fast ausschlieſslich Nonien der ersten Form angewandt und der Skalenpunkt abgelesen, der gegenüber dem Nullpunkt des Nonius liegt. Die ganzen Teile der Skala werden unmittelbar abgelesen, die Zahl der Zehntel ist gleich der Ordnungszahl des Noniusteilstriches, der mit einem Teilstrich des Maſsstabes zusammenfällt.

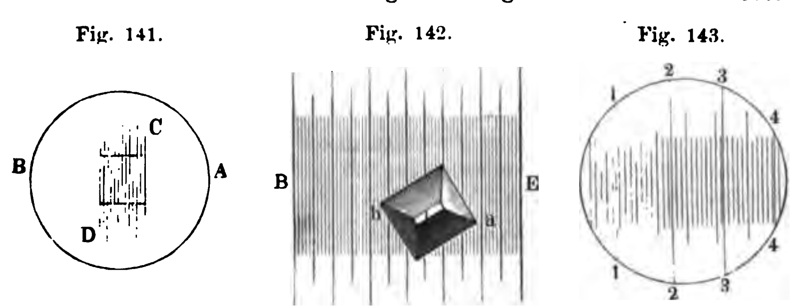
---

[1]) Michelson, Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures, t. XI; Journ. de phys. (3) **3**, p. 5, 1894.

§ 3. Mikrometer. Unter diesem Namen versteht man Apparate oder Teile von Apparaten, die zum Messen sehr kleiner linearer Dimensionen dienen.

Zum Messen von mikroskopischen Körpern wendet man bisweilen folgende Methode an. Man bringt in die Fokalebene des Objektivs eines Mikroskops ein dünnes Glasplättchen, auf welchem parallele Teilstriche von ziemlich beträchtlicher Länge äquidistant eingeritzt sind (vergl. Fig. 141 und 142); es mögen etwa n solcher Teilstriche auf 1 mm gehen. Durch das Okular sieht man gleichzeitig diese Teilstriche, sowie das Bild des zu messenden Gegenstandes, welches vom Objektiv entworfen wird (Fig. 142). Auf diese Weise werden die Dimensionen jener Bilder unmittelbar gefunden. Die wahren Dimensionen des Gegenstandes sind k mal kleiner, wenn k die Vergröfserung bedeutet, die vom Objektiv bewirkt wird. Um k zu finden, betrachtet man unter dem Mikroskop eine andere feine Skala mit bekannter Teilung, von der einige Teilstriche im Gesichtsfelde erscheinen; es mögen etwa m von diesen Teilstrichen auf 1 mm gehen. Fig. 143 stellt das Gesichts-

Fig. 141. Fig. 142. Fig. 143.

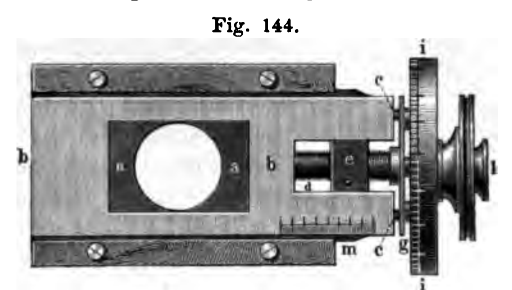


feld mit beiden gleichzeitig sichtbaren Skalen dar, wobei 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3 die Teilstriche der Hülfsskala sind. Man bestimmt nun, wie viele Teilstriche der einen Skala auf eine bestimmte Zahl der anderen kommen und hieraus ferner, wie viele Teilstriche der Okularskala (etwa p) gleich einer Teilung des Bildes der Hülfsskala sind, deren scheinbare Gröfse gleich $\frac{k}{m}$ Millimeter ist. Aus der Relation $\frac{k}{m} = \frac{p}{n}$ wird k gefunden.

Es giebt eine ganze Reihe von Mikrometern, bei denen die Messung darauf beruht, dafs man die Umdrehungszahl einer Schraube mit sehr feinem und regelmäfsigem Schnitt bestimmt. Solche Schrauben mit der entsprechenden Schraubenmutter nennt man **Mikrometerschrauben**. Die gesuchten Dimensionen der zu messenden Körper werden hier durch die Gröfse der Drehung der Mikrometerschraube oder durch die Verrückung der Schraube selbst oder gewisser Teile des Apparates gemessen.

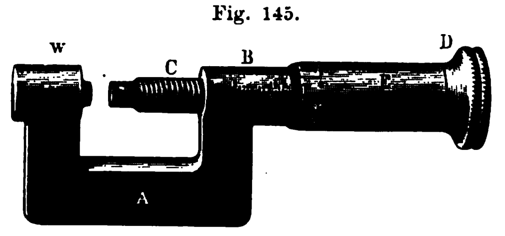
In Fig. 144 ist ein Mikrometer dargestellt, welches auch zur Messung der linearen Dimensionen kleiner Körper dienen kann, wenn man gleichzeitig ein Mikroskop mit Fadenkreuz verwendet. Der Rahmen desselben wird dann auf das Objekttischchen des Mikroskops gebracht; mit diesem Rahmen hängt die Schraubenmutter *e* zusammen. Der Schraubenkopf *ii* wird in beliebiger Lage an der Schraube mittels *l* festgestellt. Bei Drehung der Schraube verschiebt sich die Platte *aa*, welche in einer kreisförmigen Öffnung ein Glasplättchen trägt. Auf letzteres legt man den Gegenstand und zwar so, dafs die an ihm zu messende lineare Distanz der Schraubenachse parallel wird. Darauf dreht man an *ii* so lange, bis zuerst das eine, dann das andere Ende der zu messenden Linie mit dem Durchschnitt der Okularfäden zusammenfällt. Jedesmal wird die Ablesung der ganzen Umdrehungen an der bei *m* befindlichen Skala, der Bruchteile einer Umdrehung am Schraubenkopfe *ii* gemacht. Die Differenz zweier Ablesungen giebt die gesuchte Länge.

Fig. 144.



Zu den Mikrometern kann füglich auch die in Fig. 145 dargestellte Vorrichtung gerechnet werden; dieselbe dient zur Bestimmung der Dicke von Platten und Drähten. Versetzt man den Schraubenkopf *D* in Drehung, so geraten der Cylinder *E* und die Schraube *C* in fortschreitende Bewegung. Der zu messende Gegenstand wird zwischen das Schraubenende und das hervorspringende Stück bei *w* gebracht; die Schraube bringt man zuerst zur Berührung mit diesem Stück und macht eine Ablesung an der Skala *B* und dem in 100 Teile geteilten Umfange des Cylinders *E*. Sobald das Schraubenende gegen das hervorspringende Endstück oder aber gegen den zu messenden Gegenstand stöfst, vergröfsert ein weiteres Drehen des Schraubenkopfes keineswegs den Druck auf den eingeklemmten Gegenstand, denn *D* sitzt nur lose auf der Schraube.

Fig. 145.

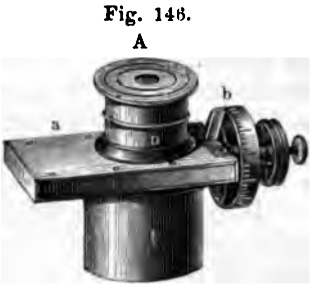


Ein sehr empfindliches elektrisches Mikrometer ist von Ph. Shaw[1]) angegeben worden.

[1]) Phil. Mag. (5) 50, 537, 1900.

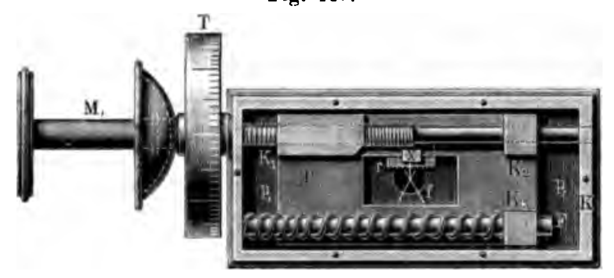
§ **4. Okularmikrometer.** Dieser wichtige Meſsapparat wird am Okular von Mikroskopen und Fernröhren angebracht. Er befindet sich in einem flachen Gehäuse a (Fig. 146), welches die Röhre A des Okulars umgiebt. Von auſsen sieht man nur den Kopf b der Mikrometerschraube, die dazu dient, einen oder mehrere Fäden des Okulars parallel mit sich selbst zu verschieben.

Fig. 146.



Das Innere ist in Fig. 147 abgebildet. K ist das flache Gehäuse, in welchem sich der sogenannte Schlitten mit der Platte p, welche die Fäden trägt, bewegt. An dieser Platte sind drei Ansätze K_1, K_2 und K_3 befestigt. K_1 ist mit einem Schraubeneinschnitt, durch welchen die Mikrometerschraube hindurchgeht, versehen, K_2 dient nur zur Führung, die glatte Fortsetzung der Schraubenspindel geht nämlich frei durch K_2 hindurch. Dasselbe gilt für den Ansatz K_3 und den Stab F, dessen linkes Ende an der inneren Wand des Rahmens K befestigt ist. Eine starke Feder,

Fig. 147.



welche den Stab F umgiebt, wirkt dem Druck der Mikrometerschraube entgegen; dieselbe verhindert den toten Gang der Schraube und bewirkt bei Linksdrehen der Schraube das Zurückgehen (nach rechts) des Schlittens.

Um die Länge irgend einer Linie zu messen, ist es erforderlich, daſs dieselbe sich ganz im Gesichtsfelde befinde und zwar senkrecht zu einem der Fäden. Man hat M so lange zu drehen, bis der Faden zunächst mit einem, dann mit dem anderen Endpunkte des Bildes der zu messenden Länge zusammenfällt.

Die Differenz bei den Ablesungen ergiebt die Zahl der Schraubenumdrehungen, welche der Länge des Bildes entspricht. Um nun die wahre Länge der Linie zu finden, hat man den sogenannten W e r t e i n e r S c h r a u b e n u m d r e h u n g zu bestimmen, der unter anderem auch von der Entfernung des Gegenstandes vom Fernrohr abhängt. Man hat also die wahre Länge eines Gegenstandes zu finden, für welchen die Länge seines Bildes im Fernrohr gleich der

Verschiebung des Fadens *cd* bei einer Schraubenumdrehung ist. Um diese Gröfse zu finden, hat man ein möglichst genaues Mafslineal an die Stelle des zu messenden Gegenstandes oder in parallele Lage zu ihm zu bringen, so dafs die Bilder von wenigstens zwei Teilstrichen im Gesichtsfelde erscheinen und zwar in paralleler Lage zum Faden, den man zuerst mit dem einen und dann mit dem anderen Teilstrich zur Deckung bringt. Kennt man den wahren Abstand der Teilstriche des Mafslineals und bestimmt die entsprechende Zahl der Schraubenumdrehungen, die einer Verschiebung von *cd* um einen Teilstrich entsprechen, so ist es leicht, diejenige Länge am Mafslineal zu finden, welche einer Umdrehung der Mikrometerschraube entspricht.

Im § 1 dieses Kapitels wurde erwähnt, dafs zum Vergleichen von Mafsstäben sogenannte Komparatore dienen. Nach dem Vorhergehenden macht es keine Schwierigkeit, die Konstruktion derselben zu verstehen. Der Brunnersche Komparator, welcher im internationalen Bureau der Mafse und Gewichte gebraucht wird, hat folgende Einrichtung. Zwei mit Okularmikrometern versehene Mikroskope sind vertikal in einem Abstande von beispielsweise einem Meter aufgestellt. Jedes derselben ist auf einem gesonderten, möglichst festen Pfeiler montiert. Unter die Mikroskope wird ein länglicher Kasten gebracht, in welchem die zu vergleichenden Mafsstäbe nebeneinander liegen. Dieser Kasten ist senkrecht zu seiner Länge verschiebbar, so dafs er sich auf die durch die Achsen beider Mikroskope gehende Vertikalebene zubewegt. Nun werden, indem man den Kasten entsprechend verschiebt, die einzelnen Etalons unter die Mikroskope gebracht und jedesmal die Endstriche derselben zur Koincidenz mit den Mefsfäden der Mikroskope gebracht. Die algebraische Differenz der mikrometrischen Verschiebungen, die nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet werden, bestimmt die gesuchte Längendifferenz je zweier Mafsstäbe.

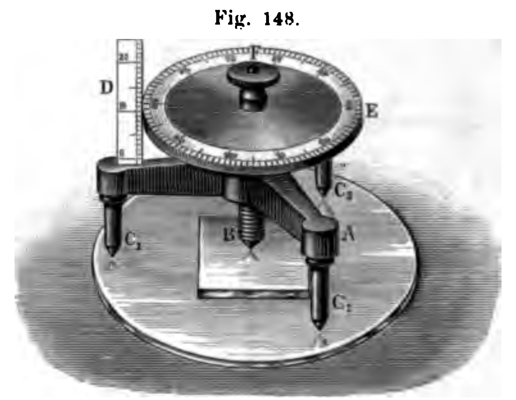
Die kaiserliche Normal-Aichungskommission zu Berlin gebraucht einen Repsoldschen Komparator; derselbe ist von Pensky[1]) beschrieben worden. Einfache Formen, wie sie zu Laboratoriumszwecken, zum Ausmessen von photographischen Spektren u. s. w. dienen, werden von Zeifs in Jena hergestellt.

§ 5. **Sphärometer.** Dieser Apparat dient dazu, die Dicke von Platten zu messen, Unebenheiten auf einer ebenen Fläche zu untersuchen, sowie endlich den Krümmungsradius sphärischer Flächen, z. B. optischer Linsen, zu bestimmen. Das einfache Sphärometer (Fig. 148) besteht aus einem dreifüfsigen Tischchen, in dessen Mitte sich ein Schraubengewinde zur Aufnahme der Mikrometerschraube *F* befindet, deren Kopf eine kreisrunde Scheibe *E* bildet. Letztere trägt am Rande

[1]) Zeitschr. f. Instrumentenkunde **15**, 313, 353, 1895.

eine Teilung und zwar gewöhnlich 100 Teilstriche. Bei jeder vollen Umdrehung der Schraube hebt oder senkt sich E um einen Teilstrich der Skala D. Schraubt man den Kopf abwärts, so kommt schliefslich das spitze Schraubenende in Berührung mit der Fläche A, auf welche der Apparat gestellt ist. Diesen Moment mufs man nach dem Gefühl bestimmen. Liegt die Schraubenspitze noch oberhalb der Fläche, auf welcher die drei Füfse stehen, so läfst sich der Apparat leicht zum Gleiten bringen, ist dagegen die Schraube zu weit hinabgeschraubt, so läfst sich der Apparat entweder um die Schraube drehen, oder er schaukelt hin und her, da jetzt einer der Füfse die Fläche nicht berührt. Stellt man das Sphärometer auf das Resonanzkästchen einer Stimmgabel, so lassen sich die geringen Schwankungen des Apparates um die Schraube leicht wahrnehmen. Um den Augenblick, wo die Schraube die Unterlage berührt, festzustellen, bedarf es einiger Übung. Hat man nun die Dicke irgend eines Gegenstandes B zu bestimmen, so bringt man die Schraube zunächst in Berührung mit der Fläche A, auf welche der Apparat gesetzt ist und liest die Skala D und die Teilung des Schraubenkopfes E an dem Punkte ab, welcher der vertikalen Kante der Skala gegenübersteht. Hierauf schraubt man zurück, bringt den zu messenden Gegenstand B unter die Schraube und letztere in Berührung mit ihm. Dann macht man wiederum eine Ablesung und findet aus der Differenz beider Ablesungen die gesuchte Dicke. Je genauer man den Moment der Berührung zwischen dem Schraubenende und der Unterfläche bestimmt, um so genauer fällt die Messung aus.

Fig. 148.



Das Sphärometer kann dazu dienen, die Radien der konvexen oder konkaven Oberflächen von gröfseren optischen Linsen zu messen. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Höhe h des Meniskus, dessen Grundflächenradius r gleich dem Radius des durch die Spitzen der drei Sphärometerfüfse gehenden Kreises ist. Es ist dann $R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$. Bequemer für den angegebenen Zweck sind Sphärometer, deren Basis ein dünnwandiger runder Cylinder mit bekanntem Radius r ist[1]). Abbe

[1]) Vergl. Czapski, Zeitschr. f. Instr. 7, 297, 1887.

telst der Schraube *o* kann das Gestell um diese Achse gedreht werden. An beiden oberen Enden trägt das Gestell in ringförmigen Lagern das Fernrohr *B*. *L* ist eine Libelle, von der wir annehmen, daſs die Richtung ihrer Achse durch Heben oder Senken des einen Endes, unabhängig von dem Fernrohr und dem Gestell *G' G G*, geändert werden kann.

Bevor man eine Messung mit dem Kathetometer ausführt, muſs man dasselbe zunächst richtig aufstellen. Wir wollen hier bloſs diejenigen Bedingungen aufzählen, denen die Aufstellung zu genügen hat.

1. Die optische Achse des Fernrohres, welche durch den Schnittpunkt der Kreuzfäden gehen muſs, soll mit der geometrischen Achse desselben zusammenfallen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man das Fernrohr um seine Achse drehen kann, ohne daſs das Bild irgend eines Punktes am beobachteten Objekte den Schnittpunkt der Fäden verläſst.

2. Die Achse der Libelle muſs der Achse des Fernrohres parallel sein, d. h. das Bläschen muſs in der Mitte einspielen, wenn die Achse des Fernrohres horizontal ist. Um dies zu erreichen, hat man an der Schraube *O* und an der Libellenschraube zu drehen, bis das Bläschen beim Umlegen des Fernrohres (so daſs Objektiv und Okular ihre Lage vertauschen) zusammen mit der Libelle in der Mitte bleibt.

3. Die Achse des Kathetometers muſs genau vertikal sein, also senkrecht zur Achse des Fernrohres und der Libelle. Man erreicht dies, indem man die Schraube *O* und die Fuſsschrauben *m* so lange dreht, bis das Libellenbläschen bei vier um je 90° von einander verschiedenen Stellungen des messingenen Cylinders in der Mittellage verbleibt.

Alle ausführlicheren Hinweise auf die vorzunehmenden Manipulationen sollen hier, als nicht in den Rahmen dieses Buches gehörig, übergangen werden.

Um den Vertikalabstand zweier Punkte zu bestimmen, d. h. zu bestimmen, um wieviel der eine von zwei Punkten, welche übrigens nicht auf einer vertikalen Linie zu liegen brauchen, höher liegt als der andere, stellt man das Fernrohr in solcher Höhe fest, daſs zunächst das Bild eines der Punkte mit dem Durchschnittspunkt der Fäden koincidiert. Hierauf macht man die Ablesung an der Skala unter Benutzung des bei *F* angebrachten Nonius. Dasselbe wiederholt man dann, nachdem man das Bild des zweiten Punktes zur Koincidenz mit dem Schnittpunkt der Fäden gebracht hat. Zu letzterem Zwecke hat man das Fernrohr zu heben oder zu senken und auſserdem, falls sich die beiden Punkte nicht auf derselben vertikalen Geraden befinden, den Cylinder um seine vertikale Achse zu drehen. Die Differenz der beiden so erhaltenen Ablesungen ergiebt dann den gesuchten Vertikalabstand.

In Fig. 153 ist ein in seiner Konstruktion von dem oben beschriebenen bedeutend abweichendes Kathetometer abgebildet. Zur gröſseren Deutlichkeit ist der obere Teil losgetrennt gezeichnet. *A* ist

die innere Säule, B der Messingcylinder. In eine flache Längsnute dieses Cylinders ist der gläserne Mafsstab M eingelassen. Der Schlitten C ist an der Seite aufgeschnitten, um den Mafsstab M hindurchzulassen; an C ist ein viereckiger Rahmen befestigt, welcher das Fernrohr trägt. Rahmen und Fernrohr sind gleichfalls mit Einschnitten versehen, durch welche der Mafsstab M hindurchgeht. Diejenige Seite des Mafsstabes, welche die Teilung trägt, befindet sich im Gesichtsfelde des Fernrohrokulares, so dafs der Beobachter gleichzeitig den Faden, auf welchen der zu beobachtende Punkt eingestellt wird, und die Skala sieht. Die Vorteile dieser Konstruktion liegen auf der Hand.

Fig. 153.



§ 7. Flächenmessung. Planimeter. Bisweilen hat man den Flächenraum einer gezeichneten, von mehr oder weniger unregelmäfsigen Kurven begrenzten Figur zu messen. Angenähert kann man denselben finden, wenn man die Figur ausschneidet, abwägt und ihr Gewicht mit dem Gewichte eines aus demselben Papier geschnittenen Quadrates oder Kreises vergleicht.

Genauer erhält man die gesuchte Gröfse mit Hülfe sogenannter Planimeter. Von den zahlreichen hierher gehörigen Apparaten sollen blofs die Planimeter von Amsler und Prytz betrachtet werden, ohne jedoch dabei auf die Theorie derselben einzugehen.

Das **Amslersche Planimeter**[1]) ist in Figur 154 schematisch dargestellt. Zwei Stäbchen GC und PCr sind in C durch ein Scharnier verbunden; in G befindet sich eine Spitze, die in einem Punkte der Ebene befestigt wird, in welcher sich die Zeichnung befindet. In r befindet sich eine kleine Rolle, die sich um eine zu CP parallele Achse drehen und auf der Zeichnungsebene dahinrollen kann. In P befindet sich ebenfalls eine Spitze, welche man mit der einen Hand um die Kontur der zu messenden Fläche herumführt, während man mit der anderen den Stift G gegen das Papier drückt. Die Zählvorrichtung und die Teilungen der Rolle r machen es möglich, die Zahl n der Rollenumdrehungen zu bestimmen. Während P um die Kontur herumgeführt wird, befindet sich die Rolle bald in rollender, bald in gleitender Bewegung auf der Zeichnungsebene. Der gesuchte Flächeninhalt ist schliefslich gleich $S = kn$, wo k einen Faktor bedeutet, der für jeden Apparat ein- für allemal bestimmt werden mufs und von der gewählten Flächeneinheit abhängt.

Fig. 154.

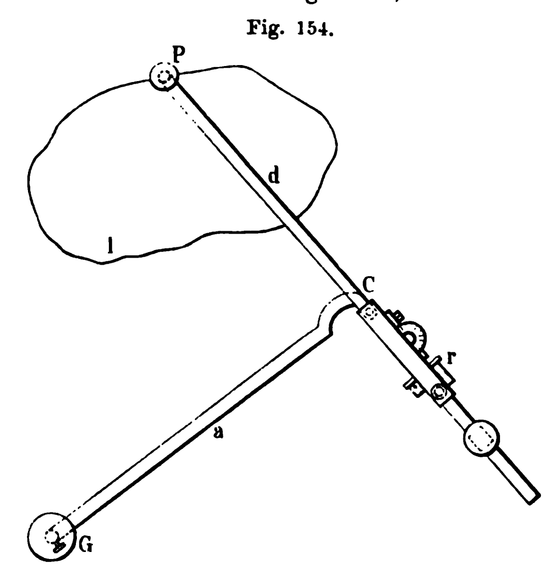
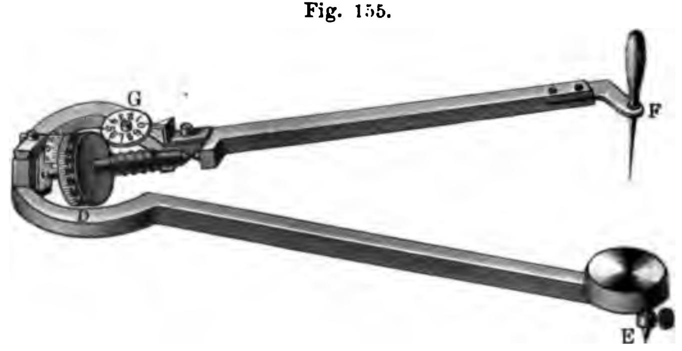


Fig. 155.



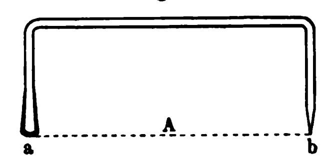
[1]) Amsler-Laffon, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, Schaffhausen 1856; siehe auch Zeitschr. f. Instr. 4, 11, 1884.

In Fig. 155 ist ein Amslersches Planimeter von etwas abweichender Konstruktion dargestellt; hier ist E der feste, F der bewegliche Stift, D die Rolle nebst dem Nonius, G die Zählvorrichtung.

Das Planimeter von Prytz wurde 1893 erfunden; es hat eine erstaunlich einfache Konstruktion. Seine Beschreibung soll hier wörtlich nach A. L. Gerschun[1]) gegeben werden:

„Es besteht (Fig. 156) aus einem an beiden Enden rechtwinklig umgebogenen Stäbchen aus Stahl; das eine seiner Enden ist mit einer etwas abgerundeten, stumpfen Spitze versehen, während das andere in eine flache, ebenfalls abgerundete Schneide ausläuft. Die Entfernung der Spitze von dem tiefsten Punkte der Schneide mufs ein- für allemal bestimmt werden und bildet „die Konstante“ des Apparates; sie sei gleich A cm.

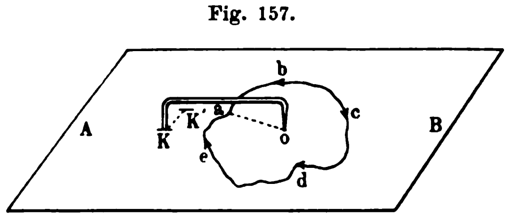
Fig. 156.



Um den Flächeninhalt einer von einer geschlossenen Kurve *abcde* (Fig. 157) umgrenzten Figur zu bestimmen, setzt man die Spitze des Planimeters angenähert auf deren Schwerpunkt O und verbindet O mit irgend einem Kurvenpunkt a durch eine Gerade.

Hierauf drückt man die Schneide an irgend einer Stelle (etwa in K) gegen die Papierfläche und markiert diese Stelle hierdurch. Darauf führt man die Spitze mit einer Hand von O nach a und darauf längs der Kontur in der Richtung *abcdea* und schliefslich von a zurück nach dem Ausgangspunkte O längs der Geraden aO. Unterdes beschreibt die Schneide irgend eine im allgemeinen recht komplizierte Kurve und gelangt dabei in die Endlage K', welche man wiederum durch leichtes Andrücken auf dem Papier markiert. Die Entfernung KK', multipliziert mit der Konstanten des Apparates, giebt den von der Kurve *abcde* umgrenzten Flächeninhalt. Ist uns, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, der Schwerpunkt der Fläche unbekannt, so setzt man die Spitze zunächst auf einen Punkt, der nach unserer Meinung dem Schwerpunkte nahe liegt und führt die Messung in der beschriebenen Weise aus. Darauf legt man das Planimeter um 180° um, fährt nach e, umfährt die Kurve in entgegengesetzter Richtung, kehrt nach O zurück und findet somit eine zweite Gröfse für den Flächeninhalt. Das arithmetische Mittel beider Bestimmungen giebt

Fig. 157.



[1]) Journal „Elektritschestwo“ Nr. 17, 1898.

uns die wahre Gröfse des Flächeninhalts. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann man derartige Messungen wiederholt vornehmen und aus ihnen das arithmetische Mittel wählen; noch einfacher ist es zunächst von O nach a, dann etwa fünfmal um die Kontur herum und wieder nach O zurück zu gehen; die Entfernung KK'' der beiden Endlagen der Schneide, multipliziert mit den Konstanten des Apparates, giebt dann den fünffachen Flächeninhalt von $abcde$. Ist die zu messende Fläche grofs, so zerlegt man sie durch Gerade in mehrere Teile und mifst diese einzeln aus; Prytz selbst schlägt vor, letzteres jedesmal vorzunehmen, wenn eine Dimension der Fläche gröfser als die Hälfte der Konstanten ist."

Die recht verwickelte Theorie des Prytzschen Planimeters haben F. W. Hill[1]) und M. Mafiotti[2]) untersucht.

Zum Schlusse sei hier noch auf das interessante Werk von Abdank-Abakanowicz „Les Integraphes", Paris 1886, hingewiesen, in welchem man eine ausführliche Beschreibung von Apparaten findet, welche mit Hülfe einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Integralkurve, deren Gleichung $\eta = \int f(x)\,dx + l$ ist, zu zeichnen erlauben. Hierbei ist die Gleichung $y = f(x)$ selbst unbekannt, da die gegebene Kurve von beliebiger Form sein kann.

Viertes Kapitel.

Messung von Winkeln.

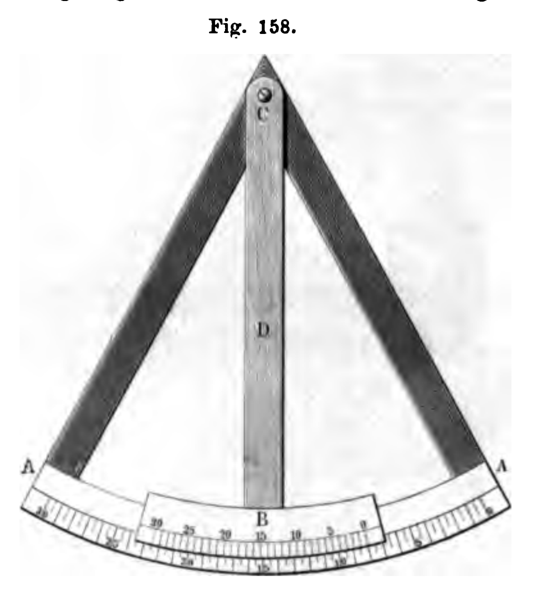
§ 1. Vernier (Kreisnonius). Zur Winkelmessung dienen im allgemeinen Apparate, die mit geteilten Kreisen versehen sind. Sie sind so konstruiert, dafs der gesuchte Winkel durch einen von zwei Radien dieses Kreises eingeschlossenen Winkel gemessen und durch die Differenz zweier an der Kreisteilung vorgenommenen Ablesungen gefunden wird. Zur Ablesung dient ein Index, der sich neben den Teilstrichen der Skala auf einer besonderen Scheibe (Alhidade) befindet. Es können folgende zwei Fälle vorkommen: 1. der geteilte Kreis (Limbus) steht fest und die den Index tragende Scheibe dreht sich um den Mittelpunkt des ersteren; ihre Verschiebung längs der Peripherie des Kreises bestimmt den zu messenden Winkel; 2. die Scheibe mit dem Index steht fest und der geteilte Kreis ist drehbar. Bisweilen tritt an Stelle jener Scheibe ein Ring, der den geteilten Kreis umgiebt oder aber, wenn die Teilung sich auf der ebenen Oberfläche des Kreises befindet, innerhalb desselben liegt. Im letzteren Falle sind anstatt eines Index deren zwei im Abstande von 180° oder gar vier im Ab-

[1]) Phil. Mag. 38, 265, 1894.
[2]) Rivista di Topogr. 8, 97; vergl. Zeitschr. f. Instr. 16, 341, 1896.

stande von 90° angebracht. Auf diese Weise werden die Beobachtungsfehler, welche durch falsche Zentrierung der Kreise entstehen könnten, vermindert.

Um möglichst genaue Messungen vornehmen zu können und Bruchteile der Skalenteile abzulesen, bedient man sich gewisser Hülfsmafsstäbe, die Kreisnonien oder Verniers heifsen. Zum Unterschiede vom gewöhnlichen Nonius sind hier zunächst die Teilstriche nicht auf einem geradlinigen Lineal aufgetragen, sondern auf einem Kreisbogen und ferner ist die Zahl der Teilstriche im allgemeinen nicht gleich 10.

Fig. 158.



Die Kreisteilungen sind sehr verschiedenartig, indem z. B. die ganzen Grade in 2, 3, 4, 6 oder 12 gleiche Teile geteilt werden. Daher können auch die Ablesungswerte eines Teilstriches am Vernier, d. h. die Differenz zwischen dem zu einem Teilstriche der Hauptskala und einem Teilstriche des Verniers gehörigen Winkel sehr verschieden sein. Um sich im gegebenen Falle zurechtzufinden, hat man zunächst den Wert eines Skalenteiles zu finden (der z. B. gleich p^0 sein möge) und darauf nachzusehen, wie viele Skalenteile ($n - 1$) auf n Teile des Verniers kommen. Der Ablesungswert des Verniers ist dann gleich $\alpha = \left(\frac{p}{n}\right)^0$. Zur Erläuterung des Gesagten mögen folgende Beispiele dienen:

1. Die Skala ist in halbe Grade (30′) geteilt und 30 Teile des Verniers sind gleich 29 Teilen der Skala. Bei der Skalenablesung, d. h. während man die Stelle bestimmt, an welcher sich der Nullstrich des Verniers befindet, erhält man unmittelbar halbe Grade. Jeder Teilstrich des Verniers vom nullten bis zu dem, welcher mit einem Skalenstrich koincidiert, entspricht für die Ablesung der Gröfse $\alpha = 1'$. Ein solcher Vernier ist in Fig. 158 dargestellt.

2. Die Grade sind in Drittel geteilt (also nach 20′) und 20 Teile des Verniers sind gleich 19 Skalenteilen; auch hier ist $\alpha = 1'$.

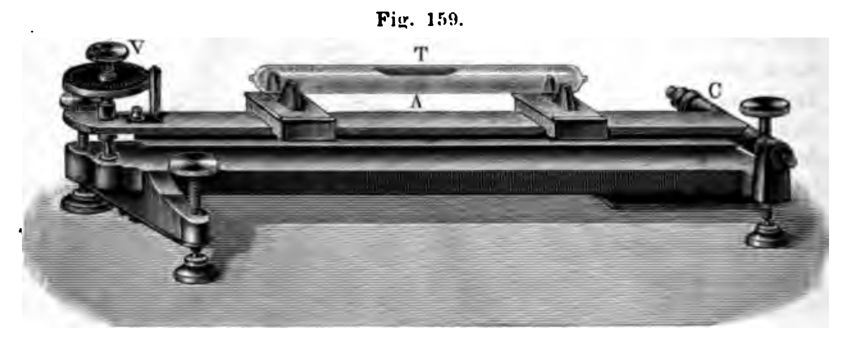
3. Die Grade sind in Viertel geteilt (15′) und 45 Vernierteile

sind gleich 44 Skalenteilen; $\alpha = 20''$. In diesem Falle ist jeder dritte Teilstrich des Verniers etwas länger und entspricht einer Minute.

4. Die Grade sind in Zwölftel geteilt, also von 5 zu 5 Minuten; 60 Vernierteile kommen auf 59 Skalenteile: $\alpha = 5''$. Jeder vierte Vernierteilstrich ist von gröſserer Länge.

§ 2. Libelle. Eine richtige Libelle, deren Oberfläche im vertikalen Längsdurchschnitt einen Kreisbogen von groſsem Radius ergiebt, kann zur Winkelmessung dienen, falls der Winkelwert ihrer Skalenteile bekannt ist; es ist das derjenige Winkel, um welchen man die Libelle gegen den Horizont zu neigen hat, damit das Bläschen sich um einen Skalenteil verschiebt. Zur Bestimmung dieser Gröſse

Fig. 159.



dient der in Fig. 159 abgebildete Apparat. Er besteht aus einer auf drei Fuſsschrauben montierten Tförmigen Guſseisenplatte und dem Lineal A, auf welches die Libelle T gesetzt wird und welches sich einerseits um die horizontale Achse C drehen kann, während durch das andere eine Mikrometerschraube V führt. Mit Hülfe dieser Schraube wird A und die darauf gesetzte Libelle gegen den Horizont geneigt; die ganzen Schraubendrehungen werden an der nebenan befindlichen Skala, die Teile derselben an der Teilung abgelesen, mit welcher der Schraubenkopf versehen ist. Kennt man die Höhe a des Schraubenganges und die Entfernung l vom Stützpunkte der Schraube bis zur Achse C, so erhält man den Winkel φ, um welchen sich die Libellenachse neigt, wenn man die Schraube n Umdrehungen machen läſst, aus der Formel $\sin\varphi = \frac{na}{l}$, oder in Sekunden ausgedrückt

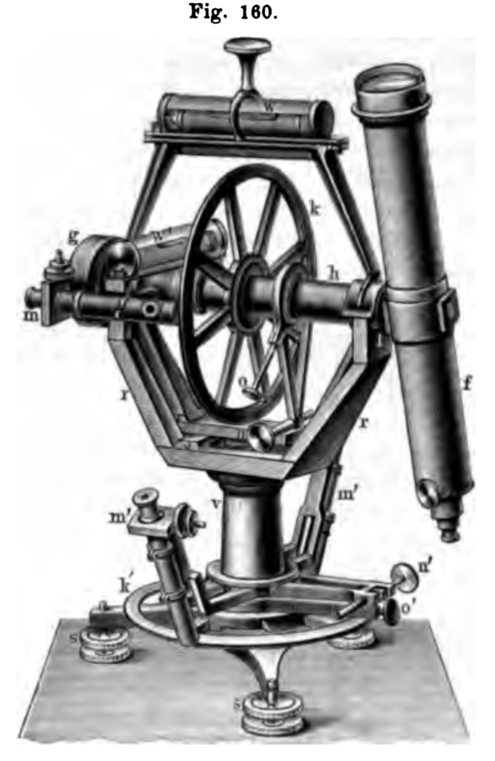
$$\varphi'' = \frac{na}{l \sin 1''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Auf diese Weise kann man den Winkelwert eines Skalenteiles bestimmen und die Libelle selbst prüfen, nämlich untersuchen, ob alle links und rechts von der Mitte gelegenen Teilstriche gleichen Neigungs-

winkeln entsprechen. Ist eine derartige Prüfung vorgenommen worden, so kann die Libelle zum Winkelmessen dienen, denn man kann nun aus der Verschiebung des Bläschens auf die Neigung der Libelle und mithin auf die Neigung derjenigen Ebene einen Schlufs ziehen, auf welche die Libelle gesetzt ist.

Ist einmal der Wert eines Skalenteils bekannt, so kann man die Libelle auch zur Messung kleiner linearer Gröfsen benutzen, z. B. zur Messung von Krümmungen und Unebenheiten einer ebenen Fläche. Zeigt z. B. die Verschiebung des Bläschens eine Neigung von φ'' an und ist die Entfernung zweier Punkte an der Basis der Libelle gleich l, so giebt uns die Formel $x = l\varphi \sin 1''$ an, um wie viel einer jener Punkte höher als der andere liegt.

Fig. 160.



Bruns[1]), Galle[2]) und andere haben genauere Apparate angegeben.

§ 3. Theodolit. Der Theodolit (vergl. Fig. 160) dient zum Messen von Winkeln, die in einer horizontalen oder einer vertikalen Ebene gelegen sind, also zur Messung der Differenz zweier Azimute oder zweier Höhen. Er besteht aus folgenden Teilen. Ein Fernrohr f dreht sich um eine horizontale Achse h, welche durch den Mittelpunkt des Vertikalkreises k (Höhenkreis) geht. Dieses ganze System dreht sich um die vertikale Achse des Apparates, die ihrerseits um den Mittelpunkt des Horizontalkreises k' (Azimutalkreis) geht. Am Kreise k liest man die Höhendifferenzen, am Kreise k' die Differenzen der Azimute ab und bedient sich hierzu der Mikroskope m und m'. Das Gegengewicht g verlegt den Schwerpunkt des Apparates in seine Achse,

[1]) Zeitschr. f. Instr. 6, 198, 1886.
[2]) Ebend. 18, 72, 1898.

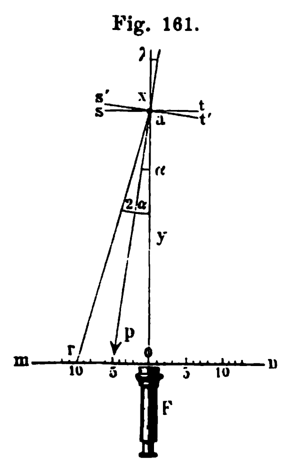
die mit Hülfe der drei Fuſsschrauben s und der Libellen w und w' vertikal gestellt wird. Einige Theodolite haben im unteren Teile noch ein besonderes Kontrollfernrohr, um sich davon zu überzeugen, ob der Apparat nicht etwa während der Messung seine Lage geändert hat.

Zu den Winkelmeſsapparaten gehört auch der Sextant, dessen Beschreibung indes an dieser Stelle unterbleiben soll.

§ 4. Methode der Spiegelablenkung. (Winkelmessung mit Fernrohr, Spiegel und Skala.) Diese Methode dient zur Messung kleiner Winkel, um welche sich (bei vertikaler, selten horizontaler Achse) die beweglichen Teile bei einigen Apparaten drehen; sie ist von Poggendorff 1826 in Vorschlag gebracht worden und dient zur Messung der Ablenkungen von Magneten, die an dünnen Fäden aufgehängt sind, von metallenen Nadeln bei einigen Elektrometern u. s. w. Man kann die Beobachtung subjektiv oder objektiv machen.

Bei uns (auch wohl in Deutschland) ist die subjektive Methode die üblichere, wenn auch die objektive vielfach angewandt wird, und wird sie die Methode mit Fernrohr und Skala genannt. Sie wird aus Fig. 161 verständlich, wo die Anordnung des Apparates in der Aufsicht gegeben ist. Am Körper, dessen Drehung um eine durch a gehende vertikale Achse gemessen werden soll, ist ein kleines Spiegelchen st befestigt; F ist ein Fernrohr, mn eine horizontale Skala (mit vertikal stehenden Teilstrichen), die entweder höher oder niedriger als das Fernrohr angebracht ist und zwar derart, daſs die Normale zur Oberfläche des Spiegels mitten zwischen Fernrohr und Skala hindurchführt. Nehmen wir an, daſs der Beobachter im Fernrohr zuerst den Teilstrich o sieht. Hat sich der Körper um den Winkel α gedreht und hat der Spiegel jetzt die Stellung $s't'$, so gelangt jetzt der von r reflektierte Strahl rx ins Fernrohr. Derselbe bildet mit dem Einfallslote p den Winkel $rxp = pxo = \alpha$. Für den Beobachter hat es den Anschein, als habe sich die Skala zur Seite bewegt; er erblickt jetzt in der Mitte des Gesichtsfeldes anstatt des Teilstriches o den Teilstrich r. Die Länge $s = or$ läſst sich direkt an der Skala ablesen. Kennt man dann noch die Entfernung y von der Skala bis zum Spiegel, die meist etwa zwischen 2 und 4 m variiert, so erhält man den gesuchten Winkel α der Drehung nach der Formel

Fig. 161.

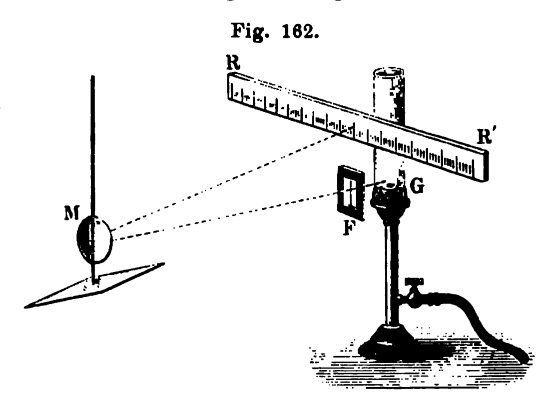


$$tg\, 2\alpha = \frac{s}{y} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

Nach dieser Methode kann man sehr kleine Drehungswinkel beobachten und messen. Ist $y = 4$ m, so läfst sich eine Drehung um nur 2″ noch wahrnehmen; derselben entspricht $s = 0{,}1$ mm, welche Verschiebung, falls die Vergröfserung des Fernrohres hinreichend ist, noch sehr gut bemerkt werden kann.

Die objektive Methode der Beobachtung mit Spiegel und Skala ist die folgende. Ein wenig oberhalb oder unterhalb der Skala RR' (Fig. 162) wird ein schmaler vertikaler Spalt F angebracht und hinter demselben eine Lichtquelle G, etwa ein Gasbrenner oder eine Lampe. Der Spiegel M entwirft ein scharfes Bild des Spaltes auf der Skala; zu diesem Zwecke erhält der Spiegel M eine etwas konkave Oberfläche oder man bringt auf der Strecke FM eine bikonvexe Linse in solcher Stellung, dafs das Bild des Spaltes nach der Reflexion gerade auf die Skala RR' fällt. Dreht sich nun der Spiegel um einen Winkel μ, so sieht man, wie sich das Bild des Spaltes längs der Skala verschiebt. Häufig spannt man in der Mitte des Spaltes einen Faden parallel zum Spaltrahmen aus. Es wird dann die Verschiebung gemessen, welche das Bild dieses Fadens erfährt.

Fig. 162.



Formel (2) bleibt auch hier in Geltung und bedeutet s die Zahl der Skalenteile, um welche sich das Bild des Spaltes verschoben hat, y die Entfernung von Spiegel und Skala. Für sehr kleine Winkel α kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen, so dafs

$$\alpha = \frac{s}{2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wird, d. h. die Zahl s der Skalenteile kann als Mafs des gesuchten Winkels α gelten. Formel (3) wäre auch für gröfsere Winkel α streng richtig, wenn die Skala nicht auf einem ebenen Lineal, sondern auf einem Kreisbogen angebracht wäre, dessen Zentrum an der Spiegeloberfläche liegt.

Der strenge Ausdruck für α lautet

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctan} \frac{s}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{y^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{y^5} - \cdots\right)$$

Ist $\alpha < 4^0$, so kann man sich mit zwei Gliedern der Reihe begnügen und erhält

$$\alpha = \frac{s}{2y}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{s^2}{y^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Um α in Graden, Minuten oder Sekunden auszudrücken, muſs man die rechte Seite mit $\frac{180^0}{\pi}$ multiplizieren und erhält:

$$\alpha = K\left(\frac{s}{y} - \frac{1}{3}\frac{s^3}{y^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wobei $K = \frac{180^0}{2\pi} = 28{,}648^0 = 1718{,}88' = 103\,132{,}8''$ ist.

Bei genauen Messungen hat man Korrektionen anzubringen, da die Skala nicht genau senkrecht zur Verbindungsgeraden des Anfangspunktes der Zählung mit der Spiegelmitte ist. Ferner ist die seitliche Ablenkung der Strahlen in den Glasplatten zu berücksichtigen, welche man vor dem Spiegel anbringt, falls der Apparat zum Schutze gegen Luftströmungen etwa von einem Gehäuse aus Metall umgeben ist [1].

W. W. Lermantow [2] hat die Genauigkeit der eben beschriebenen objektiven Winkelbestimmungsmethode untersucht.

Wadsworth [3], Julius [4] u. a. haben die Poggendorffsche Methode abgeändert und vervollkommnet.

§ 5. Messung von Flächenwinkeln. Goniometer. Zur Messung der Flächenwinkel an Glas, Quarz, Steinsalzprismen u. s. w., an Krystallen und überhaupt an Ebenen, welche das Licht regelmäſsig reflektieren, dienen verschiedene Apparate, die man Goniometer nennt. Je nach der Messungsmethode, welche der Konstruktion des Apparates zu Grunde liegt, unterscheidet man Kontaktgoniometer, Hebelgoniometer, Mikrogoniometer und Reflexionsgoniometer. Wir werden nur die letzteren betrachten; eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Arten von Goniometern findet man in Groth, Physikalische Krystallographie.

Wir betrachten zunächst zwei Methoden der Messung von Flächenwinkeln, welche auf dem Gesetze der Spiegelung von Strahlen an ebenen Flächen beruhen.

Die erste Methode wird durch Fig. 163 erläutert. Es sei MON der Neigungswinkel des Flächenwinkels, dessen Kante in O senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht. In einer zu dieser Kante senkrechten

---

[1] Vergl. Wood, Wied. Ann. 56, 171 — eine interessante Methode zur Beobachtung von Torsionsschwingungen.

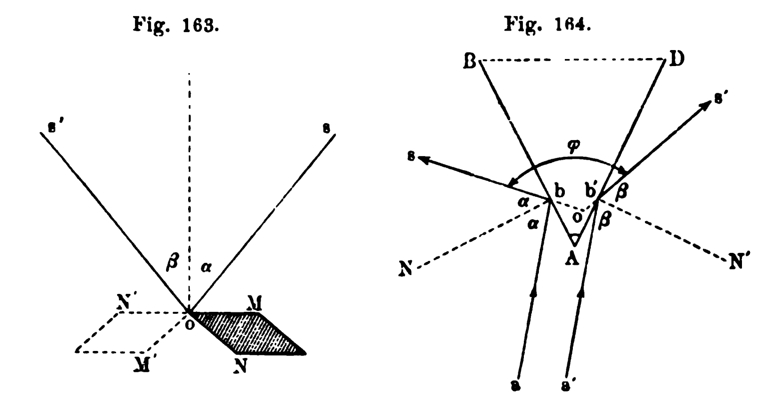
[2] Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 22, 261, 1890.

[3] Phil. Mag. 44, 83, 1897.

[4] Zeitschr. f. Instr. 18, 205, 1898.

Ebene befindet sich ein Fernrohr, das von s' nach O gerichtet ist und ferner die Lichtquelle. Letztere besteht gewöhnlich aus einem schmalen, zur Kante O parallelen hellen Spalt. Fernrohr und Spalt werden derart eingestellt, daſs der Lichtstrahl $s\,O$, der vom Spalt kommt, nachdem er von $O\,M$ in der Nähe der Kante O reflektiert worden ist, in der Richtung der Fernrohrachse $O\,s'$ weitergeht. Das Bild des Spaltes muſs mit einem Faden im Okular koincidieren, der parallel zur Kante O und zum Spalt gestellt wird. Hierauf dreht man den Körper $O\,M\,N$ so lange um O, bis das Bild des Spaltes wieder erscheint und mit dem Okularfaden koincidiert. Es wird jetzt von Strahlen gebildet, die von der anderen Seite $O\,N$ des Flächenwinkels, die jetzt die Lage $O\,N'$ hat, reflektiert sind. Da $M\,O$ und $O\,N'$ in einer Ebene liegen müssen, so ist es klar, daſs der zu messende Winkel $A = \angle\, M\,O\,N$ und der

Fig. 163. Fig. 164.



Winkel $\varphi = \angle\, N\,O\,N'$, um welchen sich der Körper gedreht hat, in folgender Relation stehen

$$A = 180^{0} - \varphi \quad \cdots \cdots \cdots \quad (6)$$

Die **zweite Methode** besteht im folgenden. Man bringt den Körper, dessen Flächenwinkel A (Fig. 164) gemessen werden soll, in eine feste Lage; in einer zur Kante des Flächenwinkels senkrechten Ebene dreht sich ein Fernrohr derart, daſs seine Achse auf den Punkt o, der nahe bei A innerhalb des Körpers liegt, gerichtet ist. Auf diese Kante richtet man ein Bündel paralleler Lichtstrahlen $a\,b$, $a'\,b'$, welche zum Teil von der einen, zum Teil von der anderen Seite des Flächenwinkels reflektiert werden. Hierauf sucht man die beiden Stellungen des Fernrohres auf, bei welchen seine Achse erst mit dem reflektierten Strahle $b\,s$ und darauf mit $b'\,s'$ zusammenfällt und miſst den Winkel $\varphi = \angle\, s\,o\,s'$, um welchen das Fernrohr hierbei gedreht wurde. Man kann nun beweisen, daſs der gesuchte Winkel gleich $A = \varphi : 2$ ist. Es seien $\alpha = \angle\, a\,b\,N = \angle\, N\,b\,s$ und $\beta = \angle\, a'\,b'\,N' = \angle\, N'\,b'\,s'$

Einfalls- und Reflexionswinkel der beiden in Betracht kommenden Strahlen.

Aus der Figur ergiebt sich

$$\angle\, abN + \angle\, a'b'N' + \angle\, NbB + \angle\, N'b'D + \angle\, A = 360^0$$

d. h.

$$\alpha + \beta + 180^0 + A = 360^0$$

oder

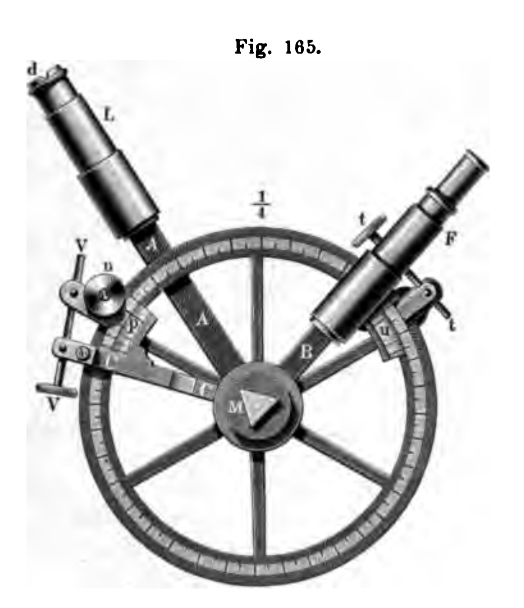
$$\alpha + \beta + A = 180^0 \quad \text{und} \quad 2\alpha + 2\beta + 2A = 360^0.$$

Andererseits ist offenbar $2\alpha + 2\beta + \varphi = 360^0$. Vergleicht man diese Ausdrücke, so folgt, daſs $\varphi = 2A$ ist, also

$$A = \frac{1}{2}\varphi \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

Ein paralleles Strahlenbündel kann man, wie später gezeigt werden soll, künstlich erhalten; man kann jedoch auch das Bild eines sehr entfernten Punktes (einer Mire) wählen, von welchem die Strahlen ab und $a'b'$ ausgehen.

Fig. 165.



Will man die erste Methode anwenden, so hat man ein Goniometer nötig, bei dem das Tischchen in der Mitte sich drehen und dieser Drehungswinkel gemessen werden kann. Fig. 165 zeigt den oberen horizontalen Teil eines Babinet'schen Goniometers. Der geteilte Kreis ist unbeweglich auf einem vertikalen Stative befestigt. Das Kollimaterfernrohr L mit dem Spalt d ist an einer Speiche AA befestigt, die sich um die Achse des Apparates drehen und in jeder beliebigen, für die Beobachtung bequemen Lage befestigt werden kann. Das Fernrohr F ist an einer zweiten Speiche B befestigt, die sich ebenfalls drehen und festgeschraubt werden kann, worauf dann die mikrometrischen Bewegungen mittels einer Mikrometerschraube t ausgeführt werden. Ein Nonius u dient dazu, die Lage des Fernrohres abzulesen. Das Tischchen, auf welchem sich der Körper M befindet, dessen Flächenwinkel gemessen werden soll, ist

ebenfalls um die Achse des Apparates drehbar. Mit ihm hängt eine dritte Speiche *C* zusammen, die mittels einer Schraube *n* festgestellt werden kann, während eine Mikrometerschraube *VV* die feinen Verschiebungen ausführt. Die dritte Speiche trägt ebenfalls einen Nonius.

Das Kollimatorfernrohr *L* hat ein gewöhnliches (achromatisches) Objektiv, an Stelle des Okulars jedoch befindet sich in der Brennebene des Objektivs eine Platte mit vertikalem Spalt *d*.

Stellt man nun hinter dem Spalt *d* eine helle Lichtquelle auf, so durchdringen die vom Spalt ausgehenden Strahlen das Objektiv und werden einander parallel. Nach Reflexion an einer der Seiten des zu messenden Flächenwinkels gelangen sie in das Fernrohr *F*, welches auf unendliche Entfernung eingestellt ist (d. h., so daſs ein sehr entfernter Gegenstand, etwa ein Stern, deutlich in ihm sichtbar wird) und geben ein Bild des Spaltes in der Fokalebene des Objektivs, in welcher sich die Meſsfäden befinden. Bei jeder Einstellung hat man einen der vertikalen Fäden mit dem Rande des Spaltbildes zur Koincidenz zu bringen.

Es ist leicht einzusehen, in welcher Weise dieses Goniometer benutzt werden kann, um einen Winkel nach einer der beiden obigen Methoden zu finden. Hierzu braucht man sich nur die schematischen Figuren 162 und 163 anzusehen.

Bei Anwendung der zweiten Methode braucht das Tischchen nicht drehbar zu sein. In Fig. 166 (a. f. S.) ist ein Winkelmeſsapparat (Spektrometer, s. Bd. II) von V. v. Lang abgebildet; Fig. 167 (a. S. 327) zeigt einen vertikalen Achsenschnitt durch den mittleren Teil. Wir begnügen uns mit einer kurzen Beschreibung der Einrichtung, deren Details aus der Zeichnung leicht zu verstehen sind. Das ringförmige Gestell *G* mit den drei Stellschrauben *v* trägt die Säule *S* mit dem Kollimatorrohr *C*, dessen Spalt sich in *Z* befindet. Im Zentrum trägt dasselbe Gestell den Zapfen *Z*, um welchen sich der Hohlkegel *H* frei dreht. Mit diesem Kegel *H* sind fest verbunden der Arm *A* mit dem Fernrohr *F*, das Gegengewicht *P*, die ringförmige Platte *n*, welche die Nonien trägt und die Schutzplatte ϱ, welche an der Stelle der Nonien Ausschnitte enthält; an diese Platte ϱ sind die zum Ablesen dienenden Mikroskope befestigt. Die innere stählerne Achse *B* trägt den geteilten Kreis *m* und das Tischen *q*; letzteres wird durch eine Schraube festgeklemmt. Die Drehung der Achse *B* wird durch das Steuerrad *s* bewirkt. Klemmt man den Metallring *g* mittels der Schraube *a* fest an den Kegel *H* und bewegt den Ausläufer des Ringes mittels der Mikrometerschraube *c*, deren Mutter am Gestelle *g* festsitzt, so kann man dem Fernrohr feinere Verschiebungen erteilen. Die Klemmschraube *b* und die Mikrometerschraube *d* dienen eben so zur feineren Drehung des Tischchens *q*.

Wir gehen zu den Reflexionsgoniometern über, wie sie zur

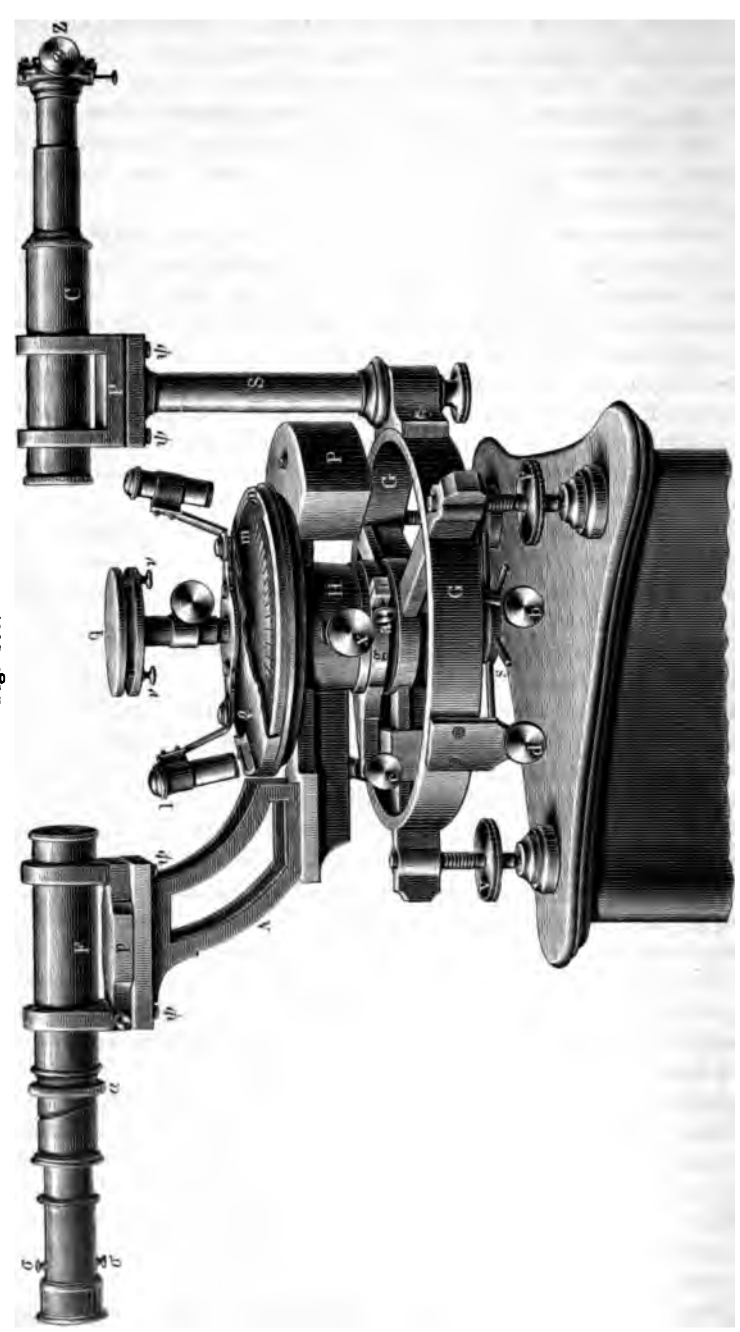
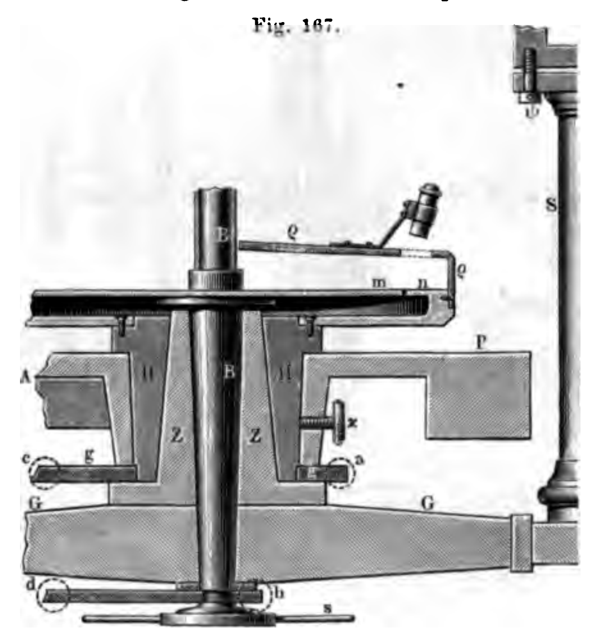


Fig. 166.

Messung der Flächenwinkel an Krystallen benutzt werden. Man unterscheidet Goniometer mit vertikalem und mit horizontalem Kreise.

Das Goniometer mit vertikalem Kreise ist 1809 von Wollaston erfunden worden. Es ist in einfacher Gestalt in der Fig. 168 (a. f. S.) abgebildet. Auf der mittleren vertikalen Achse des Instrumentes sind unbeweglich befestigt der Arm QR, welcher bei R einen Nonius besitzt, und die Kreisscheibe F. Die vertikale, mit Teilung versehene Scheibe E wird mittels des Kopfes G gedreht; sie kann an der Scheibe F durch die Druckschraube STU festgeklemmt werden. An einer durch G hindurchgehenden, mit dem Knopfe J versehenen Achse

Fig. 167.

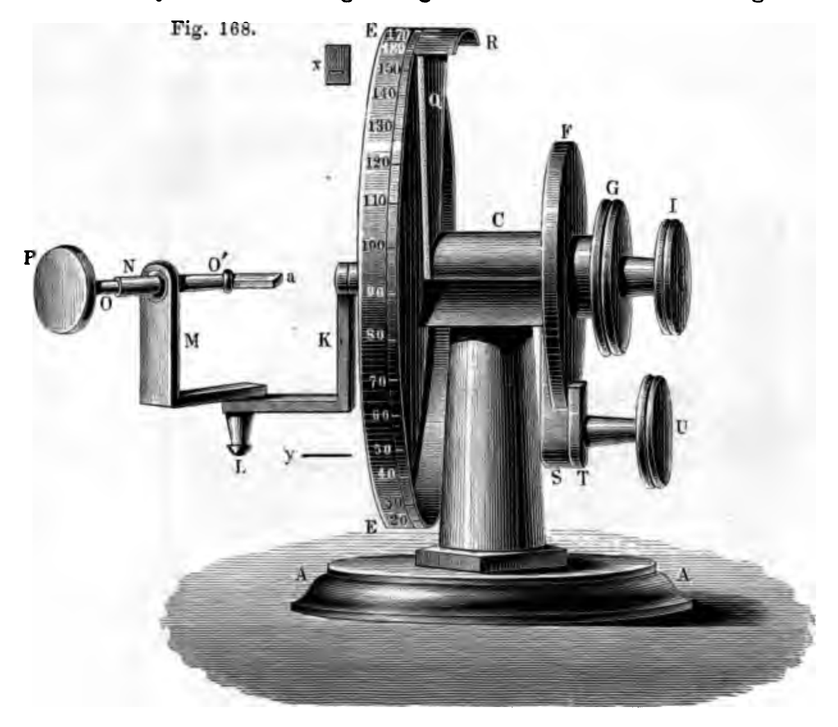


ist der Bügel KLM befestigt, welcher die in der Hülse N drehbare Achse OO' trägt. Bei O' wird der Krystall mit etwas Klebwachs oder mittels einer besonderen Achse befestigt.

Durch Drehung von J, durch Drehung und Verschiebung der Achse OO' und durch Verschiebung des Krystalles selbst bringt man es dahin, daſs die Kante des gesuchten Flächenwinkels in die Verlängerung der Achse des Apparates fällt. Unten am Apparate befindet sich ein Spiegel y aus schwarzem Glase, dessen Ebene der Achse des Apparates parallel ist. Der Beobachter steht hinter dem Apparate. Man wählt einen möglichst entfernten Gegenstand, z. B. eine kleine Lichtquelle — ein sog. Signal — das sich in einer zur Spiegelebene und Winkel-

kante senkrechten Ebene befinden mufs. Darauf dreht man die Achse des Apparates so lange, bis sich die Spiegelbilder des Signals im Spiegel und einer der Krystallflächen decken. Darauf macht man eine Ablesung am Nonius und dreht den Kreis *E* zusammen mit der inneren Achse und dem Krystalle, bis die Spiegelbilder des Signals im Spiegel und der anderen Krystallfläche sich decken. Jetzt macht man die zweite Ablesung und bestimmt den Drehungswinkel des Kreises *E* und des Krystalles. Die Ergänzung dieses Winkels zu 180° ist gleich

Fig. 168.



dem gesuchten Flächenwinkel des Krystalles (s. die erste Methode). Auf demselben Prinzipe beruht das Goniometer von Mitscherlich.

Von Goniometern mit horizontalem Kreise sei hier in Kürze dasjenige von Websky beschrieben; es ist in Fig. 169 abgebildet, während Fig. 170 einen vertikalen Durchschnitt zeigt. Die ringförmige Scheibe *O* wird von drei Fufsschrauben getragen, die zugleich den Apparat in die richtige Stellung bringen. Durch *O* hindurch führen mehrere konische Achsen, eine innerhalb der anderen befindlich. Die Achse *b* ist mit dem Kreise *d* verbunden, der zwei diametral gegenüberliegende Nonien trägt, und mit dem Fernrohre *L*, welches somit in geeignete Stellung gebracht werden kann. Mit der Klemmschraube *α*

stellt man das ganze drehbare System $bdBL$ fest. Auf der zweiten Achse e sitzt der horizontale geteilte Kreis f, den man mit Hülfe von g drehen und mit der Klemmschraube β festklemmen kann, worauf die feinere Einstellung mit Hülfe einer Mikrometerschraube erfolgt. Die dritte Hohlachse h dient dazu (mit Hülfe von i) den Zentrierapparat zu drehen, während Kreis f fest bleibt. Die Schraube l dient dazu, die Achsen e und h zu verbinden, falls sich der in n befindliche Krystall zugleich mit f drehen soll. Der Zentrierapparat ist

Fig. 169.

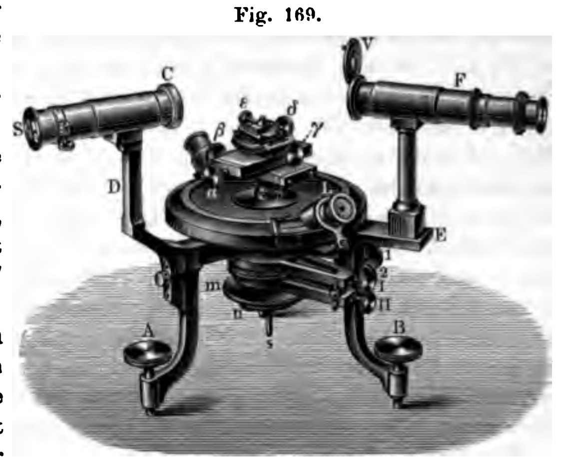
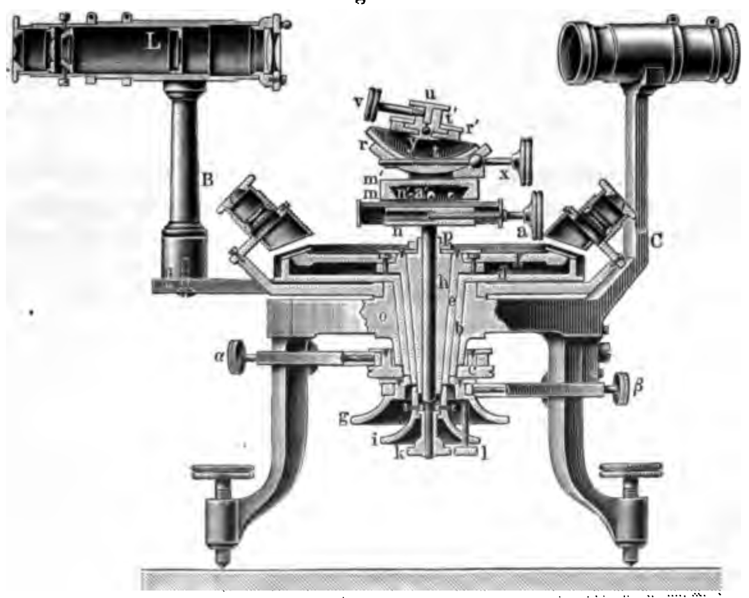


Fig. 170.



an der inneren massiven Achse befestigt, die in ihrem unteren Teile mit einem Schraubeneinschnitt versehen ist. Durch Drehung der

Schraube k läſst sich der ganze Zentrierapparat heben oder senken. Unsere beiden Figuren lassen die Einrichtung dieses Zentrierapparates erkennen. Der Krystall wird mit Wachs auf dem Tischchen u befestigt, welches von der Schraube v gehalten wird. Die beiden Gehäuse m und m' und zwei Schrauben, in Fig. 169 sichtbar (während in Fig. 170 nur eine derselben a zu sehen ist), erlauben, das Tischchen horizontal in zwei zu einander senkrechten Richtungen zu verschieben. Endlich gestatten die beiden bogenförmigen Schlitten r und r' (in Fig. 170 beide sichtbar), sowie die beiden Schrauben x und y (letztere ist senkrecht zur Ebene der Fig. 170), das Tischchen u in zwei zu einander senkrechten Richtungen um Winkel bis zu 40° zu neigen. Auf diese Weise kann man die Kante des gesuchten Krystallwinkels genau senkrecht stellen und in die Verlängerung der geometrischen Achse des Apparates bringen. Am unbeweglichen Träger C ist das Kollimatorfernrohr befestigt, dessen erhellter Spalt als Signal dient.

E. S. Fedorow hat im Jahre 1893 ein Universalgoniometer konstruiert, dessen Beschreibung sich in den Mém. de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg, t. 42, No. 1 und Ztschr. f. Krystallographie und Mineralogie Bd. 21, S. 574, Bd. 22, S. 229, 1893 und Bd. 26, S. 225, 1896, befindet.

Fünftes Kapitel.

Messung des Volumens.

§ 1. Bestimmung des Rauminhaltes von Gefäſsen. Der Rauminhalt von Gefäſsen wird dadurch gefunden, daſs man zunächst das leere Gefäſs und dann dasselbe Gefäſs, jedoch mit Flüssigkeit gefüllt, wägt, wobei die Dichte, d. h. das Gewicht der Volumeneinheit dieser Flüssigkeit für die Beobachtungstemperatur, bekannt sein muss. Bezeichnet man mit p das Gewicht der Flüssigkeit, mit δ ihre Dichte und mit v den gesuchten Rauminhalt des Gefäſses, so ist $p = v\delta$, woraus

$$v = \frac{p}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

folgt.

Als Versuchsflüssigkeit wählt man entweder Wasser, für dessen Dichte δ bei verschiedenen Temperaturen genaue Tabellen vorhanden sind, oder noch häufiger Quecksilber; die Dichte δ des letzteren bei der Temperatur t ist gleich

$$\delta = 13{,}5956\,\{1 - 10^{-9}\,t\,(181\,792 + 0{,}175\,t + 0{,}035\,116\,t^2)\} \cdots (2)$$

Die auf 4° bezogene Dichte des Wassers ist nach Mendelejeff

$$\delta_t = 1 - \frac{(t-4)^2}{1900\,(94{,}1 + t)\,(703{,}5 - t)}.$$

Drückt man p in Grammen aus, so erhält man das Volumen v in Kubikcentimetern.

Anstatt der Dichte δ ist es bequemer, ihren reciproken Wert, das specifische Volumen γ einzuführen, d. h. die Anzahl Kubikcentimeter, welche von einem Gramm Flüssigkeit eingenommen werden. Es ist dann

$$v = p\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für Quecksilber von 0° ist

$$\gamma = 0{,}0735532 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Bei genauen Volumbestimmungen sind eine Reihe von Faktoren, wie Auftrieb, Änderung des Gefäfsvolums mit der Temperatur u. s. w. zu beachten, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Verwendet man Quecksilber, so hat man zu beachten, dafs seine freie Oberfläche konvex ist; befindet sich diese Oberfläche in einem engen cylindrischen Gefäfse aus Glas, so hat sie die Gestalt eines sogenannten Meniskus. Man kann in diesem Falle annehmen, dafs das Quecksilber ein Volumen erfüllt, das von oben durch eine horizontale Ebene begrenzt ist, welche um zwei Drittel der Meniskushöhe über dem Kreise liegt, in welchem sich Glas und Quecksilber berühren.

Um das innere Volumen enger Röhren, sogenannter Kapillarröhren, zu bestimmen, bringt man dieselben in horizontale Lage und verschiebt eine kleine Quecksilbersäule in ihnen. In genau cylindrischen Röhren bleibt die Länge der Säule überall die gleiche, sonst ändert sie sich an verschiedenen Stellen der Röhre. Bringt man die Quecksilbersäule der Reihe nach in solche Lagen, dafs sie jedesmal um ihre eigene Länge weiterbewegt wird, so kann man auf diese Weise das innere Volumen in gleiche Teile zerlegen, die zudem gleich dem Volumen der benutzten Quecksilbermenge sind.

Eine genauere Untersuchung des inneren Volumens der einzelnen Teile einer mit Teilung versehenen Röhre heifst **Kalibrierung**. Die hierbei in Anwendung kommenden Operationen sollen im dritten Bande, wo von der Herstellung von Thermometern die Rede ist, beschrieben werden.

§ 2. Volumenometer von Regnault. Volumenometer heifsen Apparate, die zur Volumenbestimmung von Körpern dienen und zwar insbesondere von Körpern mit unregelmäfsiger Gestalt, kleinen Krystallen, pulverförmigen Körpern u. s. w. In Fig. 171 und 172 (a. f. S.) ist das Volumenometer von Regnault abgebildet und zwar von vorn (Fig 172) und in der Seitenansicht (Fig. 171). An einem vertikal aufgestellten Holzbrett sind zwei parallele Glasröhren b und d befestigt, in welche Quecksilber gegossen wird. Der Hahn r hat zwei zu einander senkrechte Durchbohrungen von der Form ⊥; man kann daher beide Röhren untereinander verbinden (wobei die Stellung der Kanäle ⊥ ist, s. Fig. 174), oder das Quecksilber nur aus der linken Röhre (⊤) oder nur aus der rechten Röhre (⊢ Fig. 173) ablassen oder endlich

aus beiden Röhren gleichzeitig (⊣). Die rechte Röhre hat eine kugelförmige Erweiterung; oberhalb und unterhalb derselben sind zwei Striche *m* und *p* gezogen. Die rechte Röhre ist mit einer horizontalen Seitenröhre *a* (Fig. 171) verbunden, an welche sich ein kurzes vertikales Röhrchen anschliefst, das in die verjüngte Mündung *s* ausläuft und durch einen Hahn verschliefsbar ist. Unten trägt das Röhrchen eine runde Scheibe, auf welche eine zweite Scheibe geschraubt ist, die

Fig. 171. Fig. 172.

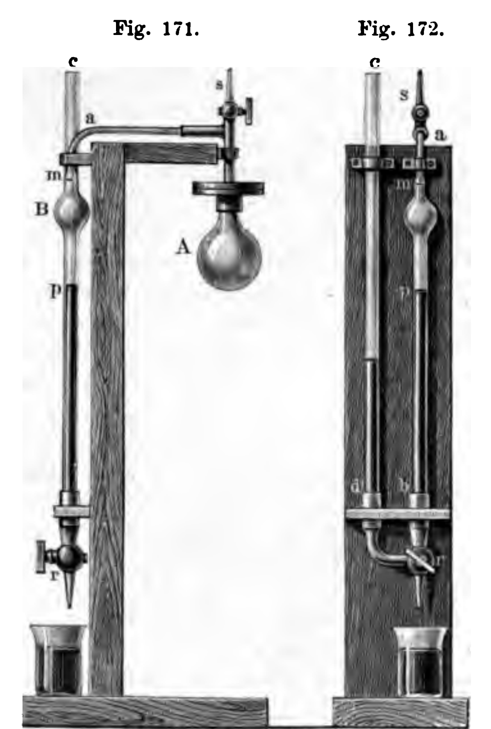
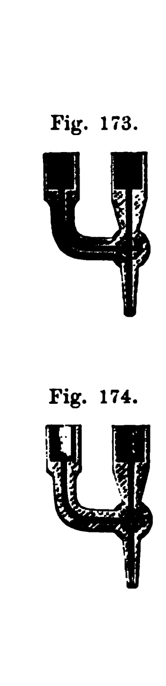


Fig. 173.

Fig. 174.



ihrerseits mit einer breiteren Röhre und dem kugelförmigen Gefäfs *A* zusammenhängt, welche den Körper von gesuchtem Volumen aufzunehmen hat.

In das offene Ende *c* der links befindlichen Röhre (Fig. 171) kann Quecksilber gegossen werden. Hinter dieser Röhre befindet sich auf dem ihr als Stütze dienenden Brette eine nach Millimetern geteilte Skala.

Vor allen Dingen mufs das Volumen *v* der Röhre und der Kugel *f* zwischen den Marken *m* und *p* bestimmt werden. Zu diesem Zwecke öffnet man den Hahn bei *s*, verbindet durch *r* beide Röhren untereinander (⊥) und giefst durch *c* so viel Quecksilber ein, bis die horizontale Tangentialebene zur Quecksilberoberfläche durch die Marke *m* hindurchführt. Hierauf läfst man so viel Quecksilber aus der rechten Röhre

ab, dafs es bis zur Marke p sinkt. Nun wägt man das abgelassene Quecksilber und bestimmt nach Formel (1) oder (3) das Volumen v. Danach hat man noch das Volumen V der Kugel A und Röhre a bis zur Marke m zu bestimmen. Dies geschieht auf zwei Arten: nach der ersten hat man das Quecksilberniveau zu senken, nach der zweiten zu heben.

1. Man öffnet den Hahn bei s, verbindet die Röhren a und b miteinander und läfst das Quecksilber in der linken Röhre bis zur Marke m steigen. Hierauf schliefst man den Hahn und bestimmt den Luftdruck H; die eingeschlossene Luft im Apparate hat das Volumen V und die Spannung H. Jetzt läfst man durch r aus beiden Röhren so viel Quecksilber abfliefsen, bis es in der rechten Röhre bis zur Marke p reicht. Die Luft hat sich jetzt auf das Volumen $V + v$ ausgedehnt, ihre Spannung ist kleiner als H geworden und das Quecksilberniveau liegt daher in der linken Röhre um h Millimeter niedriger als p; die Spannung der eingeschlossenen Luft ist jetzt $H - h$. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist

$$VH = (V + v)(H - h) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

also

$$V = v \frac{H - h}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

2. Während s geöffnet ist, bringt man das Quecksilber bis nach p; das Luftvolumen $V + v$ steht unter dem Drucke H. Man schliefst nun den Hahn bei s und füllt die linke Röhre mit Quecksilber, bis es in der rechten Röhre bei m anlangt; in der linken Röhre mufs es hierbei um eine gewisse Höhe h_1 oberhalb m stehen, so dafs die auf das Volumen V zusammengedrückte Luft sich unter dem Drucke $H + h_1$ befindet. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist

$$(V + v) H = V (H + h_1) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

also

$$V = v \frac{H}{h_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Für V nimmt man schliefslich das arithmetische Mittel aus beiden nach Formel (6) und (8) erhaltenen Werten.

Um das Volumen x irgend eines Körpers zu bestimmen, etwa eines Häufleins Krystalle oder eines pulverförmigen Körpers, schraubt man das Gefäfs A ab, bringt in dasselbe den Körper und schraubt es wieder an. Hierauf wiederholt man genau die beiden vorher beschriebenen Operationen, wobei indes h und h_1 andere Werte h' und h'_1 haben werden; ebenso wird der Luftdruck H jetzt einen anderen Wert H' haben. Da der Körper das Volumen x hat, so ist das Luftvolumen $V - x$ resp. $V + v - x$, je nachdem das Quecksilberniveau bis m oder bis p reicht. Anstatt der Gleichungen (5) und (7) hat man jetzt

$$(V - x) H' = (V + v - x)(H' - h')$$
$$(V + v - x) H' = (V - x)(H' + h'_1).$$

Diese Gleichungen geben zwei Werte für das gesuchte Volumen x, aus denen man wiederum das Mittel wählt.

Es existiert eine grofse Zahl von Volumenometern von verschiedener Form [1]). Von besonderem Interesse ist ein von W. W. Lermantow konstruierter Apparat, der für Laboratoriumsarbeiten der Studierenden bestimmt ist. Bei demselben ist das Gefäfs A durch ein weites Glas, die linke Glasröhre durch ein cylindrisches Gefäfs ersetzt, das mit der rechts befindlichen Röhre durch einen langen Gummischlauch verbunden ist. Das Ablassen und Nachfüllen des Quecksilbers wird hier in bequemer Weise dadurch ersetzt, dafs man das Gefäfs mittels einer um eine Rolle geschlungenen und auf eine Welle gewickelten Schnur hebt, indem man die Welle an einem Griff dreht.

Sechstes Kapitel.

Messung von Kräften und Massen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über das Messen von Kräften und Massen. Die Formel $f = mw$, vergl. Formel (5) auf S. 77, liefert die Beziehung der Kraft f zur Masse m, auf welche sie wirkt und der Beschleunigung w, die sie der Masse erteilt. Nach dieser Formel könnte man Massen finden, indem man ihre Beschleunigungen beobachtet, während auf sie eine bekannte oder einfacher eine konstante Kraft wirkt oder indem man die Kraft mifst, welche erforderlich ist, um den Massen eine uns bekannte oder besser eine konstante Beschleunigung zu erteilen. Ebenso könnte man die Kräfte durch diejenigen Beschleunigungen messen, welche sie gegebenen Massen erteilen oder durch diejenigen Massen, deren Bewegungen sie in gegebener Weise beschleunigen. Alle diese Methoden (mit Ausnahme einer, von der im weiteren die Rede sein wird) sind jedoch praktisch nicht wohl anwendbar, da es schwer fällt, die Beschleunigung während der Bewegung zu verfolgen und man wählt an ihrer Stelle daher andere Methoden.

Kräfte werden nicht blofs durch die Beschleunigungen gemessen, die sie in freibeweglichen Körpern hervorrufen, sondern auch durch den Druck, der durch sie auf unfreie Körper ausgeübt wird. Dieser Druck ruft gewisse Formenänderungen in den Körpern hervor, sowie elastische Gegenkräfte, durch welche den wirkenden Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. Aus der Gröfse der Formänderung eines Körpers kann man auf die Gröfse der wirkenden Kraft schliefsen. Hier-

---

[1]) Vergl. die Abhandl. von Oberbeck in Wied. Ann. 67, 209, 1899.

auf beruht die Konstruktion der sogenannten Dynamometer und unifilaren Torsionswagen, die weiter unten betrachtet werden sollen.

Ferner kann man Kräfte durch andere äufsere Kräfte messen, welche ihnen das Gleichgewicht halten, z. B. durch die Schwerkraft. Dies Prinzip kommt zur Anwendung bei den bifilaren Torsionswagen, sowie bei verschiedenen magnetischen und elektrischen Apparaten; dasselbe Prinzip wird häufig bei Messung des Gasdrucks, der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, der elastischen bei Formenänderung der Körper auftretenden Kräfte u. s. w. angewandt.

Die wichtigste Methode, eine nach Gröfse und Richtung konstante Kraft aus der von ihr hervorgerufenen Bewegung zu finden, besteht darin, dafs man einen gewissen Körper unter Einwirkung der gesuchten Kraft Schwingungen um eine gewisse Gleichgewichtslage ausführen läfst, die durch die Richtung dieser Kraft bestimmt wird. Die Schwingungsdauer ermöglicht, wie wir sehen werden, das Mafs für die Kraft zu finden.

Momentane (instantane oder Stofskräfte), d. h. sehr kurz dauernde Kräfte, werden, wie wir sahen (S. 87), durch den vollen Kraftimpuls während ihrer kurzen Wirkungsdauer bestimmt; wir haben ebenfalls gesehen, dafs dieser Kraftimpuls gleich der Bewegungsmenge mv ist, welche der Körper erlangt. Als Mafs für die momentane Kraft dient daher die Anfangsgeschwindigkeit v, welche der ursprünglich in Ruhe befindliche Körper in dem Augenblicke besitzt, wo die Wirkung der Kraft aufhört. Nach diesem Prinzip werden die momentanen Kräfte gemessen, welche bei Entzündung explosibler Stoffe, beim Stofse, bei Wirkung sehr kurz dauernder Induktionsströme u. s. w. auftreten.

Zur Messung von Kräften bedient man sich auch vielfach der Vergleichung mit der Schwerwirkung der Erde auf Körper. Man bezeichnet diese Schwerwirkung auch als das „Gewicht" dieser Körper, wiewohl unter „Gewicht" auch die „Masse" verstanden wird, namentlich wenn es sich in den Gewichtsstücken um bestimmte Massen handelt. Während die Masse unveränderlich ist, variiert die Schwerwirkung je nach dem Ort auf der Erde. Nimmt man als Gewichtseinheit das Gewicht irgend eines Körpers für den Ort, an welchem die Wägung vorgenommen wird, an, so kann man das Gewicht eines anderen Körpers bestimmen, indem man ihn an einem ein- resp. zweiarmigen Hebel mit einer gewissen Zahl Gewichtseinheiten (Gewichtstücke) balanciert. Das Verhältnis der Hebelarme mufs dabei natürlich bekannt sein. Die hierzu in Anwendung kommenden Apparate heifsen Wagen (die gewöhnliche, die russische, die römische, die Decimalwage u. s. w). Man darf jedoch nicht aufser acht lassen, dafs man an einer Wage das Gewicht eines Körpers nur unter der obengenannten Bedingung erhält. Für jede Breite und jede Meereshöhe müfste man bei Anwendung

von Federwagen besondere Gewichtsätze verwenden, falls man als Gewichtseinheit die Dyne oder das Gramm annimmt, d. h. das Gewicht, welches in Paris die Masse eines Gramm besitzt. Im anderen Falle müssen die entsprechenden Korrektionen bekannt sein, die das wahre Gewicht eines Gewichtstückes bestimmen lassen, das in Paris ein Gramm wiegen würde.

Es ist schon auf Seite 77 gesagt worden, dafs Gewichtstücke vor allen Dingen Massenetalons sind, und dafs daher die Wägung eine Operation darstellt, bei welcher die Masse eines Körpers durch Vergleichung seines Gewichtes mit dem Gewichte der Masseneinheit ermittelt wird. Da die Masse der Körper für einen gegebenen Ort proportional dem Gewichte ist, so erhalten wir einen richtigen Zahlenwert für die Masse, wo auch immer die Wägung vorgenommen wird, falls nur die Gewichtstücke richtige Massenetalons darstellen. Den Zahlenwert des Gewichtes kann man nur dann durch Wägung erhalten, falls das Gewicht der Etalons für den Ort bekannt ist, an welchem die Wägung vorgenommen wird.

§ 2. **Gewichtstücke** sind, wie gesagt, Massenetalons. Im internationalen Bureau der Mafse und Gewichte sind die Musteretalons des Kilogramms und zwar aus derselben Legierung (90 Proz. Pt und 10 Proz. Ir) hergestellt worden, wie die Etalons des Meters. Das Deutsche Reich hat durch Los das Kilogramm-Urgewicht Nr. 22 erhalten. Sein Volumen (bei 0^0) und seine wahre Masse sind die folgenden:

$$\text{Volumen: } 46{,}403 \text{ ccm}; \quad \text{Masse: } 1 \text{ kg} + 0{,}053 \text{ mg}.$$

Die Genauigkeit der Massenbestimmung beträgt $\pm$ 0,002 mg. Durch eben dieselben Zahlen wie die Masse wird offenbar auch das Gewicht dieses Urmafses, bezogen auf Paris und auf das Vakuum, ausgedrückt. Entsprechend der üblichen Ausdrucksweise werden wir im folgenden von Wägung, Gewichtstücken u. s. w. reden, obgleich es sich hier nicht sowohl um das Gewicht, als vielmehr um die Masse der Körper handelt.

Die Gewichtstücke, deren man sich für die Wage bedient, befinden sich in bestimmter Anordnung in cylindrisch oder sonstwie geformten Vertiefungen einer kleinen Holzleiste. Die besonders grofsen Stücke bestehen aus Gufseisen oder Schmiedeeisen, die mittleren aus — bisweilen vergoldetem — Messing, die kleineren aus Platin und die allerkleinsten zuweilen aus Aluminium. Besonders beständige Gewichtsätze werden aus Bergkrystall oder der oben erwähnten Platiniridiumlegierung hergestellt. Ihrer Gröfse nach entsprechen sie gewöhnlich folgenden Zahlen:

1—1—1—2—5—10—10—20—50—100—100—200—500
500—1000 u. s. w.,

so dafs man durch Kombination dieser Stücke alle möglichen zwischenliegenden Gewichte erhalten kann. Die kleinste Einheit wiederholt sich dreimal, die nächst höheren (10, 100 u. s. w.) je zweimal. Bisweilen besteht der Gewichtsatz aus Stücken mit folgendem Gewicht:

1—2—2—5—10—20—20—50—100—200—200—500—
1000—2000 u. s. w.

D. J. Mendelejew[1]) machte 1895 den Vorschlag, die Gewichtsätze aus folgenden Stücken zusammenzustellen:

1—2—3—4—10—20—30—40—100—200—300—400—1000 u.s.w.,

eine Zusammenstellung, die viele Vorzüge bietet.

Die käuflichen Gewichtsätze sind nicht ganz genau. Bevor man sie in Gebrauch nimmt, mufs man sie kalibrieren, d. h. das wahre Verhältnis ihrer Massen zur Masse des Etalons oder wenigstens ihr gegenseitiges Massenverhältnis finden. Wegen der hierbei in Anwendung kommenden Methoden sei auf die verschiedenen Lehrbücher der praktischen Physik verwiesen.

Der Theorie nach sollte das Kilogramm ursprünglich dem Gewichte von einem Liter reinen Wassers bei 4° C. gleichkommen. Nach D. J. Mendelejew[2]) ist das wahrscheinlichste Gewicht eines Kubikdecimeters reinen Wassers bei 4° C. im Vakuum gleich 999,847 g. Später nahm er die Zahl 999,89 g an. Das Liter ist also etwas gröfser als das Kubikdecimeter.

Macé de Lépinay findet eine gröfsere Zahl[3]). Zugleich mit Fabry und Perot kommt er zu dem Resultat, dafs das Gewicht P von einem Liter Wasser bei 4° C. gleich

$$P = 999{,}9786\,\mathrm{g} = 1\,\mathrm{kg} - 21{,}4\,\mathrm{mg}$$

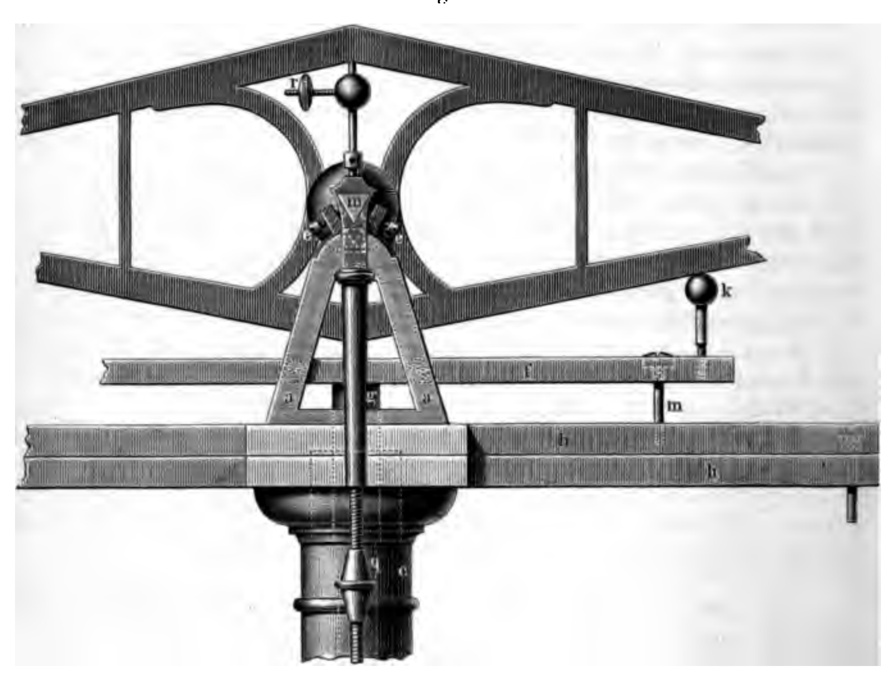
ist[4]). Später blieben die genannten Forscher bei der Zahl 999,974 stehen. Chappuis findet 999,976, also fast genau denselben Wert. Endlich hat Ch. Guillaume aus seinen Messungen die Zahl 999,955 als vorläufiges Resultat angegeben[5]).

§ 3. Die Einrichtung der Wage. Der wichtigste Bestandteil der Wage ist der Wagebalken — ein gleicharmiger Hebel. Derselbe kann eine sehr verschiedenartige Einrichtung haben. In Fig. 175 (a. f. S.) ist der mittlere Teil des Wagebalkens einer Wage von Rueprecht in Wien abgebildet. Wir geben zuerst einige allgemeine Bemerkungen. Durch die Mitte des Wagebalkens führt ein dreiseitiges Prisma (*m* in

[1]) Wremennik Gl. Palatij Mjer i Wjessow, Teil 2, S. 162.
[2]) Ebend. Teil 2, S. 143. Proc. Royal Soc. of London **59**, 143, 1896.
[3]) Compt. rend. **122**, 595, 1896. Journ. de phys. (3) **5**, 477, 1896. Ann. de chim. et phys. (7) **11**, 102, 1897.
[4]) Compt. rend. **129**, 709, 1899.
[5]) Congrès internat. de phys., Rapports I, p. 99, 1900.

Fig. 175), dessen eine Kante nach unten gekehrt ist und als Stütze für den Balken dient. An den Enden des Wagebalkens befinden sich zwei weitere Prismen (s. weiter unten), die mit einer Kante nach oben gekehrt sind und auf welche sich die Haken oder Faßsungen stützen, in welchen die Wagschalen hängen. Die Kanten dieser drei Prismen müssen einander parallel sein und so lange die Wage sich in Ruhe befindet, in einer horizontalen Ebene liegen. Ein langer vertikaler Zeiger q, der am Wagebalken mit dem einen Ende befestigt ist, erlaubt, dessen Schwingungen zu beobachten; zu diesem Zwecke befindet sich beim anderen Ende des Zeigers eine Skala. In der Mitte der Skala oder besser an einem Ende derselben befindet sich der Nullpunkt.

Fig. 175.



Statt des Zeigers kann man eine kleine vertikale Skala benutzen, die an einem Ende des Wagebalkens befestigt ist. Die Schwingungen beobachtet man in diesem Falle mittels eines auf diese Skala gerichteten Mikroskops.

Damit die Kanten der Prismen durch den beständigen Druck des Wagebalkens sowie der Schalen nicht stumpf werden, ist ein beweglicher Rahmen vorhanden, den man senkt, sobald eine Wägung vorgenommen werden soll und wiederum hebt, sobald die Wägung beendet ist. Dieser Rahmen hebt den Wagebalken und die Stützen der Wag-

schalen, so dafs die Prismen von dem auf ihnen lastenden Drucke befreit werden.

Die Wage wird in einem Glasgehäuse, das mit Thüren versehen ist, untergebracht. Um die Gewichtstücke in bequemer Weise auf die Wagschalen oder auch auf den Wagebalken legen zu können, existieren sehr verschiedene Vorkehrungen. Während der Wägung selbst hat man die Wage auf das Sorgfältigste vor den geringsten Luftströmungen und ebenso vor einer ungleichmäfsigen Erwärmung der beiden Hebelarme (wie sie z. B. durch den Beobachter selbst erfolgen kann) zu schützen.

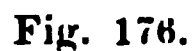
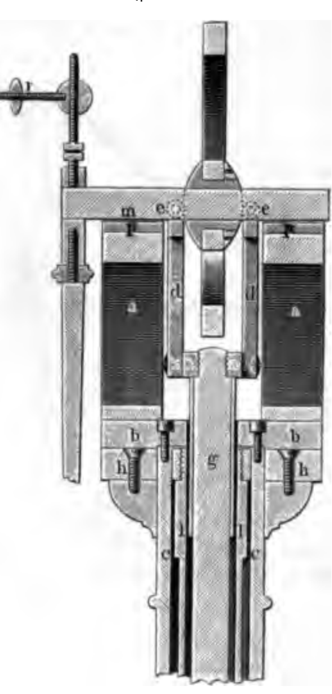


Fig. 176.



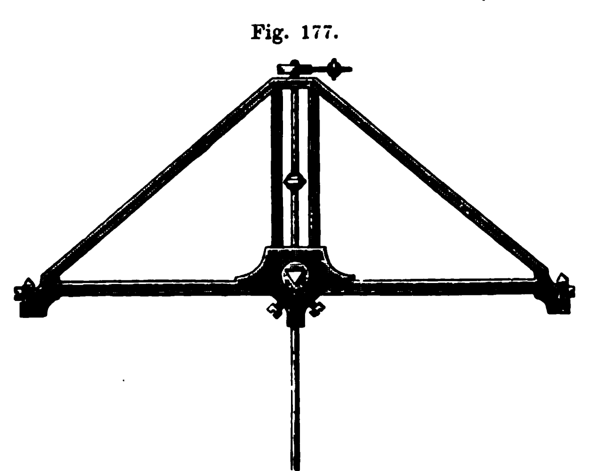
Die mittlere Säule, welche den Wagebalken trägt, besteht aus drei konzentrischen Teilen, nämlich zwei Hohlcylindern und einer inneren cylindrischen Säule *g* (s. in Fig. 176 einen Durchschnitt senkrecht zur Ebene des Wagebalkens). Der äufsere Hohlcylinder ist mit der Lamelle *h* und den Balken *aa* fest verbunden; letztere tragen zwei horizontale ebene Lagersteine aus Bergkrystall *pp*, auf welchen das Prisma *m* mit seiner unteren scharfen Kante aufliegt. Die innere Säule *g* dient zur Arretierung der Wage. Dreht man einen an dem Gehäuse der Wage befindlichen Schraubenkopf, so hebt sich die Säule *g* und mit ihr die Lamelle *f* (in Fig. 175 sichtbar) und die Bögen *dd*, welche von unten das Prisma *m* aufnehmen, indem die schrägen Seitenflächen desselben sich auf die abgerundeten Stahlschrauben *ee* auflegen, und zugleich der Wagebalken an den Kugeln *k* eine weitere Stütze erhält. Der innere Hohlcylinder, welcher mit der Lamelle *h* verbunden ist, dient zur Arretierung der Gehängevorrichtung, doch unterlassen wir eine nähere Beschreibung dieses Teiles, sowie desjenigen, der zur Arretierung der Wagschalen dient, da die betreffenden Konstruktionen, wie erwähnt, sehr verschiedenartige sein können.

Gegenwärtig benutzt man bei genauen Wägungen ausschliefslich **kurzarmige Wagen**. Das theoretische und praktische Studium der Bedingungen, unter welchen der höchste Genauigkeitsgrad der Wägung erhalten werden kann, hat D. J. Mendelejew[1]) zur Auffindung einer

[1]) Die Spannung der Gase (russ.). St. Petersburg 1875. § 16 und 17.

Formel geführt, aus welcher der Nutzen kurzarmiger Wagen hervorgeht, besonders wenn die Wägung bei konstanter und immer dergleichen Belastung vorgenommen wird (s. unten). Es sei hier bloß erwähnt, daß sich durch Verkürzung des Wagebalkens die Biegung desselben vermindert und seine Schwingungsdauer abnimmt, was, wie im weiteren gezeigt werden soll, von hohem, praktischem Wert für die Wägung ist. Die Gestalt des Wagebalkens muß eine derartige sein, daß alle Teile desselben einer Durchbiegung den gleichen Widerstand entgegensetzen. Die in verschiedenen Werkstätten verfertigten Wagebalken haben eine sehr verschiedene Form; um das Gewicht des Wagebalkens herabzumindern, werden in ihm Ausschnitte angebracht, doch darf hierdurch die Festigkeit des Balkens nicht leiden. Fig. 177 zeigt einen von Sartorius stammenden Wagebalken für geringe Belastung; er ist aus Aluminium mit einem Zusatz von Silber gegossen.

Fig. 177.



Die Schneiden der drei mit dem Wagebalken verbundenen Prismen müssen unter einander parallel sein, da sich im entgegengesetzten Falle die Abstände der Angriffspunkte der Belastung vom Stützpunkte ändern können. G. K. Brauer in St. Petersburg hat einen Apparat konstruiert, der speziell dazu dient, die Parallelität dieser Schneiden zu untersuchen.

Die drei Schneiden der Prismen müssen sich während der Wägung in einer Ebene befinden. Mendelejew schlägt vor, daß man unter Benutzung einer konstanten Belastung die Prismen derart anbringen soll, daß ihre Schneiden sich, während die Schalen belastet sind, in einer Ebene befinden. Demgemäß muß, bei unbelasteter Wage, die Schneide des mittleren Prismas ein wenig niedriger liegen, da sich die seitlichen Prismen durch die Belastung senken.

Die seitlichen Prismen werden oft beweglich gemacht, damit sich ihre Lage in bequemer Weise regulieren läßt. Eine solche Vorrichtung ist in Fig. 178 abgebildet. Wie ersichtlich, kann man mittels der Schraube *a* das Prisma heben und senken, mittels *b* dasselbe ein wenig nach links oder rechts rücken.

Eine andere Konstruktion zeigen Fig. 179 und 180. Das Prisma *b* ist mit Hülfe der Schrauben *v* und *v'* an den stählernen Träger *m* angeschraubt, welcher selbst durch die Schraube *n* mit dem Wagebalken verbunden ist. Bei Lüftung dieser Schraube kann der Träger *m* mit Hülfe der Schraube *p* in der Längsrichtung verschoben werden, wobei das mit dem Wagebalken verbundene prismatische Stück *o* zur Führung dient. Geringe Drehungen werden hierbei mit Hülfe der Schrauben *r* und *r'* ausgeführt.

Fig. 178.

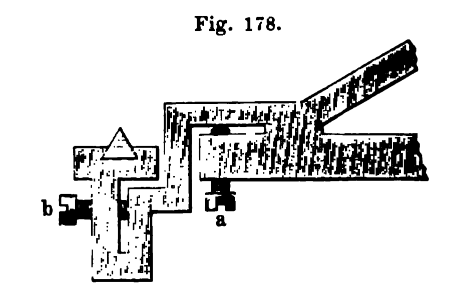


Fig. 179.

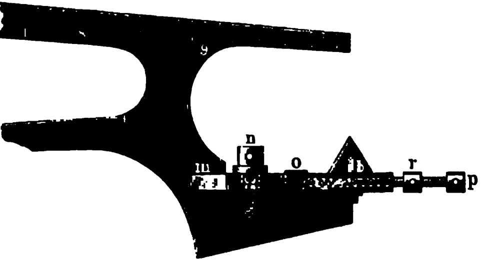


Fig. 180.

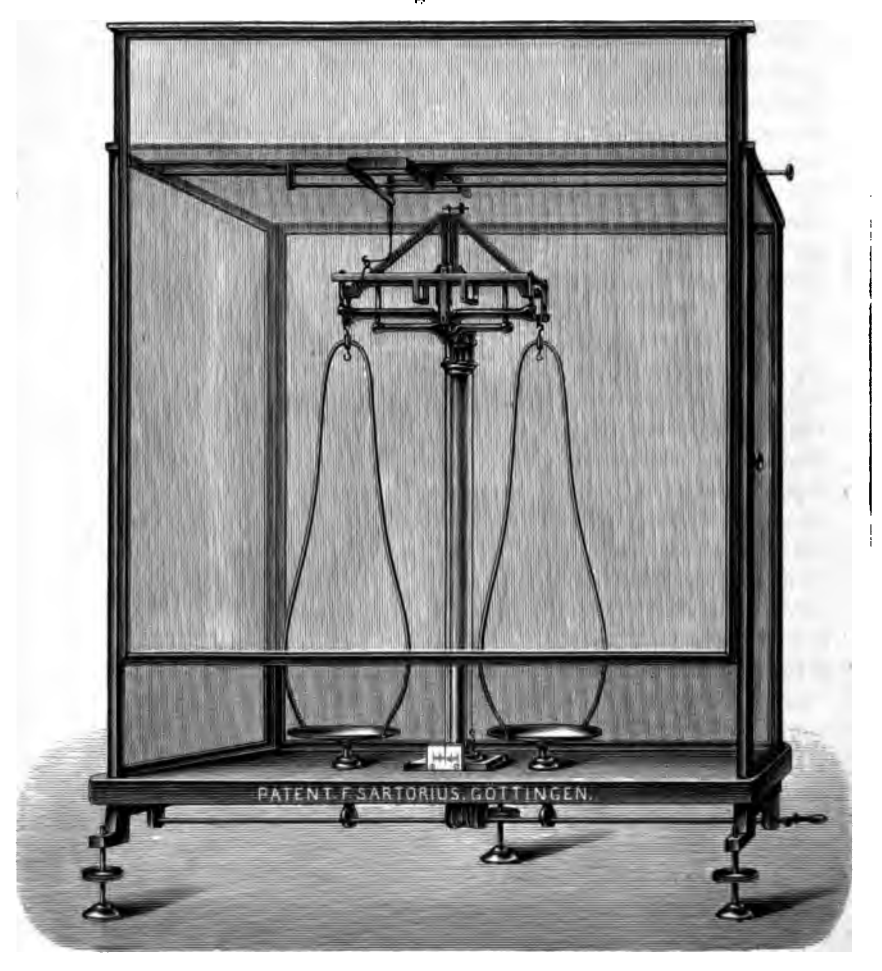


D. J. Mendelejew hat eine Arretierung des Wagebalkens vorgeschlagen, die aus zwei Hebelarmen besteht, welche sich um eine in der Verlängerung der mittleren Prismenschneide befindliche Achse drehen. Eine solche Vorrichtung arretiert den schwingenden Wagebalken, ohne auf ihm zu gleiten, da Balken und Arretierung die gleiche Drehungsachse haben. Das Gleiten der Arretierung längs der Oberfläche des Wagebalkens ruft einen schädlichen Seitendruck hervor, wodurch sich die Schneiden abstumpfen können. Fig. 181 (a. f. S.) zeigt eine der kurzarmigen Wagen, welche von Sartorius in Göttingen angefertigt werden.

§ 4. Stabilität und Empfindlichkeit der Wage. Für die Stabilität der Wage ist es erforderlich, dafs sich der Schwerpunkt des Wagebalkens ein wenig unterhalb seines Stützpunktes befinde, d. h. unterhalb der Schneide des mittleren Prismas. Die Wagschalen nebst ihrer Belastung würden nur dann einen Einflufs auf die Stabilität haben, wenn sie mit dem Wagebalken fest zusammenhingen. Unter der Empfindlichkeit einer Wage versteht man ihre Fähigkeit, eine merkliche Ablenkung des Wagebalkens durch ein kleines Über-

gewicht p zu veranlassen, welches bei gleicher Belastung P der Wagschalen einer derselben hinzugefügt ist. Bezeichnet man den Ab-

Fig. 181.



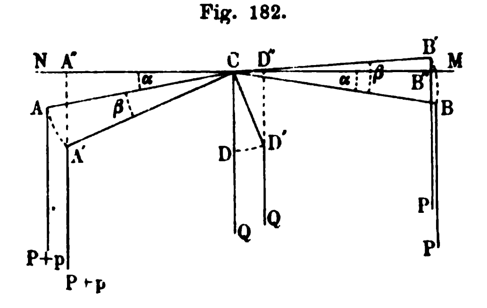
lenkungswinkel des Wagebalkens mit β, so läfst man als Mafs für die Empfindlichkeit ω die folgende Gröfse gelten

$$\omega = \frac{\beta}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Gröfse wird folgendermafsen gefunden. Es sei NCM eine horizontale Linie (Fig. 182); AC und BC stellen die Hebelarme dar, die der Allgemeinheit wegen bei gleicher Belastung der Wagschalen nicht mit jener horizontalen Linie zusammenfallen mögen. Durch A,

B und C gehen die Schneiden der drei Prismen. An A und B greifen Kräfte an, die der Belastung der Wagschalen gleich sind. Es sei ferner $\angle ACN = \angle BCM = \alpha$; D der Schwerpunkt des Wagebalkens, auf den mithin die Kraft Q, nämlich das Gewicht des Wagebalkens, wirkt. Die Länge der Hebelarme bezeichnen wir mit $l = AC = BC$, den Abstand des Schwerpunktes vom Stützpunkt mit $\delta = DC$. Wir denken uns auf die rechte Wagschale das

Fig. 182.



Gewicht P, auf die linke das Gewicht $P + p$ gelegt, wo p also das Übergewicht bedeutet.

Die Hebelarme nehmen jetzt die Lage $A'CB'$ an, der Schwerpunkt gelangt nach D'. Wir setzen $\angle DCD' = \angle ACA' = \angle BCB' = \beta$. Die Bedingung für das Gleichgewicht des Wagebalkens in der neuen Lage unter Einwirkung der Kräfte P, $P + p$ und Q lautet

$$(P + p) . \overline{A''C} = P . \overline{B''C} + Q . \overline{D''C}$$

oder

$$(P + p) l \cos(\beta + \alpha) = P l \cos(\beta - \alpha) + Q \delta \sin \beta .$$

Entwickelt man $\cos(\beta + \alpha)$ und $\cos(\beta - \alpha)$ und dividiert die ganze Gleichung durch $\cos \alpha$, so erhält man

$$tg\, \beta = \frac{p\, l \cos \alpha}{(2P + p) l \sin \alpha + Q \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für kleine Winkel β kann man die Tangente durch den Bogen ersetzen und erhält nach (1)

$$\omega = \frac{l \cos \alpha}{(2P + p) l \sin \alpha + Q \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Befänden sich die Schneiden der drei Prismen auf einer Geraden, d. h. wäre $\alpha = 0$, so erhielte man die einfache Formel

$$\omega = \frac{l}{Q \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der letzte Ausdruck zeigt, daſs die Empfindlichkeit einer Wage direkt proportional der Länge der Hebelarme und indirekt proportional dem Gewichte des Wagebalkens und dem Abstande seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte ist. Hieraus kann man schlieſsen, daſs man, um die Empfindlichkeit der Wage zu erhöhen, den

Wagebalken möglichst leicht und bei gegebenem Gewichte möglichst lang machen und den Schwerpunkt dem Unterstützungspunkte möglichst nahe bringen mufs.

Im idealen, der Formel (4) entsprechenden Falle hängt die Empfindlichkeit gar nicht von der Belastung P der Wage ab. Die allgemeinere Formel (3) zeigt, dafs sich bei Vergröfserung der Belastung die Empfindlichkeit der Wage verringert, falls Winkel α positiv ist, d. h. falls der Stützpunkt des Balkens über demjenigen der Wagschalen liegt und sich vergröfsert, falls α negativ ist, d. h. falls die Schneiden der seitlichen Prismen über derjenigen des mittleren liegen. Sehr wichtig ist die Bemerkung, dafs Winkel α von der Belastung P abhängt, indem dieselbe eine Biegung des Wagebalkens, d. h. eine Zunahme des Winkels α hervorruft. Ist für $P = 0$ der Winkel α positiv, so mufs sich die Empfindlichkeit ω bei Vermehrung der Belastung P aus zweierlei Gründen vermindern; ist dagegen der Anfangswert von α negativ, so wird bei Zunahme von P der Winkel α zunächst gleich Null und darauf positiv. In diesem Falle müfste sich die Empfindlichkeit ω der Wage bei Zunahme der Belastung P zuerst vergröfsern und hierauf vermindern, was man auch in der That beobachten kann. Eine Verlängerung des Wagebalkens vergröfsert die Biegung bei belasteter Wage und vergröfsert gleichzeitig die Schwingungsdauer; hierin liegt, wie schon früher gesagt wurde, die Ursache, weshalb man gegenwärtig kurzarmige Wagen gebraucht.

§ 5. Beobachtung der Schwingungen des Wagebalkens. Die Wägung besteht darin, dafs man einen Körper mit Gewichtstücken balanciert, welche also den Wagebalken in dieselbe Lage bringen sollen, die er ohne Belastung inne hatte. Es zeigt sich aber nun, dafs, wenn man die Arretierung entfernt, die Wage jedesmal zu schwingen beginnt, dafs diese Schwingungen sehr lange andauern und man nicht warten kann, bis der Wagebalken zu völligem Stillstande gelangt. Deshalb beobachtet man diese Schwingungen an der entsprechenden Skala und berechnet aus letzteren Beobachtungen denjenigen Teilstrich der Skala, welcher der Ruhelage entspricht, d. h. welcher der Spitze des Zeigers resp. dem horizontalen Okularfaden des zur Ablesung dienenden Mikroskopes gegenüber zu liegen kommen würde. Falls der Wagebalken sehr heftige Schwingungen ausführt, so hat man ihn zu beruhigen, indem man die Wagschalen mit einem weichen Pinsel leicht berührt. Während man die feineren Schwingungen beobachtet, **dürfen** sich die Wagschalen blofs heben und senken und **nicht** etwa seitliche Bewegungen ausführen, da durch letztere eine Zentrifugalkraft hervorgerufen wird, welche die Lage des gesuchten Skalenpunktes verändert. Um diesen Punkt zu finden, beobachtet man an der Skala drei aufeinander folgende Ausschläge; es seien a, b und c die

beobachteten Teilstriche der Skala, wobei a und c zur einen und b zur anderen Seite des gesuchten Punktes der Ruhelage sich befinden mögen.

Man nimmt nun das Mittel $\frac{a+c}{2}$ der auf der einen Seite gesuchten Ablesungen und darauf das Mittel aus diesem und der Ablesung b auf der anderen Seite der Skala. Die gefundene Zahl liefert alsdann den gesuchten Teilstrich n, welcher der Ruhelage entspricht. Somit ist

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2} + b\right) = \frac{1}{4}(a + 2b + c) \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

Beobachtet man vier Ausschläge a, b, c und d (wobei a und c auf der einen, b und d auf der anderen Seite liegen), so wird n aus folgender Formel gefunden

$$n = \frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

Dieselbe wird erhalten, wenn man nach (5) das Mittel aus beiden Ruhelagen berechnet, die mit Hülfe von a, b, c und b, c, d gefunden werden.

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(a + 2b + c) + \frac{1}{4}(b + 2c + d)\right] = \frac{1}{8}(a + 3b + 3c + d).$$

Bevor man die Wägung selbst vornimmt, hat man nach derselben Methode denjenigen Skalenstrich n_0 zu bestimmen, welcher der Ruhelage der unbelasteten Wage entspricht.

Es seien beispielsweise bei unbelasteter Wage die Umkehrpunkte der Schwingungen

	links resp. oben	rechts resp. unten
	10,6	8,3
	10,4	
Mittel	10,5	$n_0 = \frac{10,5 + 8,3}{2} = 9,4.$

Somit entspricht der Ruhelage der Teilstrich $n_0 = 9,4$.

Befindet sich der Nullpunkt der Skala in der Mitte derselben, so hat man die Ablesungen mit einem Vorzeichen zu versehen. Während der Wägung hat man wiederum die Schwingungen zu beobachten und diejenige Summe der Gewichtstücke zu bestimmen, für welche der Teilstrich n_0 abermals der Gleichgewichtslage entspricht. Für gewöhnlich ergiebt eine gewisse Belastung eine Ruhelage, die sich zur einen Seite von n_0 befindet und ruft die geringste Vermehrung der Belastung eine Verschiebung der Ruhelage nach der entgegengesetzten Seite von n_0 hervor. Man findet dann aus einer einfachen Proportion jenen Teil des kleinsten Gewichtstückes, durch welchen die Ruhelage in n_0 erreicht wird. Erläutern wir das Gesagte an einem Beispiele. Es

sei, wie oben, $n = 9{,}4$. Die Belastung 43,765 g giebt folgende Ablesungen:

links resp. oben	rechts resp. unten
9,7	7,2
9,5	
Mittel 9,6	

Die Gleichgewichtslage ist $n_1 = \frac{9{,}6 + 7{,}2}{2} = 8{,}4$. Die Belastung 43,766 g giebt:

links resp. oben	rechts resp. unten
10,9	8,8
10,7	
Mittel 10,8	

Die Gleichgewichtslage ist $n_2 = \frac{10{,}8 + 8{,}8}{2} = 9{,}8$. Somit verschiebt sich durch Hinzufügen eines Milligramms die Gleichgewichtslage um $9{,}8 - 8{,}4 = 1{,}4$ Skalenteile. Das gesuchte Gewicht x, das der Minderbelastung hinzugefügt werden müfste, würde eine Verschiebung um $n_0 - 8{,}4 = 9{,}4 - 8{,}4 = 1{,}0$ Skalenteile bewirken. Hieraus folgt $x = 1{,}0 : 1{,}4 = 0{,}71$; es ist daher das gesuchte Gewicht des gewogenen Körpers gleich 43,7657 g, falls die letzte Decimale fortgelassen wird.

P. Curie hat eine aperiodische Wage konstruiert, bei welcher die Schwingungen des Wagebalkens geringe Verdichtungen oder Verdünnungen einer Luftmenge hervorrufen, die sich unterhalb der Wagschalen in besonderen Räumen befindet. Infolgedessen nehmen die Schwingungsamplituden des Wagebalkens sehr schnell ab.

Eingehenderes über die genauesten Wägungsmethoden, die Aufstellung von Wagen u. s. w. findet man in den Arbeiten Mendelejews[1]). Unter Berücksichtigung aller Nebenumstände und unter Benutzung der besten Wagen kann man einen sehr hohen Genauigkeitsgrad bei der Wägung erreichen. Bei Bestimmung des Gewichtes von einem Kilogramm kann man eine Genauigkeit von 0,1 mg erreichen, sich also noch für diese Gröfse verbürgen; dies beträgt ein zehnmilliontel des gesuchten Gewichtes. Unter besonders günstigen Umständen ist es gelungen, eine Genauigkeit von 0,1 mg auf 10 kg und sogar von 0,005 mg auf 1 kg zu erreichen (d. i. ein zweihundertmilliontel des gesuchten Gewichtes).

[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 1895, chem. Teil, S. 509. Wremennik Glawnoj Palatij Mjer i Wjessow, Teil 3, S. 1 bis 84, 1896. Experimentalunters. über Wageschwingungen (russ.), St. Petersburg 1898. Über Wageschwingungen, eine auf der X. allg. Versamml. der russ. Naturforscher gehaltene Rede, Kiew 1898 (russ.), letztere ist auch im Wrem. Gl. Pal. M. i W. Teil 4, S. 33, 1899 erschienen.

Keine andere Messung einer physikalischen Gröfse kann mit einem ähnlichen Genauigkeitsgrade ausgeführt werden.

§ 6. Wägungsmethoden. Es existieren drei Wägungsmethoden, welche den Einflufs der ungleichen Länge der Hebelarme und des ungleichen Gewichtes der Wagschalen eliminieren.

I. Die Gaufssche Methode der Doppelwägung. Man bringt den Körper zuerst auf die eine, dann auf die andere Wagschale und bestimmt die beiden Belastungen p_1 und p_2, durch welche er im Gleichgewichte gehalten wird. Bezeichnet man die Länge des Hebelarmes, auf welchen das gesuchte Gewicht p des Körpers zuerst wirkt, mit l_1, die Länge des anderen Hebelarmes mit l_2, so ist

$$p l_1 = p_1 l_2 ; \qquad p l_2 = p_2 l_1 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Durch Multiplikation erhält man

$$p^2 = p_1 p_2,$$

d. h.

$$p = \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

da man, falls p_1 und p_2 nur wenig voneinander verschieden sind, ihr geometrisches Mittel dem arithmetischen Mittel gleichsetzen kann (vergl. S. 280). Dividiert man die Gleichungen (7) durcheinander, so erhält man das Längenverhältnis $l_1 : l_2$ der Hebelarme, das mit λ bezeichnet werden möge:

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Ist $\frac{p_1}{p_2} = 1 + \alpha$, wo α eine kleine Gröfse bedeutet, so ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} \cdot \quad \ldots \quad (9)$$

Somit erhält man bei der Methode der Doppelwägung unter anderem auch das Verhältnis der Hebelarme des Wagebalkens.

II. Die Bordasche oder Tarierungsmethode. Man bringt den Körper auf eine der Wagschalen und äquilibriert ihn durch Schrot, Sand, Feilicht u. s. w. Hierauf entfernt man den Körper und legt an seiner Stelle Gewichtstücke auf, welche den Sand, Feilicht u. s. w. zu äquilibrieren haben. Offenbar ist dann das gesuchte Gewicht gleich demjenigen der Gewichtstücke, einerlei ob die Hebelarme gleich sind oder nicht.

III. Die Mendelejewsche Methode der konstanten Belastung oder der konstanten Empfindlichkeit. Wie wir sahen, ist die Empfindlichkeit der Wage von der Gröfse der Belastung abhängig. Um daher eine Reihe von Wägungen bei gleicher Empfind-

lichkeit der Wage vorzunehmen, verfährt man folgendermafsen. Nehmen wir an, die Wage sei für die Maximalbelastung von einem Kilogramm pro Schale bestimmt. Dann legt man auf die eine Schale ein Kilogrammgewicht und auf die andere eine ganze Reihe von Gewichtstücken, die zusammen 1 kg wiegen. Durch ein kleines, auf die entsprechende Seite gebrachtes Übergewicht verlegt man den Punkt der Ruhelage nach der Skalenmitte, falls der Wagebalken zu stark geneigt sein sollte. Den zu wägenden Körper legt man auf die Schalen mit den kleinen Gewichtstücken und entfernt so viele derselben, bis Gleichgewicht eintritt. Die fortgenommenen Gewichtstücke bestimmen hierbei das Gewicht des Körpers.

§ 7. Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft. Nach dem Archimedischen Prinzip verliert (wie man sich auszudrücken pflegt) jeder Körper in der Luft so viel von seinem Gewichte, als das verdrängte Luftvolumen wiegt. Da die Dichte der Luft ungefähr $^1/_{700}$ beträgt, so verliert offenbar ein Körper mit der Dichte Eins gegen 0,13 Proz. seines Gewichtes, was eine aufserordentlich bedeutende Gröfse ist im Vergleich mit der Genauigkeit, die beim Wägen erreicht werden kann (0,00001 Proz.). Sogar einer der dichtesten Körper — das Platin — verliert schon 0,006 Proz. seines Gewichtes in der Luft. Beim Wägen eines Kilogramms Platin beträgt dieser Gewichtsverlust 60 mg, d. h. 600 mal mehr als das kleinste auf der Wage noch wahrnehmbare Gewicht (0,1 mg).

Mit Hülfe eines aus der Elementarphysik bekannten Apparates, des Baroskops, welches in Fig. 183 abgebildet ist, kann man leicht die scheinbare Gewichtszunahme der Körper beim Übergange aus der Luft ins Vakuum wahrnehmen und zeigen, dafs dieselbe um so gröfser ist, je gröfser das Volumen der Körper ist. Eine kleine Metallkugel hält einer gröfseren Holzkugel im lufterfüllten Raume das Gleichgewicht; unter der Luftpumpe dagegen erscheint letztere schwerer, mithin hatte sie beim Übergange aus dem Vakuum in Luft mehr als erstere von ihrem Gewichte eingebüfst.

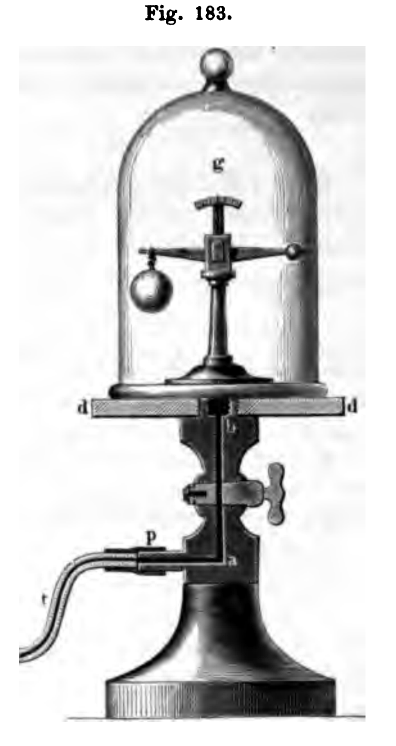
Der Gewichtsverlust ändert sich zugleich mit der Dichtigkeit der Luft, d. h. mit dem barometrischen Drucke, der Lufttemperatur und ihrer Zusammensetzung, die hinsichtlich des Dampfgehaltes sehr veränderlich ist. Hieraus folgt, dafs das „scheinbare Gewicht“ der Körper eine variable Gröfse ist. Daher wird bei jeder genauen Wägung vorausgesetzt, dafs das „wahre Gewicht“, d. h. das Gewicht des Körpers im Vakuum, bestimmt wird. Die Berechnung des wahren Gewichtes aus dem beobachteten heifst die „Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft“.

Mit Änderung des Luftzustandes ändert sich auch das scheinbare Gewicht der Gewichtstücke und daher mufs man ein- für allemal vor-

aussetzen, dafs sich die Benennung der Gewichtstücke (einschliefslich der beim Kalibrieren gefundenen Korrektionen) auf ihr Gewicht im Vakuum bezieht.

Die Korrektion wegen des Gewichtsverlustes fällt fort, falls die Wägung im Vakuum vorgenommen wird, was auch in der That bisweilen geschieht (zuerst von Regnault im Jahre 1860 ausgeführt, neuerdings von Mendelejew in der Hauptanstalt für Mafse und Gewichte und auch von anderen). Ferner ist obige Korrektion nicht erforderlich, falls der zu wägende Körper und die Gewichtstücke aus demselben Material bestehen. Die wichtigste Gröfse, welche man, um wegen des Gewichtsverlustes zu korrigieren, kennen mufs, ist das Gewicht eines Kubikcentimeters trockener Luft bei 0° und 760 mm Druck, d. h. bei einem Luftdrucke, welcher gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° am Meeresspiegel und unter 45° geographischer Breite ist.

Fig. 183.



Wir wollen dieses Gewicht mit p_0 bezeichnen. Es ist für verschiedene Breiten verschieden und ist offenbar proportional der Beschleunigung g der Erdschwere. Nach Mendelejew ist $p_0 = 1{,}318\,44\,g$ mg . . (10)

wo g in $\frac{\text{Meter}}{(\text{Sek.})^2}$ ausgedrückt ist. Nimmt man für St. Petersburg $g = 9{,}8188$ an, so erhält man für diesen Ort

$$p_0 = 1{,}29455 \text{ mg} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Die russische Hauptanstalt der Mafse und Gewichte bezeichnet das Gewicht eines Liters trockener Luft unter normalen Bedingungen mit $e_0 = 1000\, p_0$.

Nehmen wir an, die Wägung werde bei einer Temperatur von t^0, einem Barometerstande H ausgeführt und die Spannung der in der Luft enthaltenen Wasserdämpfe sei h. In diesem Falle ist das Gewicht p eines Kubikcentimeters Luft gleich (s. unten das Daltonsche Gesetz)

$$p = p_0 \frac{H - h}{760\,(1 + \alpha t)} + p_0 \delta \frac{h}{760\,(1 + \alpha t)}$$

wo $\alpha = 0{,}00\,367$ der thermische Ausdehnungskoeffizient der Gase und δ die Dichte des Wasserdampfes in Bezug auf Luft (etwa $^5/_8$) ist. Vereinfacht man den Ausdruck, so kommt

$$p = p_0 \frac{H - {}^3/_8\, h}{760\,(1 + \alpha t)} \text{ mg} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Die Formel (12) wird nur in Ausnahmefällen gebraucht. Für gewöhnliche, bei Zimmertemperatur vorgenommene Wägungen, wo keine groſse Genauigkeit erforderlich ist, kann man die folgende Formel verwenden

$$p = 1{,}2 \text{ mg} = 0{,}0012 \text{ g} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Sei P das wahre gesuchte Gewicht des Körpers, V sein Volumen, D seine Dichte; Q das wahre Gewicht der Gewichtstücke, das wir kennen, v ihr Volumen und δ ihre Dichte. Der Gewichtsverlust des Körpers ist $p\,V = p\,\frac{P}{D}$; der Gewichtsverlust der Gewichtstücke $p\,v = p\,\frac{Q}{\delta}$. In Luft giebt die Wage Gewichtsgleichheit für den Körper und die Gewichtstücke an, folglich ist

$$P - p\,\frac{P}{D} = Q - p\,\frac{Q}{\delta} \text{ oder } P\left(1 - \frac{p}{D}\right) = Q\left(1 - \frac{p}{\delta}\right),$$

woraus sich das gesuchte wahre Gewicht des Körpers ergiebt

$$P = Q\,\frac{1 - \frac{p}{\delta}}{1 - \frac{p}{D}}.$$

Wegen der Kleinheit der Korrektionen kann man (vergl. S. 280) setzen

$$P = Q\left(1 - \frac{p}{\delta}\right)\left(1 + \frac{p}{D}\right) = Q\left(1 + \frac{p}{D} - \frac{p}{\delta}\right)$$

oder

$$P = Q + Q\,p\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Setzt man den Wert von p aus (13) ein, so ergiebt sich

$$P = Q + 0{,}0012\; Q\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) \text{g} \quad \ldots \quad (15)$$

oder

$$P = Q + 1{,}2\, Q\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\delta}\right) \text{mg} \quad \ldots \quad (16)$$

Das zweite Glied von (16) giebt die gesuchte Korrektion in Milligrammen; Q ist in Grammen ausgedrückt.

Werden zur Wägung Gewichte aus Messing verwandt, so ist $\delta = 8{,}4$. Schreibt man (16) in der Form

$$P = Q + kQ,$$

so ist

$$k = 1{,}2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{8{,}4}\right)\,\mathrm{mg} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Es existieren Tabellen, welche den Wert des Faktors k für verschiedene Dichten D des zu wägenden Körpers liefern und ebenfalls Tabellen für den Fall, dafs zur Wägung Gewichte aus Platin dienen, in welchem Falle $\delta = 22$, folglich $k = 1{,}2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{22}\right)$ mg ist.

Von allen Messungen kann das Wägen am genauesten ausgeführt werden, so dafs bei entsprechender Güte der Wage und **hauptsächlich bei genügender Übung und Umsicht des Beobachters** die Genauigkeit bis auf $\frac{1}{10^7}$ der zu messenden Gröfse gebracht werden kann, d. h. bis auf 0,1 mg bei Wägung von einem Kilogramm.

§ 8. Decimalwage, Wagen von Roberval und von Westphal. Wir wollen jetzt einige Apparate betrachten, die zwar ebenfalls zum Wägen dienen, sich aber durch ihre Konstruktion wesentlich von der oben beschriebenen gleicharmigen Wage unterscheiden.

I. Die Decimalwage; sie ist in Fig. 184 dargestellt und zwar so, dafs gewisse sich sonst verdeckende Teile sichtbar gemacht sind. Die zu

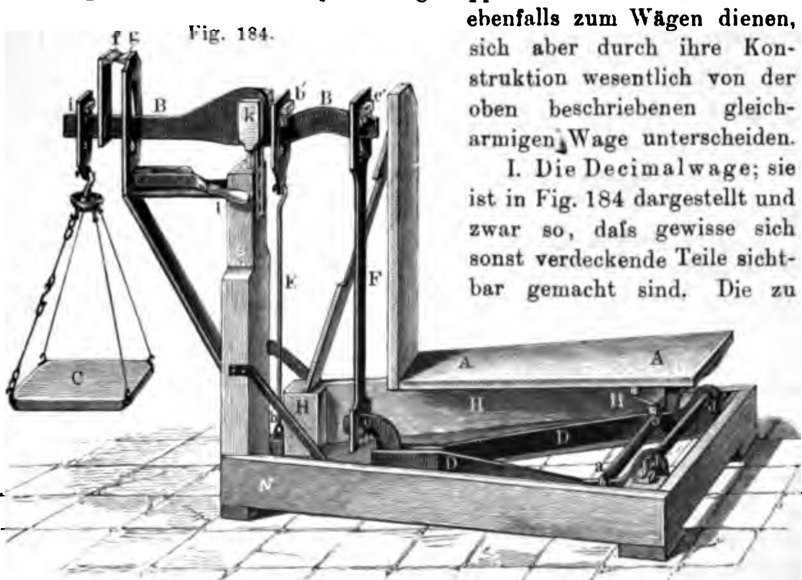


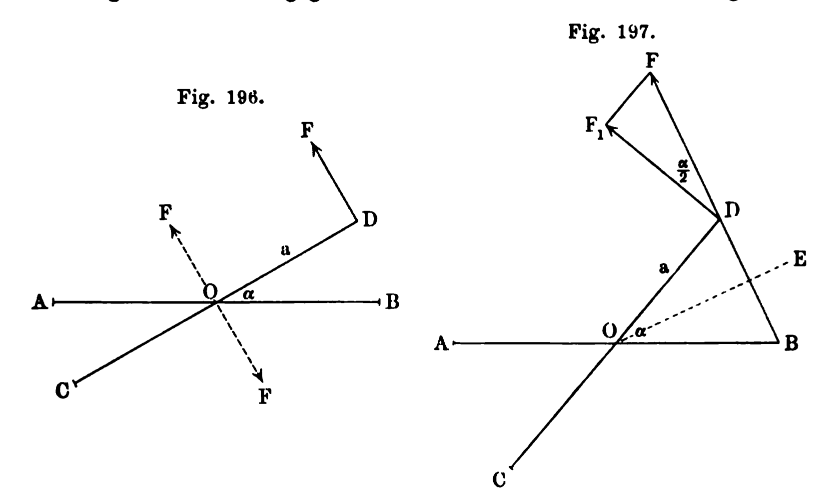
Fig. 184.

wägende Last wird auf die Brücke AA, die Gewichte auf C gebracht. Brücke und Wagschale sind miteinander durch ein System von Hebeln verbunden, so dafs Gleichgewicht eintritt, wenn das wahre Gewicht des Körpers zehnmal gröfser ist als das Gewicht der Gewichtstücke, auf

aufgehoben und ruft nur eine kleine seitliche Verschiebung des Punktes O hervor, die andere Kraft bildet mit DF ein Kräftepaar, dessen Moment gleich Fa ist. Damit das Stäbchen im Gleichgewicht bleibt, müssen wir $Fa = C\varphi$ haben, woraus sich ergiebt

$$F = \frac{C}{a}\varphi \quad \dots\dots\dots \quad (26)$$

Einen anderen Fall haben wir vor uns, wenn die Kraft F in der Richtung der Verbindungsgeraden der Punkte B und D wirkt (Fig. 197),



d. h. wenn sich in B ein Körper befindet, welcher das Ende D des Stäbchens abstöfst. Sei F_1 die Komponente der Kraft F, welche senkrecht zu OD wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichts ist jetzt $F_1 a = C\varphi$; es ist aber $F_1 = F\cos\frac{\alpha}{2}$, weil $OE \perp DB$, also $\angle FDF_1 = \angle EOD$ ist, als Winkel mit zu einander senkrechten Schenkeln. Wir haben folglich $Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi$ und hiernach

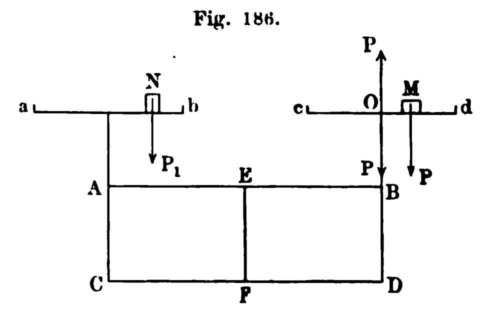
$$F = \frac{C\varphi}{a\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (27)$$

Nehmen wir an, es solle das Verhältnis der beiden Kräfte F und F' gefunden werden, welche das Stäbchen um α und α' drehen, während die ganzen Drehungswinkel φ und φ' seien; wir haben dann aufser (27) noch die Gleichung $F' = \frac{C\varphi'}{a\cos\frac{\alpha'}{2}}$, mithin für das Verhältnis

Wir wollen uns auf obige Beschreibung einer Decimalwage älterer Konstruktion beschränken, ohne auf die zahlreichen, für technische Zwecke und im Handel gebräuchlichen Decimalwagen mit verschiedenen Abänderungen einzugehen.

II. Die Robervalsche Wage wird da benutzt, wo es auf grofse Genauigkeit nicht ankommt. Ihre äufsere Gestalt wird als bekannt vorausgesetzt; ihre Konstruktion ist in Fig. 186 schematisch dargestellt. Zwei kleine Stangen AB und CD von gleicher Länge drehen sich um die festen Punkte E und F. Die gleichlangen Stäbe AC und BD sind mit ihnen durch vier Scharniere verbunden; auf ihren Verlängerungen sitzen die Schalen ab und cd. Wenn das ganze System um die Punkte E und F schwingt, so nimmt das Rechteck $ABCD$ die Gestalt eines Parallelogramms an, wobei die Stäbe AC und BD der festen Linie EF parallel, mithin vertikal bleiben, und die Schalen somit ihre horizontale Lage beibehalten. An welche Stelle der Schalen wir auch den Körper M legen mögen, dessen Gewicht gleich P sei, seine Wirkung auf das ganze Hebelsystem ist eine derartige, als ob die Kraft P ihren Angriffspunkt in O hätte, d. h. unmittelbar auf die Stange BD wirkte. Bringen wir nämlich in O noch zwei Kräfte P (vergl. Fig. 186) an, so bilden die nach oben gerichtete Kraft P und das Gewicht des Körpers P ein Kräftepaar, welches die Wagschale zu drehen sucht. Die Wirkung dieses Kräftepaares wird durch den Widerstand der Punkte E und F aufgehoben, welche die Wagschale daran hindern, sich anders als parallel zu sich selbst zu verschieben. Somit bleibt nur die nach unten gerichtete Kraft OP übrig. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dafs die Lasten M und N sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre Gewichte P und P_1 untereinander gleich sind, an welcher Stelle der Wagschalen sie sich auch befinden mögen.

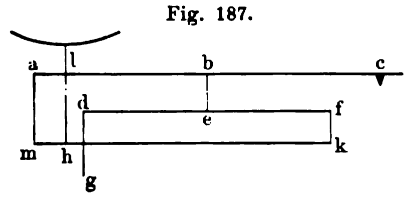
Fig. 186.



Wir wollen noch auf eine andere Art beweisen, dafs im Falle des Gleichgewichts $P = P_1$ ist. Nehmen wir an, die Belastungen P und P_1 sind, wie in Fig. 186, unsymmetrisch aufgelegt und halten sich das Gleichgewicht. Neigt man die Wage nach links, so hebt sich das Gewicht P auf der rechten Seite um einen kleinen Betrag h, während sich das linke um h senkt. Die hierbei von der Schwerkraft geleistete Arbeit ist $P_1 h - Ph$; diese Arbeit aber mufs, wenn sich das ganze System unter Einwirkung der Schwerkraft im Gleichgewicht befindet, gleich Null sein. Aus $P_1 h - Ph = 0$ folgt $P = P_1$.

In Fig. 187 ist die Konstruktion einer Wage mit **kompliziertem** Bau angedeutet und zwar ist bloſs die linke Hälfte derselben abgebildet; die Stützpunkte liegen in *c* und *g*; in *d*, *e*, *f*, *k*, *m*, *a* und *b* befinden sich Scharniere. Auch hier bleibt der Stab *hl*, welcher die Wagschale trägt, in vertikaler Stellung, während *ac* um *c* schwingt, daher heben und senken sich die Wagschalen in horizontaler Lage.

Fig. 187.



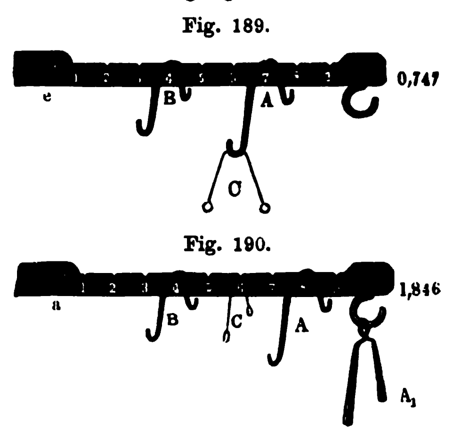
III. Die Westphalsche Wage, auch einarmige Wage genannt, eine Bezeichnung, die nicht zutreffend ist, dient zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten, wir kommen deshalb später

Fig. 188.



noch auf sie zurück (im fünften Abschnitt, Kapitel II, § 5). An dieser Stelle soll nur eine Beschreibung des in Fig. 188 abgebildeten Apparates gegeben werden. Der Hebel *KHh* schwingt um die Schneide eines Prismas in *H*. Der Arm *Hh* ist in 10 Teile geteilt; unmittelbar

über den Teilstrichen befinden sich kleine Einschnitte, welche ebenso wie der Haken h dazu dienen, die bügelförmigen Gewichte, wie sie in A_1, A_2, B und C abgebildet sind, in bequemer Weise am Hebelarme anzubringen. A_1 und A_2 haben dasselbe Gewicht, B hat 0,1 und C 0,01 des Gewichts von A_1. Das Gewicht von A_1 stellt die Gewichtseinheit dar. Hiernach ist ersichtlich, dafs die in Fig. 189 dargestellte Belastung 0,747, die in Fig. 190 dargestellte 1,846 Gewichtseinheiten entspricht. Der kleine Cylinder K dient als Gegengewicht; die Gleichgewichtslage wird dadurch bestimmt, dafs die an K befestigte Spitze der Spitze bei J genau gegenüberstehen mufs. Mit Hülfe der Schraube P kann man den Wagebalken JHh höher oder niedriger stellen. Eine Fufsschraube dient zur Horizontalstellung des Wagebalkens. Wir werden später sehen, wie man die Gewichte auswählt, um die Dichte von Flüssigkeiten bequem bestimmen zu können. Die Wage kann auch zur Ermittelung des Gewichtes dienen, welches dann aber durch die Einheit ausgedrückt wird, welcher das Gewicht von A_1 gleich ist. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Belastungen, welche die Wage ins Gleichgewicht bringen, wenn der Körper an h befestigt ist, und wenn dies nicht der Fall ist. Die Differenz dieser beiden Belastungen giebt das gesuchte Gewicht des Körpers. Zur gröfseren Bequemlichkeit vermehrt man bisweilen die Zahl der Gewichtstücke, die man der Wage beigiebt.



§ 9. **Dynamometer.** Dynamometer heifsen Apparate, die zur Messung von Kräften dienen; die Kräfte wirken unmittelbar auf den Apparat ein, rufen in ihm bestimmte Formenänderungen hervor und veranlassen das Auftreten elastischer Gegenkräfte, welche die ursprüngliche Form wieder herzustellen suchen.

Eine weitere Formenänderung unterbleibt, wenn die gesuchte, von aufsen wirkende Kraft die inneren elastischen Kräfte im Gleichgewicht hält, die mit zunehmender Formenänderung ebenfalls zunehmen; die Formenänderung des Apparates kann daher als Mafs für die angreifende Kraft dienen.

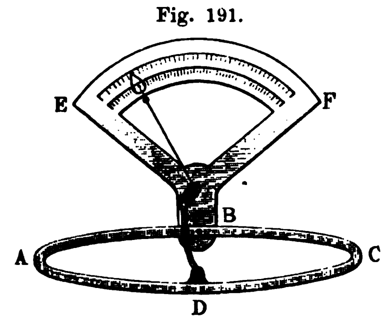
Zur Kalibrierung des Dynamometers läfst man auf ihn eine Reihe von Kräften von bekannter Intensität wirken oder einfacher eine Reihe von Gewichten, z. B. 1, 2, 3 Gramm resp. Kilogramm, je nach der Be-

schaffenheit und Bestimmung des Dynamometers, wobei man die hierdurch hervorgerufenen Formenänderungen markiert. Es ist ohne weiteres klar, dafs ein kalibriertes Dynamometer auch zur Gewichtsbestimmung von Körpern dienen und somit eine Wage ersetzen kann, nur kann es sich in Bezug auf die Genauigkeit seiner Angaben mit letzterer nicht vergleichen.

Die gewöhnliche Federwage ist ein Beispiel eines einfachen Dynamometers.

Es existiert eine sehr grofse Zahl verschiedenartiger Dynamometer, welche eine bogenförmige Feder enthalten; eines derselben ist in Fig. 191 abgebildet. Man läfst die Feder von der gesuchten Kraft zusammendrücken, d. h. beide Hälften ABC und ADC einander näher bringen. Wie die Figur zeigt, wirkt ADC auf den einen Arm eines gebrochenen Hebels, während der andere Arm aus einem Zeiger besteht, dessen Spitze sich längs dem Skalabogen EF bewegen kann. Die eine Hälfte der Feder mufs befestigt werden. Man kann übrigens den Apparat auch in C befestigen und die Kraft auf A in der Richtung der Geraden CA wirken lassen.

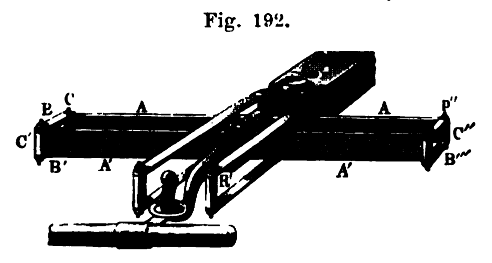
Fig. 191.



Entfernen sich A und C voneinander, so nähern sich B und D und wird der Zeiger in Bewegung versetzt. Auf dem Bogen EF sind zwei Skalen aufgetragen, entsprechend den beiden verschiedenen Gebrauchsanwendungen des Apparates.

Gröfsere Genauigkeit erzielt man mit dem Dynamometer von Poncelet und Morin, das in Fig. 192 dargestellt ist. Zwei stählerne Lamellen AA und $A'A'$ sind miteinander durch die Scharniere C, C', C'' und C''' verbunden, um welche sich ihre Enden drehen können, wenn die Lamellen selbst sich biegen. Die Lamelle AA ist befestigt, an der anderen befindet sich ein Haken zum bequemen Anbringen der Kraft (eines Gewichtes, eines vorgespannten Pferdes u. s. w.). Aufserdem ist mit $A'A'$ ein Zeichenstift, der sich in R befindet, verbunden; dieser zeichnet auf einem Papierstreifen eine kleine Linie, deren Länge als Mafs der gesuchten Kraft dient. Es ist nämlich die angreifende Kraft sehr nahe proportional der Verschiebung des Punktes R. Man hat blofs ein für

Fig. 192.



allemal zu bestimmen, welcher Länge der Verschiebungslinie eine bestimmte Kraft — etwa 100 kg — entspricht, um den Apparat ohne weiteres benutzen zu können. Ein Vorlesungsdynamometer ist von N. A. Hesehus[1]) konstruiert worden.

§ 10. Unifilare Drehwage. Dieser wichtige Apparat dient zum Messen von Anziehungs- oder Abstofsungskräften, welche in verschiedenen Fällen zwischen den Körpern auftreten (allgemeine Anziehung, Anziehung und Abstofsung von Magneten oder elektrisirten Körpern). In Fig. 193 (a. f. S.) ist eine der vielen verschiedenartigen Formen der unifilaren Drehwage dargestellt, die bisweilen keinen gesonderten Apparat, sondern blofs einen Teil anderer komplizierterer Instrumente bildet.

Der wichtigste Teil der Drehwage ist ein horizontaler Körper, gewöhnlich von der Form eines Stäbchens. Er hängt an einem dünnen Faden, der oberhalb seines Schwerpunktes befestigt ist. Der Faden kann durch einen Metalldraht ersetzt sein (etwa aus Aluminium, Silber, Platin), sonst besteht er aus einem Cocon- oder Glasfaden; in letzterer Zeit hat man Quarzfäden benutzt (nach dem Vorschlage des englischen Physikers Boys). Der horizontale Körper selbst kann, je nach den Messungen, für welche die Drehwage bestimmt ist, sehr verschieden gestaltet sein: entweder ist er ein leichtes Stäbchen, das an einem oder beiden Enden Kügelchen trägt, oder ein Magnet oder eine flache längliche Lamelle u. s. w. Dieser Körper befindet sich in einem viereckigen oder cylindrischen Glasgefäfs, während der Faden durch eine vertikale Röhre hindurchreicht, die im Deckel des Glasgefäfses befestigt ist. Im Deckel ist noch eine Öffnung a angebracht, durch welche man einen Körper (Magnet, elektrisiertes Kügelchen) einführen kann, dessen Abstofsung auf das horizontale Stäbchen gemessen werden soll.

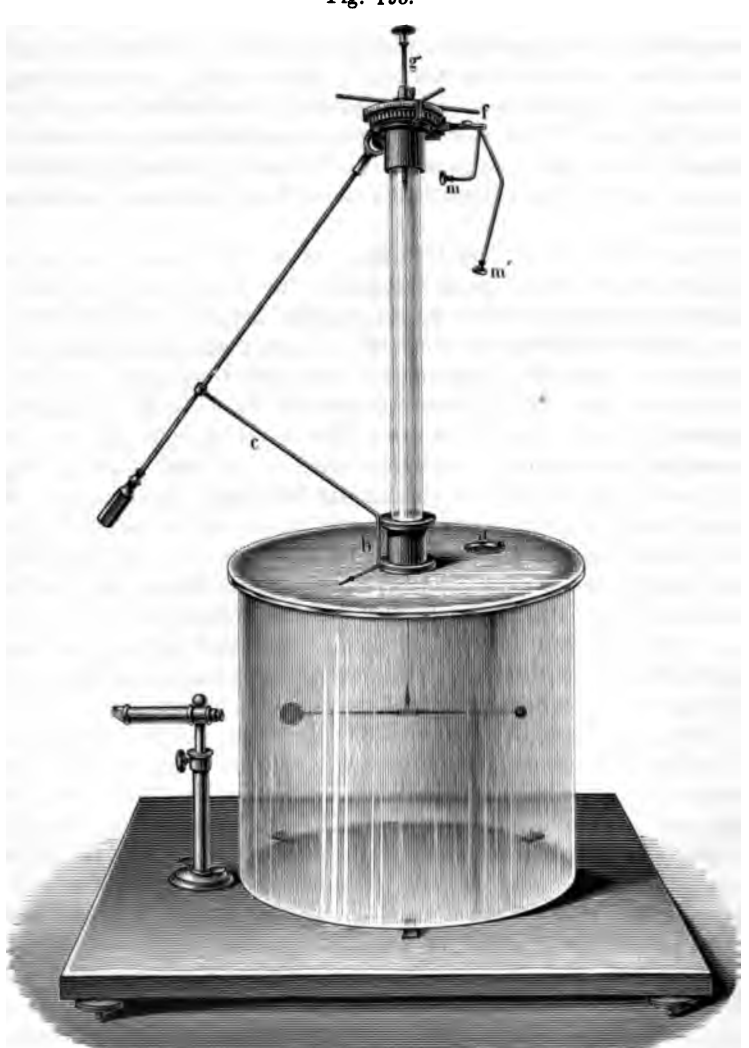
Das obere Ende des Fadens ist in der Mitte des Deckels der vertikalen Röhre befestigt. Dieser Deckel kann um mefsbare Winkel gedreht werden; aufserdem existiert gewöhnlich noch eine Vorrichtung zum Heben oder Senken des Fadens. In Figur 194 (S. 359) ist der obere Teil der Röhre in vergröfsertem Mafsstabe abgebildet. Der Faden ist am Stabe g (Fig. 193) befestigt, welcher gehoben, gesenkt, gedreht und in gehöriger Lage mittels einer Klemmschraube, die auch in der Figur sichtbar ist, befestigt werden kann. Der obere Teil der Röhre ist von einer Messingfassung umgeben, an deren festem Teile der Index d befestigt ist. Der Rand des beweglichen Teiles besteht aus zwei Hälften; die obere Hälfte ist in Gerade geteilt, die untere ist mit Zähnen versehen, in welche die endlose, mittels eines Hookeschen Schlüssels aus einiger Entfernung in Bewegung zu setzende Schraube hineingreift. Will man

[1]) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **17**, 59, 1885.

den beweglichen Teil schnell um einen gröfseren Winkel drehen, so rückt man die endlose Schraube mit Hülfe des Griffes *m*, der auf eine besondere excentrische Scheibe wirkt, vom Zahnrade ab und dreht den Deckel an den Stäben *ff* um den gewünschten Winkel.



Fig. 193.

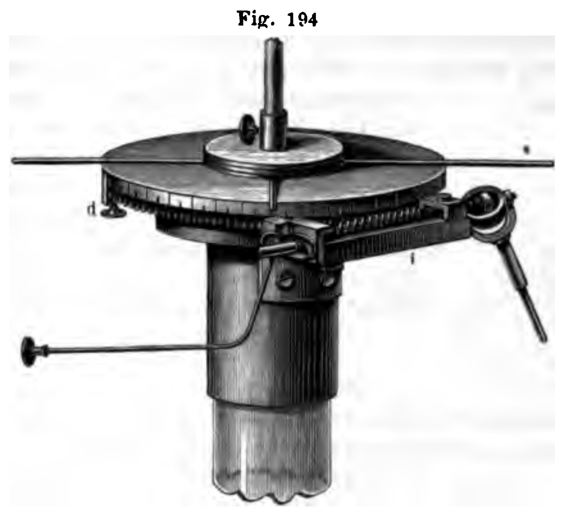


Das horizontale Stäbchen dreht sich während der Messungen um den Faden, an welchem es aufgehängt ist, und kann man den Winkel dieser Drehung messen. Bei einigen Apparaten ist ein Streifen mit

Gradteilung von aufsen auf das Glasgehäuse geklebt oder es ist der Glasdeckel mit einer Kreisteilung versehen. Indem man von der Seite oder von oben her visiert, erhält man einen angenäherten Wert für den Drehungswinkel. Bei genaueren Mefsinstrumenten ist der bewegliche Teil mit einem kleinen Spiegel versehen und wird der Drehungswinkel nach der Spiegelablenkungsmethode (vergl. S. 320) bestimmt. Kleine Drehungen können auch von aufsen vermittelst eines Fernrohres direkt beobachtet werden (s. Fig. 193).

Sind Faden und Stäbchen (das jedoch keine Magnetnadel sein darf) sich selbst überlassen, so nimmt das Stäbchen eine bestimmte

Fig. 194



Gleichgewichtslage an, welche dem Normalzustande des Fadens, in welchem derselbe völlig losgedreht ist, entspricht. Wird nun ein Ende des Fadens um einen gewissen Winkel tordiert, so befindet sich derselbe nicht mehr in seinem Normalzustande, — er ist eben tordiert und es entstehen in ihm innere elastische Kräfte, die den Normalzustand wieder herzustellen suchen, d. h. das untere freie Ende und den daran hängenden Körper zurückzudrehen suchen.

Auf dieses Ende und auf den Körper wirkt also nun ein Kräftepaar, dessen Moment wir mit M bezeichnen wollen. Je gröfser der Torsionswinkel φ ist, um so gröfser ist das Moment M des Kräftepaares. Für sehr dünne Drähte ist das Moment M dem Winkel proportional und bleibt diese Proportionalität für Winkel bis zu einigen Tausend Grad streng richtig.

Wir können mithin setzen

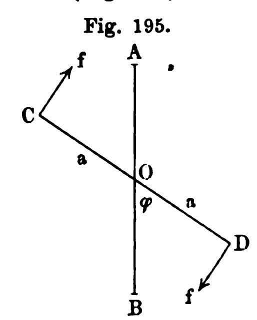
$$M = C\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

wo C dem Zahlenwert entspricht, welchen das Moment des Kräftepaares

annimmt, wenn das freie Fadenende um die Winkeleinheit (S. 44) tordiert wird. Um den Faden in dem Zustande zu erhalten, welchen er bei Drehung um den Winkel φ annimmt, muſs man auf ihn ein Kräftepaar wirken lassen, dessen Moment offenbar gleich dem Moment M der elastischen Kräfte ist. Hieraus folgt, daſs Formel (19) auch das Moment M des von auſsen wirkenden Kräftepaares bestimmt, welches man auf das freie Fadenende wirken lassen muſs, damit der Faden um den Winkel φ tordiert bleibt; C ist numerisch gleich dem Momente des Kräftepaares, welches eine Torsion um die Winkeleinheit bewirkt.

Den Zahlenwert des Koeffizienten C kann man aus der Schwingungsdauer T des aufgehängten Stäbchens finden, wenn man dasselbe zur Seite dreht und darauf sich selbst überläſst. Sei AB (Fig. 195) die Lage des Stäbchens, wenn der in O befestigte Faden vollkommen untordiert ist. Ist das Stäbchen um den Winkel φ gedreht und nimmt die Lage CD ein, so wirkt auf dasselbe ein Kräftepaar, dessen Moment $M = C\varphi$ ist. Dieses Kräftepaar kann man durch ein beliebiges Kräftepaar ff ersetzen, unter der Bedingung, daſs $2fa = M$ ist, wo $a = CO = OD$ ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (19), so kommt

Fig. 195.



$$f = \frac{C}{2a}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wo man rechts das Vorzeichen (—) setzen könnte, um anzudeuten, daſs f nach der Seite der abnehmenden Winkel φ wirkt. Somit wirkt auf die Hälfte OD des Stäbchens eine Kraft f, die dem Winkel φ proportional ist. Vergleicht man diesen Fall mit dem Fall sehr kleiner Schwingungen des physischen Pendels, so sieht man, daſs beide Fälle mechanisch miteinander identisch sind. Für das Pendel gilt allgemein die Relation $f = P\sin\varphi$, wo P sein Gewicht bedeutet; für sehr kleine Winkel φ gilt daher die Formel

$$f = P\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

(richtiger $f = -P\varphi$), welche zu dem Gesetz der isochronen Schwingungen führt. In unserem Falle ist f proportional φ auch für gröſsere Winkel; die Torsionsschwingungen der unifilaren Drehwage stellen daher ein bemerkenswertes Beispiel von Isochronismus dar: für kleine und groſse Ausschläge ist die Schwingungsdauer T die gleiche, wenn nur der Faden so dünn ist, daſs auch für seine Grenzlagen die Formel (19) in Geltung bleibt.

Für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels hatten wir die Formel

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

gefunden, wo K das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf seine Drehungsachse, P sein Gewicht und a der Abstand des Angriffspunktes der Kraft P (des Schwerpunktes) von der Drehungsachse bedeutet, vergl. (41) S. 253. Bezeichnet man nun mit K das Trägheitsmoment des ganzen Stäbchens AB in Bezug auf seine Drehungsachse (die Achse des Fadens) und wendet man (22) auf die Hälfte OD des Stäbchens an, so mufs man anstatt K jetzt $\frac{1}{2}K$ setzen. Nach (21) und (20) ist $P = \frac{f}{\varphi} = \frac{C}{2a}$.

Formel (22) giebt demnach

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}K}{\frac{C}{2a}a}} = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Hieraus erhält man

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Diese überaus wichtige Formel liefert den Koeffizienten C, d. h. das Moment des Kräftepaares, welches das untere Fadenende um die Winkeleinheit tordiert. Von den Methoden das Trägheitsmoment K eines Pendels zu bestimmen, wenn dasselbe nicht aus seiner geometrischen Form berechnet werden kann (S. 100), soll weiter unten (Kap. VII, § 4) die Rede sein. Eine analoge Herleitung liefert K für den horizontalen Teil der Drehwage.

Mit Hülfe der unifilaren Drehwage kann die Kraft F gemessen werden, welche auf eines der Enden des Stäbchens wirkt. Nehmen wir an, das Stäbchen befinde sich anfangs in Ruhe und der Faden sei untordiert. Ausgehend von dieser Lage rechnen wir den Drehungswinkel α des Stäbchens nach einer bestimmten Seite hin positiv. Tordieren wir dann aus irgend einem Grunde auch das obere Fadenende, so rechnen wir diesen Drehungswinkel β positiv in der Richtung, welche der positiven Richtung für α entgegengesetzt ist. In diesem Falle ist die Torsion φ des Fadens gleich

$$\varphi = \alpha + \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

das Moment des Kräftepaares aber, welches das Stäbchen in der Ruhelage erhält, ist gleich $C\varphi = C(\alpha + \beta)$. Sei nun AB (Fig. 196 a. f. S.) die ursprüngliche, CD die abgelenkte Stellung des Stäbchens und $\angle BOD = \alpha$. Die Kraft F wirke auf den Punkt D senkrecht zum Stäbchen, wobei $OD = a$ sei. Lassen wir an O zwei Kräfte F angreifen, die einander gleich und parallel zu DF sind. Eine derselben, welche die Richtung der Kraft DF hat, wird vom Gewichte des Stäbchens

aufgehoben und ruft nur eine kleine seitliche Verschiebung des Punktes O hervor, die andere Kraft bildet mit DF ein Kräftepaar, dessen Moment gleich Fa ist. Damit das Stäbchen im Gleichgewicht bleibt, müssen wir $Fa = C\varphi$ haben, woraus sich ergiebt

$$F = \frac{C}{a}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Einen anderen Fall haben wir vor uns, wenn die Kraft F in der Richtung der Verbindungsgeraden der Punkte B und D wirkt (Fig. 197),

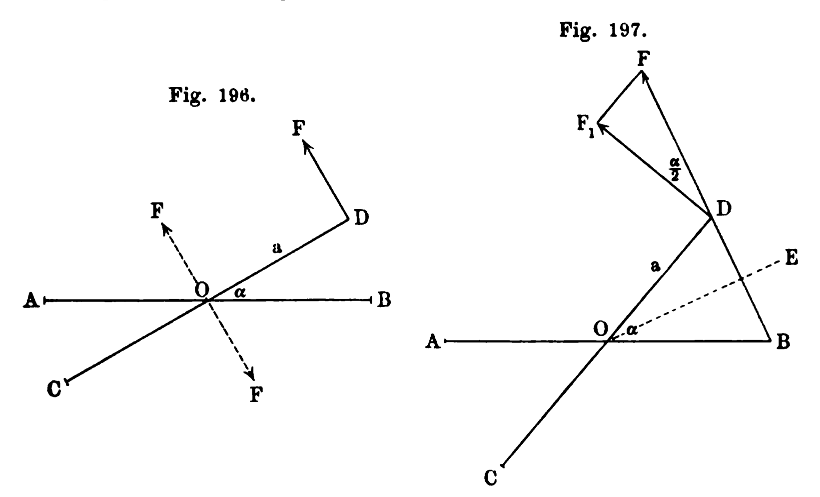


Fig. 196. Fig. 197.

d. h. wenn sich in B ein Körper befindet, welcher das Ende D des Stäbchens abstöfst. Sei F_1 die Komponente der Kraft F, welche senkrecht zu OD wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichts ist jetzt $F_1 a = C\varphi$; es ist aber $F_1 = F \cos\frac{\alpha}{2}$, weil $OE \perp DB$, also $\angle FDF_1 = \angle EOD$ ist, als Winkel mit zu einander senkrechten Schenkeln. Wir haben folglich $Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi$ und hiernach

$$F = \frac{C\varphi}{a\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Nehmen wir an, es solle das Verhältnis der beiden Kräfte F und F' gefunden werden, welche das Stäbchen um α und α' drehen, während die ganzen Drehungswinkel φ und φ' seien; wir haben dann aufser (27) noch die Gleichung $F' = \frac{C\varphi'}{a\cos\frac{\alpha'}{2}}$, mithin für das Verhältnis

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Wenn das obere Fadenende nicht tordiert wird ($\beta = 0$), so ist $\varphi = \alpha$ und $\varphi' = \alpha'$. Die Formeln (26), (27) und (28) sind unter der Voraussetzung erhalten worden, dafs aufser der Kraft F und dem Kräftepaar, das den Faden zurückzudrehen strebt, keine weitere Kraft oder kein Kräftepaar auf das Stäbchen einwirkt. Es giebt jedoch Fälle, wo bei Drehung des Stäbchens aufser dem Kräftepaar M noch ein weiteres Kräftepaar auftritt, welches ebenfalls das Stäbchen in die frühere Lage zurückzudrängen sucht, und wo das Moment M' dieses zweiten Kräftepaares eine Funktion des Winkels α ist. Solch ein Fall tritt ein, wenn das horizontale Stäbchen der unifilaren Drehwage eine Magnetnadel ist, also seine Ruhelage mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt. Wir werden sehen, dafs M' in diesem Falle proportional $\sin\alpha$ ist. Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht des Stäbchens nimmt jetzt im allgemeinen folgende Gestalt an

$$Fa\cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi + M' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Man kann bei Benutzung der Drehwage den Drehungswinkel φ beliebig grofs machen, indem man das obere Fadenende beispielsweise um ein Vielfaches von 360° dreht, wobei allerdings der Faden so dünn sein mufs, dafs Formel (19) auch dann noch in Geltung bleibt. Den Winkel α sucht man nicht gröfser als 60° zu machen.

Die Empfindlichkeit der Drehwage wird durch eine Gröfse, die umgekehrt proportional dem Koeffizienten C ist, bestimmt, denn je kleiner das Moment desjenigen Kräftepaares ist, welches eine bestimmte Drehung hervorruft, um so empfindlicher ist der Apparat. Auf hierher gehörige Einzelheiten soll an einer anderen Stelle eingegangen werden; hier sei nur bemerkt, dafs die Empfindlichkeit der Drehwage um so gröfser ist, je länger und dünner der Faden ist und je weniger sich seine Substanz der Drehung widersetzt. Alle hierher gehörigen genaueren Gesetzmäfsigkeiten sollen erst später betrachtet werden.

§ 11. **Die bifilare Drehwage.** Von der unifilaren Drehwage unterscheidet sich dieser Apparat nur dadurch, dafs das horizontale Stäbchen AB (Fig. 198 a. f. S.) hier an zwei Fäden CE und DF hängt, von denen wir im allgemeinen annehmen wollen, dafs sie einander nicht parallel sind.

Die Gleichgewichtsbedingung ist hier die, dafs AB sich in einer durch E und F gehenden Vertikalebene befinden mufs oder, was dasselbe bedeutet, dafs AB parallel EF sein mufs. Wenn man AB um

einen gewissen Winkel φ, um den Punkt O als Zentrum dreht (Winkel φ heifse der Analogie halber ebenfalls der Torsionswinkel), so heben sich die Punkte D und C, denn alle Punkte des Horizontalkreises vom Durchmesser CD stehen von F weiter ab als C und D. Somit hebt sich AB bei Tordierung des Doppelfadens, und dies sucht das Gewicht P des Stäbchens zu verhindern. Das tordierende Kräftepaar, dessen Moment wir mit M bezeichnen, wird mithin vom Gewichte P im Gleichgewicht gehalten. Den Einflufs der geringfügigen Tordierung der Fäden und ihres Gewichtes kann man vernachlässigen.

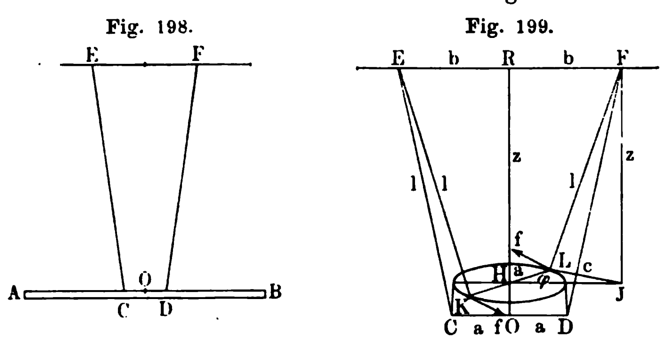


Fig. 198. Fig. 199.

Suchen wir die Gleichgewichtsbedingung für das Stäbchen AB, wenn dasselbe vom Kräftepaar M um den Winkel φ gedreht ist. In Fig. 199 ist der mittlere Teil CD des Stäbchens in normaler Stellung vergröfsert dargestellt; sei $CO = OD = a$, $ER = RF = b$, OHR eine vertikale Gerade und $CE = DF = l$ die Länge der Fäden.

Durch Einwirkung des Kräftepaares hat das Stäbchen die Lage KL erhalten, es hat sich um den Winkel $JHL = \varphi$ gedreht und um die Höhe OH gehoben. Wir ziehen nun durch F die vertikale Gerade FJ und verbinden die Punkte J und L miteinander; es sei $RH = FJ = z$ und $JL = c$; offenbar ist $HJ = b$ und daher

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

Ferner ist $\overline{FJ}^2 = \overline{FL}^2 - LJ^2$, d. h. $z^2 = l^2 - c^2$, folglich

$$z^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Das von aufsen wirkende Kräftepaar M denken wir uns durch zwei Kräfte f ersetzt, welche an L und K angreifen und zwar senkrecht zu KL, wobei $2af = M$ ist. Das Stäbchen befindet sich in der Lage KL im Gleichgewicht. Um einen Zusammenhang zwischen M und φ zu finden, nehmen wir an, das Stäbchen drehe sich noch weiter um den kleinen Winkel $\Delta\varphi$ und hebe sich hierbei über H hinaus um eine minimale Gröfse, die wir, da sich z vermindert, mit $-\Delta z$ bezeichnen wollen. Das Kräftepaar leistet bei dieser geringfügigen Drehung eine Arbeit gleich $M\Delta\varphi$ (S. 109), welche gleich der zum Heben der Last P auf die Höhe Δz aufgewandten Arbeit sein mufs.

Hieraus folgt

$$M \Delta \varphi = - P \Delta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Aus (30) erhält man

$$z \Delta z = - a b \sin \varphi . \Delta \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Für Leser, welchen die Differentialrechnung noch fremd ist, sei bemerkt, dafs (30) zunächst auf folgenden Ausdruck führt

$$(z + \Delta z)^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2 a b \cos (\varphi + \Delta \varphi).$$

Vernachlässigt man nun $(\Delta z)^2$ und setzt

$$\cos \Delta \varphi = 1; \qquad \sin \Delta \varphi = \Delta \varphi,$$

so ergiebt sich

$$z^2 + 2 z \Delta z = l^2 - a^2 - b^2 + 2 a b \cos \varphi - 2 a b \sin \varphi . \Delta \varphi.$$

Subtrahiert man hiervon den Ausdruck (30), so resultiert (32). Hieraus entnehmen wir jetzt Δz, setzen es in (31) ein und kürzen durch $\Delta \varphi$.

So erhalten wir

$$M = \frac{a b}{z} P \sin \varphi.$$

Die Gröfse OH, um welche das Stäbchen sich hebt, ist immer sehr klein, daher kann man in der letzten Formel l anstatt z setzen; dann ist

$$M = \frac{a b}{l} P \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

und im Falle, dafs die Fäden einander parallel sind ($b = a$)

$$M = \frac{a^2}{l} P \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor von $\sin \varphi$, der für die gegebene Drehwage mafsgebend ist, mit C, so kommt

$$M = C \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Vergleicht man diese Formel mit Formel (19), $M = C \varphi$, welche für die unifilare Drehwage galt, so sieht man, dafs das Moment des Kräftepaares, welches das Stäbchen zurückzuführen sucht, für die unifilare Drehwage proportional dem Torsionswinkel, für die bifilare Drehwage proportional dem Sinus des Torsionswinkels ist. Im weiteren ergiebt sich, dafs der Proportionalitätsfaktor von der Länge und gegenseitigen Lage der Fäden und dem Gewichte des Stäbchens abhängt. Die Empfindlichkeit der bifilaren Drehwage ist um so gröfser, je kleiner C ist; sie ist also proportional der Länge l der Fäden, indirekt proportional dem Produkte der Abstände der Fadenenden oder dem Quadrate des

Fadenabstandes bei parallelen Fäden und endlich indirekt proportional dem Gewicht des horizontalen Stäbchens.

Formel (35) zeigt, dafs M zugleich mit φ bis $\varphi = 90^0$ anwächst. Weiter darf man den Doppelfaden nicht tordieren, da sich sonst das Stäbchen im labilen Gleichgewichte befindet, sich bis um den Winkel $\varphi = 180^0$ drehen kann, wobei die beiden Fäden einander berühren und keinen Doppelfaden mehr bilden.

Der Doppelfaden befindet sich, ebenso wie der einfache Faden der unifilaren Drehwage, in einem Glasgehäuse resp. einer Glasröhre, deren Deckel gedreht werden kann. Haben α, β und φ dieselbe Bedeutung wie früher, so ist wiederum [vergl. (25)] $\varphi = \alpha + \beta$. Wirkt auf das Stäbchen eine Kraft F (vergl. Fig. 196), senkrecht zu demselben mit einem Angriffspunkt in der Entfernung a von der Mitte des Stäbchens [es ist dieses a nicht dasselbe wie in (32) und (34)], so haben wir statt (26) die folgende Beziehung

$$F = \frac{C}{a} \sin \varphi \quad \cdots \cdots \quad (36)$$

Hat jedoch die Kraft F die Richtung der Verbindungsgeraden zwischen der Anfangslage und der neuen Lage desjenigen Punktes des Stäbchens, welches von seinem Mittelpunkte um a absteht, so haben wir an Stelle von (27)

$$F = \frac{C \sin \varphi}{a \cos \frac{\alpha}{2}} \quad \cdots \cdots \quad (37)$$

Für das Verhältnis der beiden Kräfte erhalten wir analog (28):

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad \cdots \cdots \quad (38)$$

Der Drehungswinkel α kann, wie bei der einfachen Drehwage, gemessen werden mittels einer am Glasgehäuse oder auf dem Deckel des Gehäuses angebrachten Skala, oder nach der Methode der Spiegelablenkung. Der Koeffizient C in Formel (35) kann auch bei der bifilaren Drehwage durch Beobachtung der Schwingungsdauer T gefunden werden. Lenkt man das Stäbchen um einen gewissen Winkel aus der Ruhelage ab und überläfst es sodann sich selbst, so gerät dasselbe in Schwingungen, wobei es sich in jedem gegebenen Augenblick unter der Wirkung eines Kräftepaares befindet, dessen Moment $M = C \sin \varphi$ ist. Denkt man sich dieses Kräftepaar durch zwei Kräfte f (Fig. 195, S. 360) ersetzt, wobei $2fa = M$ ist, so erhält man

$$f = \frac{C}{2a} \sin \varphi \quad \cdots \cdots \quad (39)$$

Für das Pendel war $f = P \sin \varphi$, somit ist das Schwingungsgesetz der bifilaren Drehwage identisch mit dem Schwingungsgesetze des Pendels. Hieraus folgt, dafs, im Gegensatze zur einfachen Drehwage, die Schwingungen der bifilaren Drehwage nur für sehr kleine Amplituden isochron sind. Setzt man in Formel (22), wie früher, $\frac{K}{2}$ anstatt K und $\frac{C}{2a}$ anstatt P, vergl. (39), so erhält man wiederum

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{C}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

wo K das Trägheitsmoment des ganzen Stäbchens in Bezug auf seine Drehungsachse und F die Schwingungsdauer für sehr kleine Amplituden ist. Wenn auf das Stäbchen aufser dem Gewichte P, welches das Moment $C \sin \varphi$ hervorruft, noch ein Kräftepaar wirkt, welches das Stäbchen in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt und das Moment M' hat, so ist die Gleichgewichtsbedingung für die bifilare Drehwage entsprechend (29)

$$Fa \cos \frac{\alpha}{2} = C \sin \varphi + M' \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Siebentes Kapitel.

Messung der Zeit.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über Zeitmessung. Die Zeitmessung kann zweierlei Art sein: entweder hat man die „wahre Zeit“ zu finden, d. h. den Zeitpunkt, wo irgend eine Erscheinung auftritt, oder — die Gröfse des Zeitintervalls, welches zwischen zwei Momenten liegt. Streng genommen bestimmen wir auch im ersten Falle ein gewisses Zeitintervall, nämlich das Intervall von einem nicht selbstgewählten und willkürlichen, sondern allgemein festgesetzten Zeitpunkt, von dem an die Zeitrechnung beginnt (Jahr, Monat, Datum, ferner Stunde, Minute und Sekunde von der letzten unteren Kulmination der mittleren Sonne gerechnet) bis zu dem Zeitpunkte, dessen „wahre Zeit“ wir suchen. Indessen sind die Bedingungen, denen die Apparate in diesen beiden Fällen genügen müssen, durchaus verschieden. Bei den Messungen der ersten Art braucht man Uhren, welche die wahre Zeit mit grofser Genauigkeit ergeben oder für welche die Korrektion wohl bekannt ist, durch deren Anbringung man aus den fehlerhaften Angaben der Uhren die wahre Zeit finden kann. Im

zweiten Falle braucht man nur eine richtige Zählvorrichtung, während die von derselben angegebene Zeit auch unrichtig sein kann. Messungen erster Art kommen in der Physik relativ selten vor, sie spielen eine Hauptrolle bei astronomischen Messungen. In der Meteorologie wird auch die wahre Zeit registriert, doch genügen hierfür die Angaben einer „richtig gehenden“ gewöhnlichen Uhr; nur selten, etwa bei Beobachtung von magnetischen Gewittern, Erdbeben u. s. w. ist eine genaue Kenntnis der wahren Zeit erforderlich.

Als Zeiteinheit wird die Sekunde benutzt, d. h. der 86400 Teil der Dauer eines mittleren Sonnentages. Ein Sterntag enthält nur 86164,091 Sekunden. Zur Zeitmessung ist ein Apparat erforderlich, bei welchem irgend eine periodische Bewegung vor sich geht, deren Periodendauer entweder gleich einer Sekunde oder gleich einem einfachen Teil oder Vielfachen einer Sekunde ist. Beispiele derartiger Apparate sind die Pendeluhren, Taschenuhren, gröfsere Uhren in horizontalen Gehäusen u. s. w. Uhren mit besonders genauem Gange, bei denen also die Dauer einer Schwingung möglichst konstant ist, heifsen Chronometer. Man unterscheidet Uhren mit Federwerk und mit Gewichten (Sonnen-, Sanduhren u. dergl. sollen hier nicht betrachtet werden). Die Uhren müssen aufgezogen werden und man hat es sich zur Regel zu machen, die Uhren mit Federwerk in gleichen Zeitintervallen aufzuziehen, etwa alltäglich um dieselbe Stunde.

Die Uhren, welche zur Zeitmessung bei physikalischen Arbeiten dienen, müssen ganze oder halbe Sekunden laut angeben. Der Beobachter notiert sich zunächst das Datum, Stunde und Minute und zählt darauf für sich die Sekunden, während er zugleich seine Aufmerksamkeit darauf konzentriert, die Momente aufzufassen, wo zunächst die eine und danach die andere der Erscheinungen auftritt, zwischen denen das Zeitintervall gemessen werden soll. Bei einiger Übung gelingt es, selbst Zehntel einer Sekunde nach dem Gehör zu bestimmen, falls die beobachteten Erscheinungen recht plötzlich auftreten. In diesem Falle dient die Uhr als Registrierapparat.

Es giebt besondere, recht bequeme Mechanismen, die dazu dienen, das Zeitintervall zwischen den Momenten A und B des Entstehens zweier Erscheinungen oder der Dauer einer Erscheinung (dann bedeutet A den Beginn, B das Ende derselben) zu bestimmen. Es sind das Taschenuhren mit einem besonderen Zeiger, der in der Minute einen vollen Umlauf um das in 300 Teile (entsprechend je 0,2 Sekunden) geteilte Zifferblatt ausführt. Beim Druck auf einen Knopf stellt sich der Zeiger auf den Nullpunkt der Kreisteilung ein; drückt man abermals (im Momente A), so beginnt der Zeiger zu rotieren, drückt man zum drittenmale (im Moment B), so wird er angehalten. Der von diesem Zeiger durchlaufene Weg bestimmt das gesuchte Zeitintervall. Drückt man zum vierten Male auf den Knopf, so springt der Zeiger

wiederum auf den Nullpunkt der Kreisteilung über. Es giebt auch kompliziertere Registriervorrichtungen mit zwei Zeigern, die in gewissen Fällen von grofsem Nutzen sind.

Zu den Zeitzählern gehört auch das bekannte Metronom, welches bisweilen, wenn es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, auch bei physikalischen Versuchen benutzt wird.

Die zu physikalischen Arbeiten dienenden Wanduhren haben meist ein Sekundenpendel, d. h. ein Pendel, dessen Schwingungsdauer gleich einer Sekunde ist. Die Bewegungen des Pendels werden durch den Zug eines gehobenen Gewichtes aufrecht erhalten, oder durch eine aufgewickelte Feder, oder endlich durch leichte Stöfse eines anderen Sekundenpendels, wobei man sich elektrischer Ströme zur Übertragung der Stöfse bedient. Solche Uhren heifsen elektrische.

Einen vollkommen richtigen Gang des Pendels zu erreichen ist eine sehr schwierige Aufgabe. Unter anderen hat Lippmann [1]) eine geistreiche Methode zur elektrischen Übertragung der Pendelbewegung erdacht, bei welcher keinerlei Störungen in der Bewegung des Pendels entstehen.

Die Temperatur hat einen grofsen Einflufs auf den Gang der Uhr; so nimmt z. B. bei Temperaturzunahme auch die Pendellänge zu, infolgedessen die Schwingungsdauer sich vergröfsert (die Uhr nachgeht). Um den Einflufs der Temperatur zu eliminieren (Kompensation), giebt man dem Pendel eine derartige Konstruktion, dafs sein Schwingungszentrum bei Temperaturänderung selbst unverändert bleibt. Ein solches Pendel heifst Kompensationspendel. In Fig. 200 ist ein oft gebrauchtes sogen. Rostpendel abgebildet: an der federnden Lamelle ist ein horizontaler Träger *ab* befestigt, an dessen Ende zwei Stahlstäbe *R* geschraubt sind. Diese sind unten an einem zweiten Träger *fg* befestigt, auf den zwei Messingstäbe *T* geschraubt sind. Ein dritter horizotaler Träger *cd* verbindet die Enden der Messingstäbe und trägt in der Mitte einen Stahlstab *S*, an welchem sich die Linse befindet. Nimmt

Fig. 200.



[1]) Journ. de phys. 1896, p. 429.

die Temperatur zu, so senkt sich die Linse, da sich die drei parallelen Stahlstäbe verlängern und hebt sich zugleich durch Ausdehnung der beiden Paare Messingstäbe. Der Koeffizient der thermischen Ausdehnung des Messings ist jedoch 1,74 mal gröfser als derjenige des Stahls. Giebt man den Stäben eine entsprechende Länge, so kann man es erreichen, dafs das Schwingungszentrum fast vollkommen unbeweglich bleibt, folglich auch die Schwingungsdauer sich bei Änderung der Temperatur nicht ändert. Statt Stahl und Messing können Eisen und Zink genommen werden.

Fig. 201.



In Fig. 201 ist ein anderes Kompensationspendel abgebildet; dasselbe besteht aus einem Stabe RR, an welchem ein Glascylinder MM mit Quecksilber hängt. Die thermische Ausdehnung des Quecksilbers ist gröfser als diejenige des Glases, infolgedessen hebt sich das Niveau des Quecksilbers bei Temperatursteigerung und kompensiert auf diese Weise die Verlängerung des Stahlstabes.

Die Gröfse des Luftdruckes hat ebenfalls einen, wenn auch sehr geringen Einflufs auf die Schwingungsdauer des Pendels [1]).

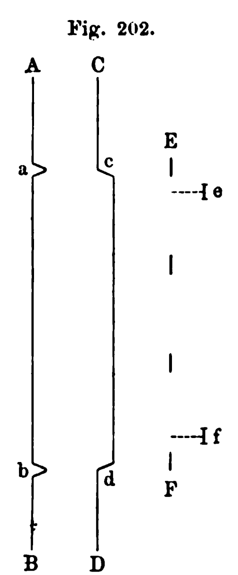
§ 2. Chronographen. Chronographen nennt man Apparate, welche die Zeitpunkte für gewisse Erscheinungen notieren (registrieren), und es somit ermöglichen, die Intervalle zwischen diesen Zeitpunkten zu bestimmen. Die Registrierung erfolgt gewöhnlich auf einem Papierstreifen, der sich der Länge nach vorwärts bewegt, etwa in der Art, wie beim Morseschen Telegraphenapparate — oder auf einem rotierenden und in der Richtung der Achse fortschreitenden Cylinder. Die Bewegung des Papierstreifens resp. der Cylindertrommel wird durch ein Uhrwerk bewirkt; bisweilen wird auch die Cylindertrommel mit der Hand gedreht. Die Zeichen auf dem Papierstreifen werden mit Hülfe einer Nadel, eines Bleistiftes oder einer Feder mit farbiger Tinte hervorgebracht, bisweilen auch durch einen Induktionsfunken, der von einer Spitze auf einen kleinen unter dem Papierstreifen befindlichen Metallstreifen überspringt und ein kleines Loch im Papierstreifen hinterläfst. Die Bewegung der Nadel u. s. w. bewirkt ein Elektromagnet. Der Induktionsfunke wird hierbei durch plötzliches Öffnen des galvanischen Stromes, der auf den Elektromagneten wirkt, hervorgebracht. Das Schliefsen und Öffnen des Stromes wird entweder vom Beobachter

[1]) Vergl. Tisserand, Compt. rend. **122**, 646, 1896.

selbst im entsprechenden Moment vorgenommen oder geschieht automatisch, indem beispielsweise eine abgeschossene Flinten- oder Kanonenkugel beim Verlassen des Geschützes den stromführenden Draht zerreifst.

Die in der Regel metallische Oberfläche der Cylindertrommel schwärzt man mit einer dünnen Rufsschicht, nachdem sie zuvor mit Fett oder Vaselin eingerieben worden, oder bestreut sie mit Hexenmehl. Die Zeichen auf dieser Oberfläche werden dann von einer Spitze oder einem elektrischen Funken hervorgebracht. Bisweilen überzieht man auch die Trommel mit einem Papierstreifen, auf welchem dann in der weiter oben angegebenen Weise Zeichen erhalten werden; den Streifen kann man nachher abnehmen und aufbewahren. Hat die Trommel blofs eine rotierende Bewegung, so mufs die Schreibvorrichtung sich parallel zur Trommelachse verschieben können, damit die Zeichen nicht an derselben Stelle entstehen, wenn die Trommel einen vollen Umlauf gemacht hat. Ist die Schreibvorrichtung unbeweglich, so mufs sich die Trommel auf einer Schraubenachse seitlich verschieben können, so dafs die aufgezeichneten Linien oder Zeichen sich in einer schraubenförmigen Linie anordnen. Es giebt auch Chronographen, bei denen die Cylindertrommel unbeweglich ist und die Schreibvorrichtung sich um sie herumbewegt. Das Aufzeichnen mittels einer Spitze kann in verschiedener Weise geschehen:

Fig. 202.



1. Der Zeichenstift steht ein wenig von der Trommeloberfläche ab und berührt dieselbe nur in den zu markierenden Momenten auf einen Augenblick. Dann entstehen vereinzelte Punkte oder ganz kurze Striche, deren gegenseitiger Abstand als Mafs des gesuchten Zeitintervalls dient. Läfst man die Berührung während des gesuchten Zeitintervalls andauern, so entsteht ein längerer Strich, dessen Länge das Mafs für das Intervall liefert.

2. Der Stift berührt die Trommel und entfernt sich dann von ihr in bestimmten Augenblicken oder im Laufe einer gewissen Zeit; hier dienen die Lücken in der Linie zur Bestimmung des gesuchten Zeitintervalls.

3. Der Stift berührt die Trommeloberfläche und wird in bestimmten Augenblicken oder während eines gewissen Zeitraumes zur Seite bewegt. Es entstehen in diesem Falle Linien in der Art von AB oder CD (Fig. 202); das gesuchte Zeitintervall wird durch die Länge von ab resp. cd bestimmt.

Hat man nach einer der obigen Methoden auf der Cylindertrommel des Chronographen Zeichen erhalten, welche ein bestimmtes Zeitintervall markieren, so muſs man ferner bestimmen, welche Entfernung der Zeichen einer Sekunde entsprechen. Hierzu dienen die folgenden Methoden:

1. Es ist die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel bekannt; ihr Grundflächenradius sei gleich R und die Zahl der Umdrehungen in einer Sekunde gleich n; in diesem Falle ist (wenn man die Neigung der Schraubenlinie unbeachtet läſst) die einer Sekunde entsprechende Länge gleich $2\pi n R$.

2. Man hat eine Uhr mit Sekundenpendel, welche bei jeder Schwingung des letzteren einen elektrischen Strom für einen Moment schlieſst oder öffnet; dieser Strom wirkt auf einen zweiten Zeichenstift, der sich neben dem ersten befindet und auf dem Papierstreifen resp. der Trommel nach einer der vorherbeschriebenen Methoden die um je eine Sekunde voneinander abstehenden Zeitpunkte markiert. In Fig. 202 (a. v. S.) entsprechen die vier Striche zwischen E und F den einzelnen Sekunden, die Striche e und f dagegen den gesuchten Zeitpunkten, die, wie man sieht, um $2{,}7 - 0{,}2 = 2{,}5$ Sekunden voneinander abstehen.

3. Auf einem rotierenden Cylinder wird durch einen an der Zinke einer Stimmgabel mit bekannter Schwingungszahl befestigten Stift eine Wellenlinie aufgezeichnet. In Fig. 203 ist der Cylinder nebst Schraubenachse und Stimmgabel K abgebildet, der Zeichenstift

Fig. 203.

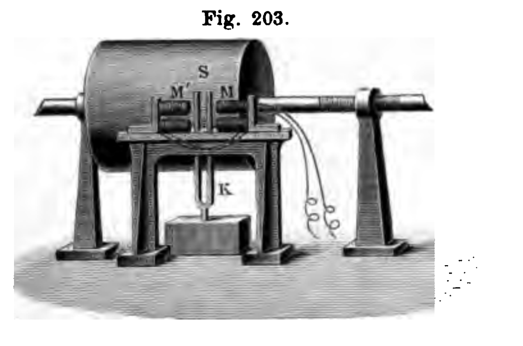
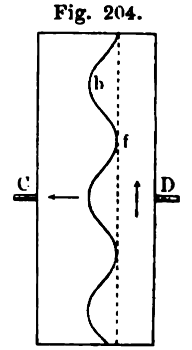


Fig. 204.



ist hier nicht sichtbar. Versetzt man den Cylinder in Drehung, so zeichnet der Stift, falls der Cylinder keine fortschreitende Bewegung besitzt, eine wellenförmige Kurve, wie sie in Fig. 204 dargestellt ist. Rückt dagegen der Cylinder auf seiner Achse weiter, so umgiebt die Wellenlinie den Cylinder schraubenförmig, wie in Fig. 205. Es ist von Nutzen, bevor die Wellenlinie entstanden ist und auch nachher den Cylinder in Drehung zu versetzen, während die Stimmgabel in Ruhe ist; dann entsteht eine Schraubenlinie, welche die Wellenlinie in zwei symmetrische Hälften teilt.

Um die Stimmgabel K zum Tönen zu bringen, bringt man sie zwischen zwei Elektromagnete M und M', durch deren Bewickelung man, falls n die Schwingungszahl der Stimmgabel ist, n kurzdauernde Ströme in der Sekunde sendet. Hierzu dient die Unterbrecherstimmgabel, die in Fig. 206 dargestellt ist und ebenfalls die Schwingungszahl n hat. An den Zinken der letzteren sind zwei Stifte K und O befestigt, von denen K in das Quecksilber des darunter befindlichen Gefäſses taucht, während sich O ein wenig oberhalb des Quecksilbers im rechten Gefäſse befindet. Die Anordnung der Elektromagnete und Drahtleitungen ist aus der Figur ersichtlich. In der durch eine punktierte Linie angedeuteten Nebenleitung befinden sich die Elektromagnete der Stimmgabel K (Fig. 203). Ist der Strom des Elementes E geschlossen, so zirkuliert derselbe in der Richtung der Pfeile und die Elektromagnete ziehen die Zinken der Stimmgabel an. Hierbei hebt sich K aus dem Quecksilber und taucht O in dasselbe ein, so daſs die Hauptleitung geöffnet, die Nebenleitung geschlossen wird. Der Strom geht nun zur Schreibvorrichtung (Fig. 203). Infolge der Unterbrechung der Hauptleitung verlieren die Elektromagnete M und M' ihren Magnetismus, die Zinken der Stimmgabel kehren in die Lage zurück, welche in der Figur skizziert ist, K taucht wieder in das Quecksilber ein, während O dasselbe verläſst. Nun wird wiederum die Hauptleitung geschlossen, die Nebenleitung geöffnet, die Elektromagnete ziehen wiederum die Zinken der Stimmgabel an u. s. w. Auf diese Weise beginnt die Unterbrecherstimmgabel (Fig. 206) zu tönen, macht n Schwingungen pro Sekunde, schlieſst die Nebenleitung n mal in der Sekunde und versetzt die Schreibstimmgabel K (Fig. 203) in ebenfalls n Schwingungen pro Sekunde.

Fig. 205.

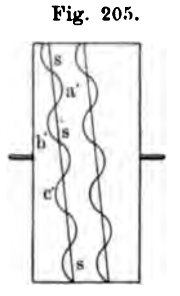
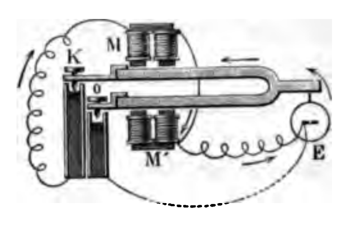


Fig. 206.



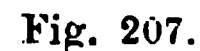
Die Chronographen sind von groſser Bedeutung bei verschiedenartigen physiologischen Arbeiten [1]).

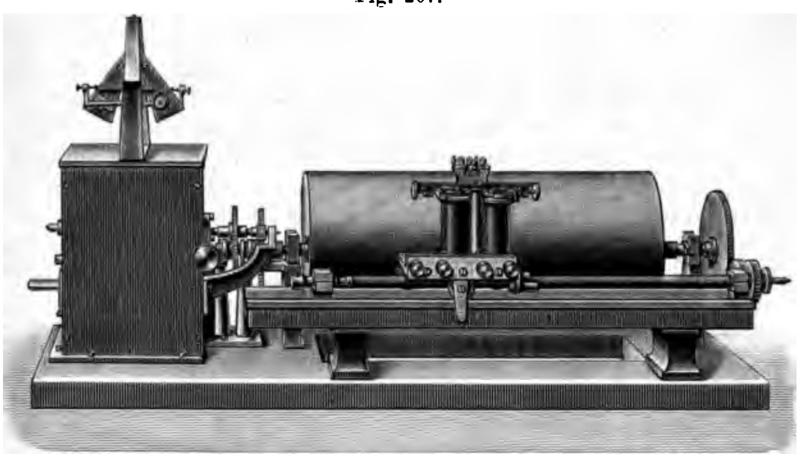
In Fig. 207 (a. f. S.) ist ein neuerer Chronograph der Société Genévoise abgebildet. Links befindet sich das Uhrwerk, welches den Cylinder nur in gleichförmige Drehung versetzt, während der vorn sichtbare Schreibapparat durch die gleichzeitige Drehung der horizontalen langen Schraube in gleichförmige Bewegung parallel der Achse des Cylinders versetzt wird.

---

[1]) Vergl. Frederick u. Noël, Grundlagen der Physiol. des Menschen.

Zur Messung äuſserst kleiner Zeitintervalle dienen verschiedene Methoden, von denen wir einige später in Band II und IV betrachten werden. H. Abraham und J. Lemoine[1]) haben in letzter Zeit eine


Fig. 207.



Methode angegeben, welche es ermöglicht, Zeitintervalle von der Gröſsenordnung 10^{-8} bis 10^{-9} Sekunden zu messen und zwar durch Bestimmung derjenigen Strecke, welche während dieser Zeit vom Lichte zurückgelegt wird.

§ 3. Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels. Wir hatten für die Schwingungsdauer T eines physischen Pendels die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

gefunden, vergl. (42) S. 253, wo K das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf seine Drehungsachse, P sein Gewicht, a die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachse und α der Ausschlagswinkel war, um den sich das Pendel aus seiner vertikalen Lage entfernt. Für unendlich kleine Schwingungen hatten wir

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

gefunden, so daſs

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

wurde.

---

[1]) Ann. chim. phys. [7] **20**, 264, 1900.

Unsere Aufgabe besteht darin, die Gröfse T_0 zu finden. Sind die Schwingungen sehr klein, so kann man annehmen, die beobachtete Schwingungsdauer T sei gleich T_0. Um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen, registriert man nach einer der im § 2 beschriebenen Methoden die Momente, in welchen das Pendel durch seine Gleichgewichtslage hindurchgeht. Am bequemsten ist es, wenn man zunächst den Zeitpunkt fixiert, wo das Pendel zum erstenmal durch seine Gleichgewichtslage geht; dies ist dann der Ausgangspunkt der Zählung. Hierauf notiert man den Moment des $n$ten, etwa 50 ten oder 100 ten Durchganges durch die Gleichgewichtslage. Sei das Zeitintervall vom nullten bis zum $n$ten Durchgange gleich τ_n, so ist für sehr kleine Schwingungen

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der gröfseren Genauigkeit halber bedienen wir uns jedoch der Formel (3) und berücksichtigen dabei den Umstand, dafs die Pendelschwingungen gedämpfte Schwingungen darstellen (S. 156), deren Amplitude in geometrischer Progression abnimmt. Anstatt α kann man das arithmetische Mittel aus der Anfangsamplitude α_1 und Endamplitude α_n wählen; dann ist

$$T = \frac{\tau_n}{n} = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right)$$

oder

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n}\left(1 - \frac{1}{4} sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{4}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Die genauere Formel hat folgende Form

$$T_0 = \frac{\tau_n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{sin(\alpha_1 + \alpha_n)\, sin(\alpha_1 - \alpha_n)}{32\, lg \dfrac{sin\, \alpha_1}{sin\, \alpha_n}}} \quad \ldots \quad (6)$$

wo das Zeichen lg den natürlichen Logarithmus bedeuten soll.

Die Gröfse des Ausschlages kann man dadurch bestimmen, dafs man z. B. eine horizontale Skala hinter dem unteren Pendelende parallel zur Schwingungsebene anbringt.

§ 4. **Das Trägheitsmoment eines Pendels.** Das Trägheitsmoment K eines Pendels kann man nur in seltenen Fällen durch Rechnung finden, wenn man nämlich die Gestalt und die Dimensionen des Pendels kennt und eine der auf S. 101—103 gegebenen Formeln anwendet. Ist M die Masse des Pendels, so stellt sich K im allgemeinen in der Form $M\varrho^2$ dar; setzt man diesen Ausdruck für K und $P = Mg$

in (2) ein, so ergiebt sich

$$T_0 = \pi \frac{\varrho}{\sqrt{ga}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Nehmen wir z. B. an, das Pendel bestehe aus einem überaus dünnen Faden, dessen Masse vernachlässigt werden kann, und einer massiven Kugel vom Radius R. Bezeichnet man mit l die Entfernung des Aufhängepunktes vom Kugelmittelpunkte, so erhält man nach Formel (39) auf Seite 103 und Formel (3) auf Seite 241

$$K = \frac{2}{5} MR^2 + Ml^2 \text{ und hieraus } \varrho = \sqrt{l^2 + \frac{2}{5} R^2}.$$

Nimmt man an, der Schwerpunkt des Pendels befinde sich im Kugelmittelpunkte, so erhält man $a = l$. Die Formel (7) giebt in diesem Falle

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Gröſse K verfährt man folgendermaſsen. Man bestimmt zunächst die Schwingungsdauer T_0 des Pendels, d. h. die Gröſse

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hierauf bringt man am Pendel ein Übergewicht an (das auch aus mehreren einzelnen Teilen bestehen kann), dessen Schwerpunkt mit der Drehungsachse zusammenfällt und dessen auf diese Achse bezogenes Trägheitsmoment K_1 bekannt ist. Es kann als ein derartiges Übergewicht z. B. ein flacher Ring dienen, dessen Mittelpunkt auf der Drehungsachse liegt und dessen Seiten der Schwingungsebene parallel sind, vergl. Formel (36) auf Seite 101. Man erhält die neue Schwingungsdauer T_1, wenn man in Formel (9) $K + K_1$ an Stelle von K und $(P + P_1)\,a'$ an Stelle von Pa einsetzt, wobei P_1 das Gewicht des hinzugekommenen Übergewichtes, a' den Abstand des neuen Pendelschwerpunktes von der Drehungsachse bedeutet. Formel (27) giebt indessen, da der Schwerpunkt des Übergewichtes in der Drehungsachse liegt, $(P + P_1)\,a' = Pa + P_1 . 0$. Danach erhält man

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K + K_1}{Pa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

die Formeln (9) und (10) ergeben

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{K + K_1}{K} = 1 + \frac{K_1}{K}; \quad \frac{K_1}{K} = \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2}$$

und hieraus ergiebt sich

$$K = K_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad \cdots \cdots \quad (11)$$

§ 5. **Vergleichung der Schwingungsdauer zweier Pendel; Methode der Koincidenzen.** Es wird im folgenden vorausgesetzt, dafs die Schwingungsdauer T eines von zwei Pendeln bekannt ist und dafs sich die Schwingungsdauer T_1 des anderen nur wenig von T unterscheidet. Man hängt die beiden Pendel so auf, dafs ihre Schwingungen in zu einander parallelen Ebenen erfolgen. Diese Schwingungen beobachtet man mit Hülfe eines Fernrohres, dessen Achse senkrecht zur Schwingungsebene ist und durch die Gleichgewichtslage der Pendel hindurchführt.

Nehmen wir an, beide Pendel gingen in irgend einem Augenblicke gleichzeitig und in derselben Richtung durch ihre Gleichgewichtslagen. Ist dann T_1 nicht gleich T, so werden sich die Pendel darauf wieder voneinander entfernen; man hat nun darauf zu achten, welches von ihnen schneller schwingt. Nach einiger Zeit, wenn das eine Pendel n' Schwingungen vollführt hat, gehen sie wieder beide gleichzeitig durch die Mitte, der sie sich von entgegengesetzten Seiten her nähern. In diesem Augenblicke hat das andere Pendel $n' + 1$ oder $n' - 1$ Schwingungen vollführt. Diese Begegnung der Pendel läfst sich nicht bequem beobachten, man bestimmt daher diejenige Zahl n von Schwingungen, welche das erste Pendel bis zu dem Augenblicke vollführt, wo beide Pendel wiederum gleichzeitig, d. h. in derselben Richtung durch die Gleichgewichtslage gehen. In diesem Augenblicke hat das zweite Pendel $n + 2$ oder $n - 2$ Schwingungen ausgeführt. Die Relation $n\,T = (n \pm 2)\,T_1$ liefert das gesuchte Verhältnis

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{n \pm 2} \quad \cdots \cdots \quad (12)$$

Die Genauigkeit der Bestimmung erhöht sich, wenn man bis zur $m$ten Koincidenz wartet und die entsprechende Zahl N der Schwingungen des ersten Pendels zählt; in diesem Moment beendet das zweite Pendel seine $(N \pm 2\,m)$te Schwingung und es ist

$$\frac{T_1}{T} = \frac{N}{N \pm 2\,m} \quad \cdots \cdots \quad (13)$$

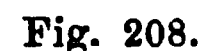
Ist das erste Pendel ein Sekundenpendel ($T = 1$), so erhält man für die Schwingungsdauer T_1 des zweiten Pendels aus (12) resp. (13)

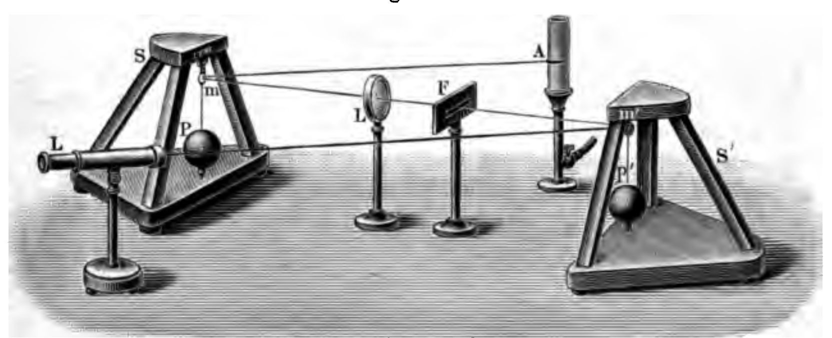
$$T_1 = \frac{n}{n \pm 2} \text{ Sekunden, resp. } T_1 = \frac{N}{N \pm 2\,m} \text{ Sekunden} \quad . \quad . \quad (14)$$

Es giebt verschiedenerlei Vorkehrungen, die einem die Beobachtung der Koincidenzen, d. h. des gleichzeitigen Durchganges beider Pendel

durch die Gleichgewichtslage, erleichtern; dieselben hängen von der Form der Pendel ab und es soll davon im § 3 des folgenden Kapitels (auf S. 386) die Rede sein.

§ 6. Lippmanns stroboskopische Methode zum Vergleichen der Schwingungsdauer zweier Pendel[1]**.** Fig. 208 giebt ein schematisches Bild von der Anordnung der Apparate. P und P' sind zwei Pendel, deren Schwingungsdauer nur wenig voneinander verschieden sind; sie schwingen in Ebenen, welche durch S und S' gehen. An ihnen sind zwei Spiegelchen m und m' angebracht, deren Oberflächen senkrecht zu den Schwingungsebenen sind. In A befindet sich ein heller horizontaler Spalt. Die von A ausgehenden Strahlen werden von m reflektiert und liefern nach Durchgang durch die Linse L ein Bild des ersten Spaltes an der Stelle, wo sich der horizontale Spalt der Platte F befindet. Von hier gehen die Strahlen nach m' und werden ins Fernrohr L geworfen, mit dem der Spalt F beobachtet wird.


Fig. 208.



Im Okulare des Fernrohres befindet sich eine vertikale, mikrometrische Skala (vergl. S. 305). Befinden sich beide Pendel in Ruhe, so erscheint im Fernrohr in der Mitte der Skala eine helle, horizontale Linie. Schwingt P' allein, so erscheint eine helle Linie, die auf- und abwärts schwingt; ist nur P in Schwingung, so leuchtet in der Skalenmitte eine Linie in den Momenten auf, wo das Pendel P durch seine Gleichgewichtslage geht, weil nur dann das Bild des Spaltes A auf den Spalt F fällt. Bei jeder vollen Doppelschwingung von P geschieht dies zweimal. Befinden sich endlich beide Pendel in Bewegung und ist ihre Schwingungsdauer die gleiche, so erscheinen abwechselnd zwei helle Linien, wenn P die Gleichgewichtslage passiert; sie liegen symmetrisch ober- und unterhalb der Skalenmitte, entsprechend der zufälligen Phasendifferenz der Pendelschwingungen. Ist ihre Schwin-

[1]) Journ. de phys. (2) 6, 266, 1887.

gungsdauer nicht genau die gleiche, so ändert sich die Lage dieser beiden Linien allmählich und tritt ein Moment ein, wo sie beide in der Skalenmitte zusammentreffen. In diesem Moment „koincidieren" die Schwingungen, d. h. gehen beide Pendel gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage. Man hat nun die Zahl n der Linien, welche bis zur nächsten Koincidenz auftreten, zu zählen; es ist dann die Dauer von n Schwingungen des Pendels P gleich der Dauer von $n \pm 1$ Schwingungen des Pendels P'.

Im Jahre 1897 hat Lippmann[1]) zwei weitere Methoden zum Vergleichen der Schwingungsdauer für Pendel in Vorschlag gebracht, falls diese Zeiträume wenig voneinander differieren.

Achtes Kapitel.

Messung der Intensität der Schwerkraft.

§ 1. **Richtung der Schwerkraft.** Das Gesetz der allgemeinen Anziehung lehrt, dafs man die Schwerkraft an einem gegebenen Punkte als Resultante aller der Anziehungskräfte ansehen kann, die von allen Teilen der Erdkugel ausgehen. Infolge der Erdrotation tritt eine Zentrifugalkraft auf, durch diese wird die Richtung der auf die Körper an der Erdoberfläche wirkenden Kraft ein wenig geneigt. Diese Neigung ist für die Pole und den Äquator gleich Null und beträgt $11' 30''$ für 45^0 Breite. Die Richtung der Resultante aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft heifst die vertikale; sie wird durch die Richtung eines unbeweglichen, am einen Ende befestigten Fadens bestimmt, an dessen anderem Ende ein Gewicht angebracht ist; ebenso kann man sie als die Senkrechte zur Horizontalebene definieren, wo dann letztere mit Hülfe der Libelle bestimmt wird.

Die Richtung der Vertikallinie hat man bis in die letzte Zeit hinein für unveränderlich gehalten und auf sie die Lage anderer Linien bezogen.

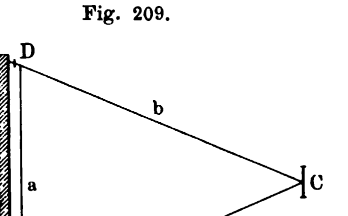
Der hohe Genauigkeitsgrad, mit welchem man heutzutage Winkelmessungen ausführen kann, hat zur Entdeckung der Breiteschwankungen geführt, d. h. zu der Entdeckung oscillatorischer Bewegungen der Erdachse innerhalb der Erde selbst. Man hat sich infolgedessen auch neuerdings wieder der Frage zugewandt, ob die Richtung der Vertikalen und mithin die Lage des Horizontes wirklich für jeden Erdort konstant

---

[1]) Compt. rend. **124**, 125.

sind. Zuerst hat sich mit dieser Frage Zöllner (1871) beschäftigt, der hierzu ein besonderes Instrument — ein Horizontalpendel — konstruiert hat, mit dessen Hülfe man die kleinsten Schwankungen der Vertikallinie wahrnehmen kann. Ähnliche Apparate sind schon früher von Hengler (1832) und Perrot (1862) konstruiert worden. Im Jahre 1894 ist eine umfangreiche Arbeit von Rebeur-Paschwitz erschienen, enthaltend die Untersuchungen, welche mit dem Horizontalpendel in Wilhelmshaven, Potsdam und Puerto Orotawa (auf der Insel Teneriffa) ausgeführt worden sind. Die sehr einfache Konstruktion des Horizontalpendels ersieht man aus der schematischen Fig. 209. An der vertikalen Achse AB ist das aus drei leichten Röhrchen a, b, c bestehende Dreieck EDC angebracht; die Befestigung ist eine derartige, dafs sich das Dreieck, ohne bedeutende Reibung zu erfahren, um die Achse AB bewegen kann. Fällt diese Achse mit der Vertikalen zusammen, so befindet sich das Pendel DCE im indifferenten Gleichgewichte; schliefst sie jedoch mit der Vertikalen einen, wenn auch noch so kleinen Winkel ein, so nimmt das Pendel eine bestimmte Gleichgewichtsstellung an, wobei sein Schwerpunkt in einer durch die Drehungsachse und die Vertikallinie gehenden Ebene zu liegen kommt. Die geringsten seitlichen Schwankungen der vertikalen Richtung führen zu Änderungen der Gleichgewichtslage des Pendels, welche dann nach der Spiegelablenkungsmethode unter Benutzung des in C angebrachten Spiegelchens beobachtet werden können. Auf diese Weise lassen sich Verschiebungen der Vertikallinie um 0,001″ wahrnehmen. Man kann zum gleichen Zwecke auch einen selbstregistrierenden Apparat verwenden, dessen Einrichtung darauf beruht, dafs ein vom Spiegel C reflektierter Lichtstrahl auf die Oberfläche eines horizontalen Cylinders fällt, der mit lichtempfindlichem Papier bezogen ist und langsam um seine Achse rotiert.

Fig. 209.

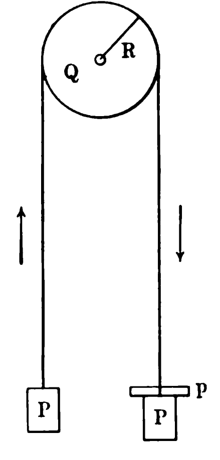


Derartige Pendel sind u. a. von E. Kortazzi in Nikolajew und Lewitzki in Charkow und Jurjew (Dorpat) aufgestellt worden. Die Beobachtungen mit dem Horizontalpendel haben gelehrt, dafs Schwankungen der Vertikallinie in der That vorhanden sind und nicht selten gröfser werden als die bei Winkelmessungen möglichen Beobachtungsfehler. Man mufs sie daher für genaue astronomische Beobachtungen mit in Rechnung bringen. Man hat periodische, jährliche und tägliche Schwankungen beobachtet, die von der Wirkung der Sonnenstrahlung

auf die Erdrinde herrühren, und ebenso halbtägige Schwankungen, die vom Monde hervorgerufen werden. Sehr wichtig ist es, daſs das Horizontalpendel äuſserst empfindlich gegen „seismische Stürme“ und auch gegen vereinzelt auftretende Erdbebenstöſse ist. Erdbeben in Zentralasien, Japan und Südamerika senden danach seismische Wellen aus, die von den Horizontalpendeln in Europa noch registriert werden. Im Verlaufe eines Jahres (vom 4. August 1893 bis zum 4. August 1894) sind in Charkow nicht weniger als 124 Erdbeben verzeichnet worden; am 12. Juni 1897 wurde in Jurjew (Dorpat) eine relativ starke seismische Bewegung registriert, deren Entstehungsherd sich in Indien befand. O. Hecker, der sich sehr viel mit dem Horizontalpendel beschäftigt hat, fand (1899), daſs die von Winden hervorgerufenen horizontalen Bewegungen viel tiefer in das Erdinnere eindringen, als man es vermuten könnte.

§ 2. Bestimmung von g mit Hülfe der Atwoodschen Fallmaschine und anderer Apparate, die zur Untersuchung des freien Falles der Körper dienen. Die Konstruktion der Atwoodschen Fallmaschine und die Art, wie man sich ihrer dazu bedient, um die Gesetze des freien Falles der Körper zu prüfen $\left(v = gt \text{ und } s = \frac{1}{2}gt^2\right)$ und ebenso das Grundgesetz der Bewegung (daſs die Beschleunigungen direkt proportional den Kräften und indirekt proportional den Massen sind) darzuthun, ist aus der Elementarphysik bekannt. An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie man den genauen Ausdruck für diejenige Beschleunigung g' ableitet, welche die Gewichte der Fallmaschine erlangen. In der Elementarphysik wird nachstehende Formel hergeleitet

Fig. 210.



$$g' = \frac{p}{2P + p} g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo p das Gewicht der Überbelastung ist (vergl. Fig. 210), P das Gewicht jeder der beiden Belastungen, die unmittelbar an der Schnur wirken. Der Radius des Rades Q sei gleich R. Die Formel (1) weicht beträchtlich von der genauen Formel ab; ohne an derselben einige unumgänglich notwendige Korrektionen anzubringen, kann man weder die Bewegungsgesetze überhaupt und die Fallgesetze im besonderen verifizieren, noch auch die Beschleunigung g finden. Letztere ist, wenn man die Zeit t, innerhalb welcher sich das Gewicht p um die Strecke s senkt, mittels des Chronographen oder einer im § 1 dieses Kapitels beschriebenen Zähl-

vorrichtung bestimmt, aus der Formel $s = \frac{1}{2} g' t^2$ zu finden; es ist nämlich

$$g' = \frac{2s}{t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Formel (1) ist ungenau, da man sie, ohne auf folgende drei verschiedene Umstände zu achten, abgeleitet hat:

1. Das Rad erfährt bei seiner Rotation eine gewisse Reibung, die man, wie wir sehen werden, wie eine Kraft f, welche die Bewegung hemmt, behandeln kann, so dafs also die Bewegung nicht durch das Gewicht p, sondern durch die geringere Kraft $p - f$ bewirkt wird.

2. Die bewegende Kraft $p - f$ versetzt nicht nur die Masse $2M + m$, wo $M = \frac{P}{g}$ und $m = \frac{p}{g}$ ist, sondern auch die Masse μ der Schnur in Bewegung, deren Gewicht wir mit $\pi = \mu g$ bezeichnen wollen.

3. Dieselbe Kraft $p - f$ versetzt ferner auch das Rad in beschleunigte Drehung; es möge Q das Gewicht desselben, K das Trägheitsmoment in Bezug auf seine Drehungsachse sein. Wäre das Rad massiv, so hätte man $Kg = \frac{1}{2} Q R^2$, vergl. (37) S. 101; könnte man dagegen annehmen, dafs die ganze Masse des Rades auf dessen Umfang verteilt sei, so wäre $Kg = Q R^2$. Der wahre Wert von Kg liegt zwischen diesen beiden Werten und wir können

$$Kg = \alpha Q R^2 \text{ setzen, wo } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ ist} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Um den genauen Ausdruck für g' herzuleiten, wollen wir uns des Satzes von der Wucht bedienen (S. 112). Sei für einen gegebenen Augenblick v die Geschwindigkeit der Gewichte nebst Schnur, ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades; offenbar ist $\omega R = v$, da die Peripheriepunkte des Rades dieselbe Geschwindigkeit wie die Schnur haben müssen. Die Wucht J des ganzen bewegten Systems ist — vergl. (1) S. 103 und (3) S. 104

$$J = \frac{1}{2}(2M + m + \mu) v^2 + \frac{1}{2} K \omega^2;$$

da $\omega R = v$ ist, so erhält man

$$J = \frac{1}{2}\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right) v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Wucht mufs gleich der Arbeit $(p - f)s$ sein, wo s der durchlaufene Weg ist. Setzen wir $v = g't$ und $s = \frac{1}{2} g' t^2$ ein, so erhalten wir

$$\left(2M + m + \mu + \frac{K}{R^2}\right)g' = p - f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit g und setzen $Kg = \alpha Q R^2$, vergl. (3); auf diese Weise wird

$$(2P + p + \pi + \alpha Q)\, g' = (p - f)\, g \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und hieraus folgt

$$g' = \frac{p - f}{2P + p + \pi + \alpha Q}\, g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hier ist f die Kraft der Reibung, π das Gewicht der Schnur, Q das Gewicht der Rolle und α ein Bruch, dessen Wert zwischen $1/2$ und 1 liegt. Vernachlässigt man f, π und αQ, so erhält man Formel (1); alle unsere drei Korrektionen wirken auf g' im selben Sinne ein. Um f zu bestimmen, hat man ein Übergewicht p_0 von solcher Gröfse zu finden, dafs sich das ganze System, nachdem es einen Anstofs erhalten, gleichförmig weiterbewegt, also Wegstrecken durchläuft, welche der Zeit proportional sind; die Beschleunigung ist dann gleich Null und daher $f = p_0$. Die Gröfse π wird durch unmittelbare Wägung gefunden. Die Korrektion αQ wird durch Rechnung gefunden, nachdem man die Beschleunigungen g_1 und g_2 bei verschiedenen Belastungen P_1, p_1 und P_2, p_2 nach Formel (2) gefunden hat. Aus Formel (7) folgt

$$g_1 : g_2 = \frac{p_1 - f_1}{2P_1 + p_1 + \pi + \alpha Q} : \frac{p_2 - f_2}{2P_2 + p_2 + \pi + \alpha Q} \quad (8)$$

Aus dieser Proportion, in der alle anderen Gröfsen bekannt sind, kann man αQ finden. Sind f, π und αQ gefunden, so erhält man mit Hülfe des durch Beobachtung gefundenen g' das gesuchte g nach Formel (7)

$$g = \frac{2P + p + \pi + \alpha Q}{p - f}\, g' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Von anderen Apparaten, die ebenfalls zum Studium der Fallgesetze dienen und ebenso zur Bestimmung des Zahlenwertes der Beschleunigung g benutzt werden können, seien noch die folgenden erwähnt:

I. Die schiefe Ebene. Läfst man einen verhältnismäfsig schweren Wagen auf Schienen von einer schiefen Ebene herabgleiten, so dafs die Reibung nach Möglichkeit vermindert wird, so wird die Beschleunigung g' der Bewegung auf dieser Ebene mit hinreichender Genauigkeit durch die Formel

$$g' = \frac{h}{l}\, g = g \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gefunden, wo h die Höhe, l die Länge und α der Winkel der schiefen Ebene mit dem Horizont ist. Bestimmt man g' nach Formel (2), so findet man danach g.

II. Die Morinsche Fallmaschine. Dieselbe besteht aus einem vertikalen Cylinder A (Fig. 211), der mit Papier überzogen ist. Mittelst des Gewichts S kann man den Cylinder in Rotation versetzen, die gleichförmig wird, sobald S etwa zwei Drittel seines Wegs zurückgelegt hat, da der Windfang PP' bei schneller Rotation wie eine Bremsvorrichtung wirkt. Neben dem Cylinder befindet sich das mit einem Zeichenstift c versehene Gewicht J, welches während des Fallens an zwei vertikal ausgespannten Drähten M und M' herabgleitet. Sobald die Rotation des Cylinders gleichförmig geworden ist, läfst man das Gewicht J fallen, wobei dann der Zeichenstift auf der Papierfläche eine gewisse Kurve verzeichnet. Hat man den Cylinder zum Stillstand gebracht, so nimmt man das Papier herunter und untersucht die entstandene Kurve; sie hat die in Fig. 212 dargestellte Form. Man zieht nun durch den Anfangspunkt o der Kurve

Fig. 211.

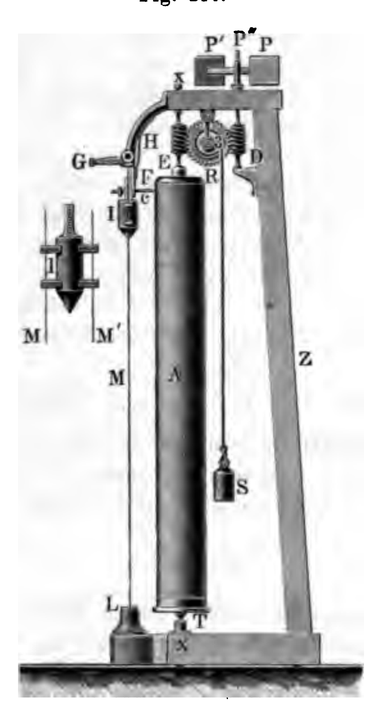
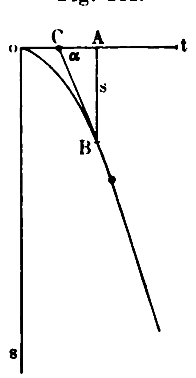


Fig. 212.



eine horizontale und eine vertikale Gerade, welche als Abscissen- und Ordinatenachse zu gelten haben und sieht leicht ein, dafs die Abscissen die Fallzeiten t darstellen, da sie den Winkeln proportional sind, um welche sich der Cylinder während des Fallens von J gedreht hat. Die Ordinaten stellen die durchlaufenen Fallräume s dar. Es ist mithin leicht, das Gesetz der Fallstrecken zu prüfen: man findet, dafs die Ordinaten AB den Quadraten der Abscissen OA proportional sind. Die Gleichung der Kurve ist also von der Form $s = pt^2$, d. h. ist eine Parabelgleichung. Ist die Rotationsgeschwindigkeit des Cylinders bekannt, so fällt es nicht schwer, den Wert der Abscisse OA

in Sekunden, d. h. also t zu finden und dann erhält man aus $p = \frac{1}{2} g$ die gesuchte Beschleunigung g.

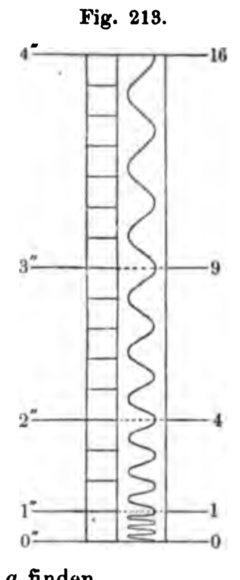
Man kann mit demselben Apparate auch das Gesetz der Geschwindigkeiten prüfen. Zu diesem Zwecke zieht man durch B die Tangente BC zur Parabel; sei $\angle BCA = \alpha$. Aus den Elementen der Differentialrechnung ist bekannt, dafs

$$tg\,\alpha = \frac{ds}{dt} = v \text{ ist.}$$

Auf diese Weise können wir also den Zahlenwert der Geschwindigkeit v bestimmen und uns davon überzeugen, dafs v den Abscissen t proportional ist. Bestimmt man für ein und dieselbe Abscisse OA die Gröfsen $s = AB$ und $v = tg\alpha$, so erhält man den Zahlenwert der Beschleunigung aus der Formel $g = \frac{v^2}{2s}$. Als Zeiteinheit dient hierbei diejenige Zeit, die auf der t-Achse durch die Länge, nach der wir die Ordinaten s messen, dargestellt ist (nur unter dieser Bedingung ist $tg\alpha$ dem Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ gleich).

III. Aus der grofsen Zahl sonstiger hierhergehöriger Apparate sei nur noch auf einen hingewiesen. Den Hauptbestandteil desselben bildet eine Stimmgabel, die an einer der Zinken einen horizontalen Schreibstift trägt. Die Stimmgabel ist zum dauernden Tönen gebracht (vergl. S. 373) und derartig befestigt, dafs die Vibrationen des Stifts in einer horizontalen Ebene erfolgen. Der Schreibstift drückt gegen die Oberfläche einer vertikalen Tafel (Fig. 213), welche parallel zur Linie, in welcher die Zinken schwingen, befestigt ist. Man läfst nun obige Tafel frei fallen, während der Schreibstift auf ihrer Oberfläche eine Wellenlinie verzeichnet. Jede Welle entspricht dem gleichen Zeitintervall T, welches die Schwingungsdauer der Stimmgabel ist. Zieht man horizontale Linien durch jede dritte Welle, so erhält man die Fallstrecken s, welche die Tafel in gleichen Zeiträumen durchlaufen hat. Wie aus der Figur hervorgeht, sind diese Fallstrecken den Quadraten der Fallzeiten proportional. Kennt man die Schwingungszahl der Stimmgabel, so kann man die Zeit t in Sekunden und nach Formel $g = 2s : t^2$ die Beschleunigung g finden.

Fig. 213.



§ 3. Bestimmung von g nach Borda durch Messung der

Schwingungsdauer eines Pendels. Die Schwingungsdauer eines Pendels, das seiner Konstruktion nach dem mathematischen Pendel nahekommt, wird nach der Methode der Koincidenzen (Kapitel VII, § 5, S. 377) durch Vergleichung mit einem Sekundenpendel bestimmt. Fig. 214 stellt den Apparat in der Form dar, in welcher er jetzt meist gebraucht wird. An der Wand des Gehäuses ist die Uhr mit dem Sekundenpendel sichtbar; davor befindet sich die an einem dünnen Stabe befestigte Kugel; der Stab schwingt um eine der Kanten eines dreiseitigen Prismas. Die Schwingungsdauer dieses Pendels wird, wie gesagt, nach der Methode der Koincidenzen bestimmt. Um diese Koincidenzen leichter wahrnehmen zu können, ist am Sekundenpendel ein Papierblatt, das einen vertikalen Indexstrich trägt, angebracht. Ein Fernrohr mit mäfsiger Vergröfserung wird derart horizontal gerichtet, dafs seine verlängerte Achse den Stab des vorderen Pendels und jenen vertikalen Index trifft, wenn beide Pendel sich in der Gleichgewichtslage befinden. Auf diese Weise ist es leicht, den Moment zu beobachten, wo der Stab den Index gerade überdeckt und dabei durch die Mitte des Gesichtsfeldes im Fernrohr hindurchgeht.

Fig. 214.



Für eine sehr kleine Schwingungsdauer T_0 des Pendels, das aus einem dünnen Draht und einer Kugel besteht, hatten wir bereits Formel (8) auf S. 376 abgeleitet; setzt man sie in (3) auf S. 374 ein, so erhält man für die Schwingungsdauer T die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wo l die Entfernung des Kugelzentrums von der Schwingungsachse, R der Kugelradius und α der mittlere Ausschlagswinkel ist. Man erhält hieraus

$$g = \frac{\pi^2}{T^2}\left(l + \frac{2R^2}{5l}\right)\left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Da alle Gröfsen in diesem Ausdruck bekannt sind, kann er zur Be-

stimmung von g dienen. Die Länge $(l - R)$ des Stabes (Drahtes) wird mit Hülfe des Kathetometers gefunden.

Man mufs jedoch an Formel (12) noch einige Korrektionen anbringen.

1. Wir hatten die Beschleunigung g bestimmt, mit welcher die Kugel unseres Pendels frei fallen würde; diese Bestimmung war im lufterfüllten Raum ausgeführt worden, wo die Kugel einen gewissen Gewichtsverlust erleidet (vergl. S. 348). Bedeutet P das wahre Gewicht der Kugel (im Vakuum), p den Gewichtsverlust, so wird die Beschleunigung g durch die Kraft $P - p$ hervorgerufen. Bezeichnet man sonach mit G die Beschleunigung für den freien Fall im Vakuum, so hat man offenbar $G:g = P:(P-p)$. Ist D die Dichte der Kugel, d die Dichte der Luft während der Beobachtung, so ist $P:p = D:d$, folglich

$$G = g \frac{D}{D-d} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

Besteht die Kugel aus Platin, so ist $D = 21$, während $d = 0{,}0013$ ist.

2. Der Luftwiderstand hat auf die Bewegung des Pendels einen sehr geringen Einflufs, er ändert die Schwingungsdauer um weniger als $\frac{3}{10^9}$ derselben.

3. Die Luft wird von der Kugel gewissermafsen mitgenommen und bewegt sich daher zugleich mit ihr. **Poisson** hat gezeigt, dafs man, um eine entsprechende Korrektion anzubringen, die Gröfse d in (13) mit $\frac{3}{2}$ zu multiplizieren hat; es ist also

$$G = g \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\frac{d}{D}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

4. Auch die Reibung der Luft (Vierter Abschnitt, Kapitel V, § 12) hat einigen Einflufs; **Stokes** hat die Gröfse der entsprechenden Korrektion abgeleitet.

5. Während das Pendel schwingt, bleibt das Stativ nicht völlig in Ruhe; hieraus folgt, dafs nicht die ganze Arbeit der Schwerkraft dazu verbraucht wird, das Pendel in Bewegung zu setzen. Dies hatten wir aber bei Herleitung der Formel (41) auf S. 253 angenommen. Eine Formel für die entsprechende Korrektion ist von **Peirce** hergeleitet worden.

Eine scharfsinnige Methode zur schnellen und genauen Bestimmung von g stammt von **Brillouin** (1897).

§ 4. Bestimmung von g nach Kater mit Hülfe des Reversionspendels. Wir sahen (auf S. 251), dafs die Entfernung l

25*

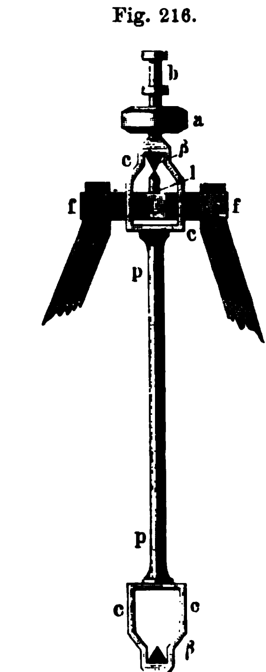
des Schwingungsmittelpunktes eines Pendels von seiner Schwingungsachse gleich der Länge eines mathematischen Pendels ist, das dieselbe Schwingungsdauer T hat. Kennt man T und l, so findet man aus Formel (31), S. 250

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Um l zu bestimmen, rufen wir uns den Satz ins Gedächtnis, welcher von der Zusammengehörigkeit des Schwingungszentrums und Aufhängepunkts handelte (vergl. S. 252). Kehrt man nämlich das Pendel um und führt die Schwingungsachse durch das frühere Schwingungszentrum, so ändert sich die Schwingungsdauer nicht. Hieraus folgt, dafs bei einem Pendel der Abstand der beiden Schwingungsachsen, d. h. der einander zugekehrten Prismenkanten, die Gröfse l der Formel (15) darstellt, wenn das Pendel die gleiche Schwingungsdauer T hat, einerlei um welche der Achsen es schwingt. Auf diesem Prinzip beruht das Reversionspendel von Kater. Dasselbe hat folgende einfache Gestalt: ein Stab (Fig. 215) ist mit zwei Prismen a und b und zwei verschiebbaren Gewichten v und w versehen, deren Stellung so reguliert werden kann, dafs das Pendel gleiche Schwingungsdauer (die man nach der Methode der Koincidenzen beobachtet) besitzt, mag es auf dem Prisma a oder b aufgehängt werden.

Fig. 215.

Fig. 216.



Hat man es dahin gebracht, dafs die Schwingungsdauer in beiden Fällen den gleichen Wert T, reduziert auf unendlich kleine Ausschläge, haben, so hat man nur noch den Abstand l der Prismenkanten zu messen und g nach Formel (15) zu berechnen. Die anzubringenden Korrektionen sind dieselben, wie sie bereits im § 3 angeführt worden sind. In Fig. 216 ist ein Reversionspendel älterer Konstruktion dargestellt, wo sich die Prismen $\beta\,\beta$ in den Rahmen cc und cc befinden; a und a sind die beiden Laufgewichte, von denen das eine hohl,

das andere massiv ist. In der Figur ist ein Teil des Stativs *ff* mit dem vorspringenden Teile *L* abgebildet; letzterer trägt den Stahlaufsatz *l*, dessen Ende eben geschliffen ist. Gegenwärtig wird das Reversionspendel oft in der Form gebraucht, welche ihm von Repsold gegeben worden ist. Eine Beschreibung desselben findet man in den Werken von Ssawitsch und Lenz, Wilkitzky, Zinger und Helmert.

Die Fig. 217 zeigt die vollständige Aufstellung eines Reversionspendels der Société Genévoise. Links befindet sich das Kathetometer

Fig. 217.



mit zwei Fernröhren zur Ausmessung des Abstandes der beiden Drehungsachsen des Pendels, d. h. der Prismenschneiden.

Eine völlige Gleichheit der Zeiten T_1 und T_2 ist sehr schwer oder sogar unmöglich zu erreichen. Sind sie nahezu gleich, so kann man g auf folgende Weise finden. Es sei K_0 das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf eine Achse, welche parallel zu den Prismenkanten durch das Schwingungszentrum geht, a_1 und a_2 die Entfernungen des Schwerpunkts von den Prismenkanten, $l = a_1 + a_2$ die Entfernungen der Prismenkanten voneinander und M die Masse des Pendels.

Gemäſs der allgemeinen Formel (41) auf S. 253 hat man nach dem Satze auf S. 99

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_1^2}{g\,Ma_1}}, \qquad T_2 = \pi \sqrt{\frac{K_0 + Ma_2^2}{g\,Ma_2}}$$

d. h.

$$T_1^2 g\,Ma_1 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_1^2 \text{ und } T_2^2 g\,Ma_2 = \pi^2 K_0 + \pi^2 Ma_2^2.$$

Subtrahiert man die eine Gleichung von der anderen und hebt durch M, so erhält man

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1^2 - a_2^2};$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(a_1 + a_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(a_1 - a_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Im ersten Gliede ist $a_1 + a_2 = l$; im zweiten Gliede stellt $T_1^2 - T_2^2$ eine kleine Gröſse dar, während jedoch die Differenz $a_1 - a_2$ beim Katerschen Reversionspendel keine kleine Gröſse darstellt, so daſs es hinreicht, ihren angenäherten Wert zu kennen, um das zweite Glied zu berechnen.

Um die Intensität der Schwerkraft an verschiedenen Orten zu vergleichen, bedient man sich eines gewöhnlichen Pendels, dessen Schwingungsdauer für die betreffenden Orte direkt bestimmt wird. Aus der Formel $g_1 : g_2 = T_2^2 : T_1^2$ findet man das gesuchte Verhältnis der Intensitäten der betreffenden Kraftfelder (S. 96) für die verschiedenen Orte. Am bequemsten und zu diesem Zwecke gegenwärtig am gebräuchlichsten ist das Pendel von Sterneck (1888). Benutzt man zwei Pendel, die an den entsprechenden Orten schwingen und miſst man die Zeit mit einer Uhr, welche alle Sekunden elektrische Signale nach beiden Beobachtungsorten sendet, so kann man relativ leicht und bequem das Verhältnis der Beschleunigungen $g_1 : g_2$ für die beiden Beobachtungsorte finden. Selbstverständlich müssen die Schwingungsdauern beider Pendel zuvor unter gleichen Bedingungen miteinander verglichen worden sein. Unter der Länge eines Sekundenpendels versteht man die Länge L eines mathematischen Pendels, für welches die Dauer unendlich kleiner Schwingungen gleich einer Sekunde ist. Aus Formel (15) erhält man, wenn man $T = 1$ und $l = L$ setzt

$$L = \frac{g}{\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Somit ist die Länge des Sekundenpendels proportional der Beschleunigung g.

§ 5. Abhängigkeit der Beschleunigung g von der Höhe und geographischen Breite des Beobachtungsortes. Man pflegt die Beschleunigung g in C. G. S.-Einheiten auszudrücken; demnach hätte man für 45° Breite (nach Helmert)

$$g = 980{,}597 \frac{\text{cm}}{(\text{sek})^2}$$

zu schreiben; da jedoch die Sekunde immer als Zeiteinheit gewählt wird, so schreibt man gewöhnlich blofs $g = 980{,}597$ cm. Im folgenden soll selbst die Bezeichnung der Längeneinheit fortgelassen werden.

Der Wert von g ändert sich mit der vertikalen Erhebung und der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Seien g und g_h auf das Meeresniveau resp. auf die Höhe h über dem Meeresspiegel und über der Erdoberfläche bezogen; ist dann R der Erdradius, so folgt

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{1}{1+2\frac{h}{R}} = 1 - 2\frac{h}{R},$$

falls man die höheren Potenzen von $\frac{h}{R}$ fortläfst. Es ist also

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist h in Centimetern gegeben, so ist

$$g_h = g\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Setzt man im zweiten Gliede $g = 981$, so ist

$$g_h = g - 0{,}000\,003\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Einer Erhebung um $h = 100$ m $= 10\,000$ cm entspricht also eine Abnahme von g um 0,03 cm = 0,3 mm. Vorausgesetzt wird hierbei, dafs man sich in der freien Luft, resp. auf einem Turm, bis zu der entsprechenden Höhe erhebt. So ist z. B. auf der Höhe des Eiffelturmes zu Paris ($h = 30\,000$ cm) der Wert von g beinahe um 1 mm kleiner, als am Fufse desselben. Richarz und Krigar-Menzel haben den Wert der Differenz $g - g_h$ in Spandau für $h = 226$ cm bestimmt; sie fanden $g - g_h = 0{,}000652 \frac{\text{cm}}{(\text{sek})^2}$, während nach der Theorie 0,000697 zu erwarten war.

Genaue Messungen von Scheel und Diesselhorst haben gezeigt, dafs sich das Gewicht von 1 kg bei jedem Meter Erhöhung um 0,295 mg

(für Charlottenburg bei Berlin) verringert. Auf einem Hochplateau mit der Höhe h ist

$$g_h = g\,(1 - 0{,}000\,000\,001\,96\,h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Fernere Messungen der Gröſse $g - g_h$ haben ausgeführt Jolly in München (Abhandl. der k. bayer. Akad. II. Kl., 14, 2. Abt., 1881) und M. Thiesen in Breteuil bei Sèvres (Trav. et Mém. du Bureau internat. 7, 1890).

Hansky fand auf dem Gipfel des Montblanc $g = 9{,}794\,72$ und in Chamounix $g = 9{,}799\,99$.

Die Beschleunigung g ändert sich ferner mit der geographischen Breite des Ortes und zwar aus zweierlei Gründen. Erstens wirkt die Zentrifugalkraft infolge der Achsendrehung der Erde der Schwerkraft entgegen; sie ist am Äquator am gröſsten und für die Pole gleich Null. Zweitens ist die Erdgestalt (das Geoid) nahezu die eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, infolgedessen die Beschleunigung g ebenfalls von den Polen zum Äquator hin abnehmen muſs. Unter Berücksichtigung aller dieser Umstände erhält man für die Beschleunigung g in der Höhe h über dem Meeresspiegel (und über der Erdoberfläche) und der geographischen Breite φ nach Helmert (1901) folgende Formel

$$g = 980{,}597\,(1 - 0{,}002\,648 \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h) \quad (22)$$

An der Erdoberfläche selbst erhält man in der Meereshöhe h

$$g = 980{,}597\,(1 - 0{,}002\,648 \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,001\,96\,h) \quad (22,\mathrm{a})$$

Hier ist h überall in Centimetern ausgedrückt.

Die Zahl

$$g = 980{,}665$$

bezieht sich auf $h = 0$ und $\varphi = 45^0$. Statt (22) kann man schreiben

$$g = 978{,}00\,(1 + 0{,}005\,310 \sin^2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,14\,h) \quad (23)$$

Formel (17) giebt für die Länge L des Sekundenpendels

$$L = 99{,}357 - 0{,}2573 \cos 2\varphi - 0{,}000\,000\,3\,h \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Grenzwerte von L und g in Centimetern sind, wenn $h = 0$ ist,

für den Pol . . . . . $\varphi = 90^0$ $L = 99{,}60$ $g = 983{,}01$
für den Äquator . . . $\varphi = 0^0$ $L = 99{,}09$ $g = 978{,}00$

Für einige wichtige Städte folgen hier die Werte von φ, h und der Wert von g, wenn $g_{45^0} = 1$ gesetzt wird, sowie die Länge des Sekundenpendels. Wegen der Einzelheiten der Beobachtungen und Berechnungen muſs auf die Lehrbücher der Geodäsie (z. B.: F. R. Helmert, Theorie der höheren Geodäsie, Leipzig, Teubner) verwiesen werden.

	φ	h	g	L
Berlin	52° 30′	40 m	1,0006625	0,994235 m
London	51° 31′	5,5 m	1,0005815	0,994140 „
Paris	48° 50′	67 m	1,0003322	0,993882 „
St. Petersburg . .	59° 56′	11 „	1,0012798	0,994876 „

Für Paris ($\varphi = 48^0 50'$) ist $L = 99{,}38$ und $g = 980{,}89$.

In der Art, wie Intensität und Richtung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche verteilt sind, treten besondere Unregelmäfsigkeiten, sogenannte Anomalien auf. Defforges fand, dafs g auf Inseln im allgemeinen den Mittelwert, welcher der gleichen Breite entspricht, übertrifft; auf den Sandwichinseln finden sich Stellen, wo g um 0,007 seines Wertes gröfser ist, als jener Mittelwert. Im Innern von Festländern bleibt g hinter diesem Mittelwerte zurück.

Bemerkenswerte Anomalien treten in der Umgegend von Moskau auf; in Moskau selbst ist die Lotlinie um 10,6″ nach Norden abgelenkt. Unter dem ganzen Moskauer Gouvernement ziehen sich offenbar unterirdische Hohlräume oder Schichten von geringerer Dichte in der Richtung von WSW nach ONO hin.

R. v. Eötvös hat sowohl die Verteilung der Erdschwere als auch die Form einer derartigen Fläche S untersucht, welche senkrecht zur Richtung der Schwere für den gegebenen Beobachtungsort ist. Die von ihm hierbei benutzten Apparate besafsen einen erstaunlich hohen Empfindlichkeitsgrad. Sie bestanden in einer unifilaren Drehwage mit sehr grofser Schwingungsdauer (bis zu 20 Minuten). Die Schwingungen des horizontalen Stäbchens wurden in zwei zu einander senkrechten Ebenen beobachtet, woraus sich, wie die Theorie lehrt, die Gröfsen der Hauptkrümmungsradien der Fläche S berechnen lassen. Ein anderer Apparat, bei welchem die Belastung des einen Stabendes niedriger angebracht ist (an das Stäbchen gehängt ist), ermöglicht die Änderung der Schwerkraft längs der Fläche S zu bestimmen; hierbei wird die Torsion des Aufhängefadens bei verschiedenen Lagen der durch die Achse des Stäbchens gehenden Vertikalebene gemessen; diese Torsion ändert sich bei Drehung des ganzen Apparates um eine vertikale Achse.

Wäre die Erde eine homogene Kugel vom Radius R, so wäre der Wert von g' im Innern der Erdkugel direkt proportional dem Abstande r des betreffenden Punktes vom Erdzentrum (vergl. S. 219) und man hätte die einfache Relation $g' = \frac{r}{R} g$. In der That sind aber (vergl. das folgende Kapitel) die inneren Erdschichten dichter als die der Erdoberfläche näheren; infolgedessen wächst g' zunächst, wenn man sich dem Erdzentrum nähert. Unter der Voraussetzung, dafs die Erddichte d eine Funktion von r von folgender Form $d = d_0 - \alpha r^2$ sei, wo d_0 die Erddichte im Zentrum und α ein Zahlenkoeffizient ist, hat Roche folgende Formel hergeleitet.

$$g' = 1{,}92 \frac{r}{R}\left(1 - \frac{12 r^2}{25 R^2}\right) g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Nach dieser Formel wächst g' zunächst bei Annäherung an das Erdzentrum bis $r = \frac{5}{6} R$, wo $g' = \frac{16}{15} g$ wird, um dann bis auf Null für

$r = 0$ abzunehmen. Beobachtungen von Airy in einem 383 m tiefen Schachte bestätigen die Richtigkeit obiger Formel. Nimmt man an, dafs $d = d_0 - \alpha r$ ist, so entspricht das Maximum $g' = 1{,}055\, g$ dem Werte $r = 0{,}814\, R$.

Litteratur.

Zu § 1. Das Horizontalpendel.

Hengler: Dinglers polytechnisches Journal 1832.
Perrot: Compt. rend. **54**, 728, 1862.
Zöllner: Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1869.
Rood: Amer. J. of Sc. **9**, 1875.
Chaplin: Trans. of the Seism. Soc. of Japan. **4**.
Gray: Phil. Mag. Sept. 1881.
Rebeur-Paschwitz: Das Horizontalpendel, Halle 1882; Gerlands Beiträge zur Geophysik **2**, 1895.
Hecker: Instr. **16**, 2, 1896; **19**, 261, 1899; Beiträge zur Geophysik **4**, 64, 1889.
Lentz: Progr. Realgymnasium, Karlsruhe 1898.

Zu § 2.

Atwood: On the rectilinear motion and rotation of bodies, Cambridge 1784.
Morin: Mémoires des savants étrangers VI, 641, 1838.

Zu § 3.

Borda: Mémoire sur la mesure du pendule 1792 (Mesure de la méridienne).
Brillouin: Compt. Rend. **125**, 292, 1897.

Zu § 4.

Kater: Phil. Trans. 1818.
Sterneck: Instr. **8**, 157, 1888.
Helmert: Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, Leipzig 1898.
Bessel: Länge des einfachen Sekundenpendels. Ostw. Klass. Nr. 7.

Zu § 5.

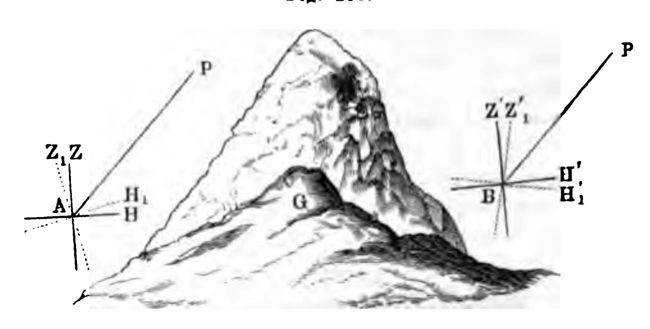
Richarz und Krigar-Menzel: Wied. Ann. **51**, 559, 1894.
Scheel und Diesselhorst: Instr. 1896, 2.
Hansky: Compt. rend. **127**, 942, 1898.
Helmert: Berl. Ber. 1901, p. 329.
Defforges: Compt. rend. **117**, 205.
Eötvös: Wied. Ann. **59**, 354, 1896.

Neuntes Kapitel.

Messung der mittleren Erddichte.

§ 1. **Messungen von Maskelyne.** (1775.) Unter mittlerer Erddichte D versteht man die Dichte eines homogenen Körpers, der gleiche Masse und Volumen mit der Erde selbst hat [vergl. Formel (25) auf S. 39]. Zur Bestimmung derselben sind zahlreiche Messungen nach sehr verschiedenen Methoden angestellt worden; wir wollen zunächst die Maskelyne'schen Messungen erwähnen. Dieselben sind nach einer von Bouguer vorgeschlagenen Methode ausgeführt worden, welche darauf beruht, dafs man die Anziehung der Erde mit derjenigen eines sehr grofsen Körpers von bekannter Masse vergleicht. Als solcher

Fig. 218.



diente der sich isoliert erhebende Berg Shehallien in Schottland, dessen Volumen und mittlere Dichte angenähert bekannt waren. Sei m die Masse des Berges, $M = \frac{4}{3} \pi R^3 D$ die Masse der Erde, deren Radius hierbei gleich R gesetzt ist. Die Anziehung des Berges lenkt die Lotrichtungen Z und Z' (Fig. 218), die man beobachten würde, falls jene Anziehung nicht existierte, derart ab, dafs man statt ihrer die Richtungen Z_1 und Z_1' erhält. Die Punkte A und B lagen zu beiden Seiten des Berges auf demselben Meridiane; in diesem Falle haben die Ablenkungen der Lotlinien sowie der Horizontalebenen (H_1 und H_1' anstatt H und H') an den Punkten A und B den entgegengesetzten Sinn. Die Breitendifferenz λ der Punkte A und B wurde aus ihrer Entfernung durch geodätische Messungen gefunden; AP und BP bedeuten die Richtung der Himmelsachse. Wäre der Berg nicht vorhanden, so erhielte man für die Differenz der Polhöhen $\angle\, PBH' - \angle\, PAH$ den Wert λ. Während man jedoch in A und B die Polhöhen bestimmen

will, erhält man thatsächlich die Winkel PBH_1' und PAH_1. Die Differenz λ_1 derselben sei um ε gröſser als λ, so daſs also $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$ ist. Die Beobachtung ergab $\varepsilon = 11{,}66''$. Offenbar ist $\varepsilon = \angle H'BH_1' + \angle HAH_1$, d. h. der Winkel, um welchen der Berg die Vertikallinie ablenkt ist gleich $\frac{1}{2}\varepsilon$, falls sich A und B im selben Abstande r vom Berge befinden. Bedeutet F die Anziehung der Pendelmasse μ durch die Erde, f die Anziehung seitens des Berges, so ist offenbar

$$tg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{f}{F} = \frac{\frac{m\mu}{r^2}}{\frac{M\mu}{R^2}} = \frac{m R^2}{M r^2} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R D r^2}$$

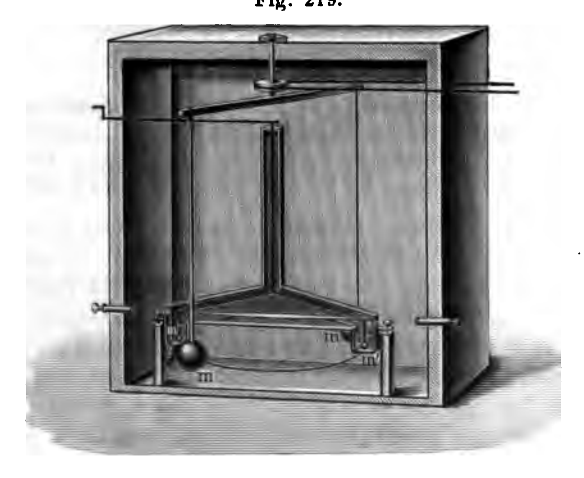
und hieraus folgt

$$D = \frac{3m}{4\pi R r^2 tg\,\frac{\varepsilon}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Maskelyne fand $D = 4{,}8$. Ähnliche Messungen führten James und Clarke (1855) am Berge Arthurs Seat in Schottland ($D = 5{,}32$) und E. D. Preston (1887) am Berge Habakab auf der zum Hawaiiarchipel gehörigen Insel Marui aus ($D = 5{,}13$).

§ **2. Messungen von Cavendish.** (1798.) Cavendish führte seine Messungen mittels der in Fig. 219 skizzierten unifilaren Dreh-

Fig. 219.



wage aus. An den Enden eines langen, leichten Stäbchens hingen zwei Metallkugeln m' und m', von denen jede 730 g wog. Die Gleichgewichtslage derselben wurde an einer horizontalen Skala mittels zweier

in unserer Figur sichtbaren Fernröhre abgelesen. Zwei grofse Bleikugeln m und m konnten den Kugeln m' derart von zwei Seiten her genähert werden, dafs sich ihre auf letztere ausgeübten Anziehungen summierten und die Wage um einen gewissen sehr kleinen Winkel drehten. Dadurch, dafs man die horizontale, die Bleikugel tragende Stange um die mittlere Achse des ganzen Apparates (wie durch eine Linie in der Figur angedeutet) drehte, konnte man die Bleikugeln den Kugeln m' von der entgegengesetzten Seite her nähern und eine Drehung der Wage im entgegengesetzten Sinne hervorrufen. Da man ferner die Länge $2l$ des Wagebalkens und den Wert δ eines Skalenteiles kannte, konnte man aus der Zahl n der Skalenteile, um welche sich die Gleichgewichtslage der Kugeln verschob, den Winkel φ bestimmen, um den sich die Wage dank der wechselseitigen Anziehung der beiden Kugelpaare gedreht hatte. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{n\delta}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Drehung der Wage um den Winkel φ wird durch das Kräftepaar hervorgerufen, dessen Moment gleich $C\varphi$ ist; vergl. (19) S. 359. Bezeichnet man mit F die Kraft der gegenseitigen Anziehung jedes einzelnen Kugelpaares m und m', so hat man

$$2Fl = C\varphi = C\frac{n\delta}{l} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Koeffizient C wird durch Messung der Schwingungsdauer T der Drehwage erhalten; wir sahen [vergl. (23) S. 361], dafs

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{C}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

ist, wo K das Trägheitsmoment des Stäbchens samt den Kugeln m' in Bezug auf die Drehungsachse bedeutet. Vernachlässigt man die Masse des Stäbchens selbst, so ist $K = 2m'l^2$ und man erhält nach Formel (4)

$$C = \frac{2m'l^2\pi^2}{T^2}.$$

Setzt man diesen Wert in Formel (3) ein, so erhält man

$$F = \frac{\pi^2 n\delta m'}{T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ist m' in Grammen und T in Sekunden ausgedrückt, so erhält man die Anziehungskraft F nach dieser Formel in Dynen. Sei ferner ϱ der Zentrumsabstand der Kugeln m und m', während sie die Anziehung F auf einander äufsern, r der Radius, d die Dichte der Bleikugeln m, R der Erdradius, D die Erddichte, M die Masse der Erde und endlich P das Gewicht der kleinen Kugeln m', so haben wir dann

$$F = c\,\frac{m\,m'}{\varrho^2}\,; \qquad P = m'g = c\,\frac{M\,m'}{R^2} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

wo c derselbe Koeffizient ist, der in (1) auf S. 204 mit C bezeichnet war. Die Formeln (6) geben, wenn man $m = \frac{4}{3}\pi r^3 d$ und $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D$ setzt

$$\frac{F}{P} = \frac{F}{m'g} = \frac{m\,R^2}{M\varrho^2} = \frac{r^3 d}{\varrho^2 R D},$$

und hieraus folgt

$$F = \frac{r^3 d\,g\,m'}{\varrho^2 R D} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

Setzt man (5) und (7) einander gleich, so erhält man

$$D = \frac{g\,T^2 r^3 d}{\pi^2 n\,\delta\,\varrho^2 R} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (8)$$

Cavendish benutzte zu seinen Messungen zwei verschiedene Fäden; für den dünneren war $T = 840$ Sek., für den dickeren $T = 420$ Sek. Als Mittel aus 29 Messungen fand er

$$D = 5{,}45.$$

§ 3. Neuere Messungen nach der Methode von Cavendish. Die Gröſse D ist sowohl in früherer, als auch in neuerer Zeit von vielen Seiten nach der oben angegebenen Methode mittels der Drehwage bestimmt worden. Reich (1837 bis 1852) hat zuerst diese Bestimmungen nach einer genaueren Methode, als die von Cavendish gegebene, wiederholt; er fand endgültig (1852)

$$D = 5{,}58$$

Baily (1842) fand $D = 5{,}67$.

In den Jahren 1870 bis 1878 führten Cornu und Baille eine Reihe bemerkenswerter Messungen aus, wobei sie alle nur erdenklichen Vorsichtsmaſsregeln beobachteten und die neuesten und genauesten Meſsmethoden in Anwendung brachten. Um die Erschütterungen zu vermeiden, welche bei der Lagenänderung der schweren Kugeln so gut wie unvermeidlich sind, brachten sie vier guſseiserne Hohlkugeln (von 12 cm Durchmesser) paarweise in symmetrische Lage zu den kupfernen Kugeln der Drehwage Letztere wogen je 109 g. Jedes Paar der einander übers Kreuz gegenüberliegenden Kugeln wurde abwechselnd mit Quecksilber gefüllt, welches aus einem solchen Paar in das andere übergeführt wurde. Cornu und Baille fanden (1878)

$$D = 5{,}56.$$

Sehr genaue Messungen haben ferner Boys (1893) und C. Braun (1896) ausgeführt. Boys benutzte zum Aufhängen die von ihm erfundene Quarzfäden. Die anziehenden Bleikugeln hatten Durchmesser von $4^1/_4$ und $2^1/_4$ Zoll; die Durchmesser der angezogenen Goldkugeln betrugen 0,2 resp. 0,25 Zoll. Die Versuche wurden im Kellerraume des Laboratoriums (Clarendon) zu Oxford ausgeführt. Boys fand $D = 5{,}527$. Braun hing einen Kupferstab an einem sehr dünnen Messingdrahte auf; das Gewicht jeder der kleinen Kugeln betrug 55 g. Als anziehende Massen dienten mit Quecksilber gefüllte gufseiserne Hohlkugeln. Die Drehwage selbst befand sich unter einem Rezipienten, aus welchem die Luft ausgepumpt war. Braun fand ebenfalls $D = 5{,}527$, also denselben Wert wie Boys.

§ 4. Andere Methoden zur Bestimmung der mittleren Erddichte. Airy (1866) bestimmte die mittlere Erddichte D, indem er die Beschleunigung g an der Erdoberfläche mit der Beschleunigung g' in einer Tiefe h unter der Erdoberfläche verglich. Unter der Voraussetzung, dafs der Erdradius gleich $r + h$ ist und die Erde selbst aus einer Kugel mit dem Radius r und der Dichte D und aus einer Kugelschicht von der Dicke h und der Dichte d besteht, sieht man leicht ein, dafs für die Erdoberfläche

$$g = k \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{(r+h)^2} + k \frac{\frac{4}{3}\pi[(r+h)^3 - r^3] d}{(r+h)^2}$$

ist, wo k den Proportionalitätsfaktor bedeutet. Vernachlässigt man das Quadrat des Bruches $\frac{h}{r}$, so kommt

$$g = \frac{4}{3}\pi k[(r - 2h)D + 3hd].$$

Ferner ist offenbar

$$g' = k \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3}\pi k r D.$$

Hieraus folgt

$$D = \frac{d}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right)\frac{r}{3h}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Bestimmungen von g und g' wurden nach der Methode von Borda ausgeführt, wobei die eine Uhr mit dem Sekundenpendel sich an der Erdoberfläche, die andere Uhr unter der Erdoberfläche befand. Beide Uhren waren miteinander elektrisch verbunden, so dafs sie einen genau gleichen Gang hatten. Zur Bestimmung von D mufs man jedoch

offenbar die mittlere Dichte d der Oberflächenschicht kennen, worin ein Nachteil der Methode besteht. Airy nahm $d = 2{,}5$ an; ferner $\frac{r}{h} = 16\,000$ und fand $1 - \frac{g}{g'}$ gleich $\frac{1}{19\,200}$. Diese Zahlen geben $D = 6{,}57$. Haughton verbesserte später die Airyschen Rechnungen und fand $D = 5{,}48$. R. Sterneck fand $D = 5{,}52$, indem er g an der Erdoberfläche und in einer Tiefe von 1100 m mit einander verglich. Carlini (1824), Mendenhall (1880) und E. D. Preston (1892) beobachteten die Pendelschwingungen auf dem Gipfel hoher Berge (ersterer auf dem Mont Cenis, der zweite von ihnen auf dem Berge Fusiama bei Tokio, letzterer auf dem Berge Mauna Kea auf der Insel Hawaï); Carlini fand $D = 4{,}837$, Mendenhall $D = 5{,}77$, E. Preston $D = 5{,}13$.

Wilsing (1885 bis 1887) beobachtete die durch eine anziehende Masse bewirkte seitliche Ablenkung eines überaus empfindlichen Pendels und fand zunächst $D = 5{,}594$, darauf nach Anbringung verschiedener Verbesserungen des Apparates $D = 5{,}579 \pm 0{,}012$.

Jolly (1881) mafs die Anziehung einer beträchtlichen Bleimasse (von 5775 kg Gewicht) auf einen auf der Wagschale befindlichen Körper und fand $D = 5{,}692$.

Ferner bestimmten A. König und Richarz die Gröfse D auf folgende Art: unmittelbar über einem grofsen Bleiklotz befand sich das eine Paar Wagschalen, während das andere mit dem obigen durch 226 cm lange Stangen, die durch den Bleiklotz hindurchführten, verbunden war und sich genau unterhalb des ersteren befand. Der Körper wurde dann beispielsweise zuerst auf die linke obere Wagschale, die Gewichte auf die rechte untere gebracht; darauf der Körper auf die linke untere, die Gewichte auf die rechte obere. Durch Wiederholung derselben Manipulation, jedoch ohne den Bleiklotz (um die Wirkung auszuschliefsen, welche durch die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe hervorgebracht war), konnte man die Gröfse der Anziehung dieser Masse und hieraus die mittlere Erddichte D finden.

Definitive Resultate veröffentlichten (1896) Richarz und Krigar-Menzel. Sie fanden:

$$D = 5{,}505 \pm 0{,}009.$$

Für den Koeffizienten C in der Newtonschen Formel, vergl. (1) auf S. 204, also für die in Dynen ausgedrückte Gröfse der gegenseitigen Anziehung zweier Grammmassen, die sich in Entfernung von 1 cm befinden, geben die genannten Autoren folgende Zahl

$$C = (6{,}685 \pm 0{,}011) \,.\, 10^{-8}.$$

Die benutzte Bleimasse hatte ein Gewicht von mehr als 100 000 kg. Poynting (1890) hing an die Enden eines Wagebalkens Kugeln, deren Einzelgewicht etwa 21,57 kg betrug. Eine Kugel von 153,41 kg Gewicht wurde dann abwechselnd unter die eine oder andere der obigen Kugeln

gebracht und die hierdurch bewirkte Änderung der Gleichgewichtslage beobachtet. Poynting fand hierbei $D = 5,4934$. Berget untersuchte die Anziehung einer Wasserschicht an der Oberfläche eines Sees, dessen Niveau um 1 m geändert werden konnte; er fand $D = 5,41$.

Vergleicht man die Resultate der verschiedenen Messungen von D, so sieht man, dafs dieselben sehr beträchtlich voneinander differieren. Am meisten Zutrauen verdienen die folgenden Resultate:

	D
Cornu und Baille (1878)	5,56
Boys (1893)	5,527
Braun (1896)	5,527
Poynting (1890)	5,493
Richarz und Krigar-Menzel (1896) . .	5,505

Erteilt man den vier letzten Zahlen das gleiche Gewicht (vergl. S. 283), so erhält man im Mittel

$$D = 5,51$$

d. h. eine Zahl, die kleiner als die gewöhnlich angenommene $D = 5,55$ ist.

A. L. Gerschun hat 1899 eine neue Methode zur Bestimmung der mittleren Erddichte in Vorschlag gebracht, die auf folgendem beruht. Nähert man der horizontalen Oberfläche einer Flüssigkeit von oben her eine Kugel vom Radius r und der Dichte δ, so wird die Oberfläche konvex, wobei die Vertikalebenen, welche durch das Kugelzentrum gehen, diese Fläche in Kurven schneiden. Der Krümmungsradius ϱ dieser Kurven im höchsten Punkte derselben, der mit dem Kugelzentrum auf der gleichen Vertikale liegt, wird aus folgender Gleichung bestimmt

$$\frac{R}{\varrho} = 1 + \frac{\delta}{D}\left(\frac{r}{h}\right)^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

wo R der Erdradius, D die Erddichte und h die Entfernung des Kugelzentrums von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Wie Formel (10) zeigt, hängt bei gegebenem δ (wenn also das Material der Kugel bekannt ist) der Radius ϱ nur vom Verhältnisse $r : h$ ab und hieraus geht hervor, dafs man eine kleine Kugel von möglichst grofser Dichte verwenden kann, die man der Flüssigkeitsoberfläche so nahe als möglich bringt. Für eine Platinkugel vom Radius $r = 0,9\,h$ erhält man als Krümmungsradius $\varrho = 1650$ km. Gerschun hat auch eine optische Methode zur Messung solcher grofsen Krümmungsradien angegeben, von der im zweiten Bande (vergl. sphärische Aberration bei der Reflexion) die Rede sein soll. Hat man ϱ bestimmt, so findet man D nach Formel (10). A. Sella hat diese Methode einer kritischen Besprechung unterworfen; ausgeführt wurde sie bisher noch nicht.

Die Dichte der Erdrinde ist, wie bekannt, im Mittel nicht gröfser als 2,3; hieraus folgt, dafs das Erdinnere eine sehr viel gröfsere

Dichte besitzen muſs. Roche gab eine Formel für den Wert der Erddichte in der Entfernung x vom Erdmittelpunkte; es ist das die folgende

$$d = 10{,}6\left(1 - 0{,}8\,\frac{x^2}{R^2}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

in der R den Erdradius bedeutet. Diese Formel giebt für das Erdzentrum $d_0 = 10{,}6$, für die Erdoberfläche $d = 2{,}1$. Wiechert nimmt an, die Erde bestehe aus einer Kugel, deren Radius gleich 0,8 des Erdradius ist und aus einer Oberflächenschicht von 1400 km Dicke. Der Erdkern besteht nach seiner Meinung gröſstenteils aus Eisen. Licondès hat vorgeschlagen, in der Formel von Roche anstatt der Zahlen 10,6 und 0,8 die Werte 10 und 0,75 zu substituieren.

Es seien an dieser Stelle einige Worte über die bemerkenswerten Apparate von Eötvös gesagt, obgleich dieselben offenbar nicht dazu bestimmt waren, die Gröſse D zu ermitteln. Einer derselben bestand aus einer unifilaren Drehwage, die zwischen zwei Säulen aus Blei angebracht war. Die Schwingungsdauer des Stäbchens war gleich 641 Sek., wenn die Gleichgewichtslage mit der die Säulen verbindenden Geraden zusammenfiel und gleich 860 Sek., wenn die Gleichgewichtslage senkrecht zu dieser Geraden war. Hieraus erhält man für den Koeffizienten C in der Gravitationsformel, d. h. für die Kraft mit der sich zwei um einen Centimeter voneinander entfernte Grammmassen anziehen

$$C = 6{,}65 \,.\, 10^{-8}.$$

Ein anderer Apparat (der Gravitationskompensator) zeigte die Anziehung einer 300 kg schweren Masse in 5 m Entfernung vom Apparate an. Bei einem dritten Apparate (dem Gravitationsmultiplikator) brachte Eötvös die anziehenden Massen bald auf die eine, bald auf die andere Seite des Stäbchens und gelang es ihm auf diese Weise das Stäbchen gewissermaſsen in Schwung zu bringen und damit Ablenkungen desselben zu erhalten, welche diejenigen bei einfacher Anziehung derselben Massen 150 mal übertrafen.

Litteratur.

Maskelyne and Hutton: Phil. Trans. 1775 und 1778.
Cavendish: Phil. Trans. t. **83**, 388, 1798; Gilb. Ann. **2**.
E. D. Preston: Sill. Journ. (3) **36**, 305, 1888; Bull. of the phys. Society of Washington **12**, 1892 bis 1894; Ref. Journ. de phys. (2) **8**, 188, 1889; (3) **6**, 542, 1897.
Reich: Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde. Freiberg 1838; Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. I, 1852.
Baily: Mem. of the R. Astron. Soc. London **14** 1843; Ann. chim. et phys. (3) **5**, 338, 1842.
Cornu et Baille: Compt. rend. **86**, 571, 699, 1001, 1878.
Airy: Phil. Trans. 1856.
R. Sterneck: Wien. Ber. **108**, 697, 1900.

Wilsing: Berl. Sitzungsber. 1885, S. 13; Publik. d. astrophys. Observ. zu Potsdam. Nr. 22, VI, 2, S. 35, 1887; Nr. 23, VI, S. 133, 1889.
Jolly: Abhandl. d. bayr. Akad. 2. Kl. 13 u. 14; Wied. Ann. **14**, 331, 1881.
König u. Richarz: Wied. Ann. **24**, 664, 1885; Berl. Ber. 1884, S. 1203.
Richarz u. Krigar-Menzel: Berl. Ber. 1896, S. 1305; Wied. Ann. **66**, 177, 1898; Instr. **19**, 40, 1899; Phys. Ztschr. **2**, p. 135, 1901.
Berget: Compt. rend. **116**, 1501, 1893.
Poynting; Phil. Trans. **182** (A), 565, London 1891; gesondert erschien: The mean density of the earth. London 1894.
Boys: Nature (engl. Zeitschrift) **50**, 330, 366, 417; Proc. R. Soc. **46**, 296; **56**. 131; Phil. Trans. **186**, 1, London 1895.
C. Braun: Denkschrift d. math.-naturw. Klasse d. Wiener Akad. **64**, 187, 1896; Beibl. **21**, 561, 1897.
Wiechert: Verh. d. Ges. d. Naturf. Frankfurt, 1897, S. 42; Beibl. **21**, 692, 1897.
Licondès: Compt. rend. **128**, 160, 1899.
Guillaume: Séances Soc. fr. d. Phys. 1893, p. 238.
R. v. Eötvös: Wied. Ann. **59**, 385, 1896.
A. L. Gerschun: Compt. rend. **129**, 1013, 1899.
A. Sella: Arch. sc. natur. (4) **10**, 322, 1900.

Vierter Abschnitt.

Lehre von den gasförmigen Körpern.

Erstes Kapitel.

Die Dichte der Gase.

§ 1. **Physik der Molekularkräfte. Fundamentaleigenschaften der Gase. Das ideale Gas.** Es ist vielfach üblich, die Lehre von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern in einem besonderen Abschnitte unter der Überschrift „Physik der Molekularkräfte" zu vereinigen. Diese Einteilung entspricht jedoch dem gewöhnlichen Inhalte des betreffenden Abschnittes nicht vollständig; bei den spärlichen Kenntnissen, die wir von der Bedeutung der intramolekularen Kräfte für die verschiedenen physikalischen Erscheinungen besitzen, können wir in vielen Fällen nicht einmal sagen, ob diese Kräfte bei einer gegebenen Erscheinung mitwirken oder nicht. Dagegen können wir die Mitwirkung dieser Kräfte bei vielen Erscheinungen vermuten, die gewöhnlich in der Lehre von der Wärme, dem Lichte, Magnetismus und sogar in der Lehre von der Elektricität behandelt werden. Wegen dieser Unbestimmtheit des Begriffes „Physik der Molekularkräfte" wollen wir denselben lieber ganz vermeiden und wollen uns darauf beschränken in drei besonderen Abschnitten die Lehren von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern zu behandeln.

Es ist von verschiedenen Seiten der Versuch gemacht worden, ein Gesetz der Molekularkräfte aufzustellen, d. h. ein Gesetz, welches die Wechselwirkung zweier stofflichen Moleküle in Abhängigkeit von ihrer Entfernung ausdrückt. Wir wollen die verschiedenen in Vorschlag gebrachten Formeln hier nicht wiedergeben; man findet Angaben hierüber in dem Litteraturanhang dieses Kapitels, insbesondere in der von Fürst B. Galitzin gegebenen Übersicht.

Für die Physik der Molekularkräfte erweist sich die Einführung einer für die verschiedenen Stoffe verschiedenen Masseneinheit, die von der Natur des betreffenden Stoffes abhängt, von grofsem Nutzen. Wir hatten von derselben auf Seite 20 gesprochen; es ist dies das sogenannte Grammmolekül. Wie wir sahen, enthält dasselbe so viel Gramm des betreffenden Stoffes, als das Molekulargewicht des letzteren Einheiten enthält. So stellen z. B. 2 g Wasserstoff, 32 g Sauerstoff, 18 g Wasser, 58 g NaCl u. s. w. je ein Grammmolekül der genannten Stoffe dar.

Indem wir uns dem Beispiele vieler neueren Lehrbücher anschliefsen, beginnen wir mit den gasförmigen Körpern, als den in vieler Beziehung einfachsten Körpern. Der innere Bau der Gase ist nach den neueren Anschauungen ein relativ einfacher; dasselbe gilt von den Gesetzen, welchen die in Gasen sich abspielenden Erscheinungen folgen. Die typischen Eigenschaften der Gase sind die folgenden:

1. Die Gase setzen jeder äufseren Ursache, welche ihre Form zu ändern sucht, ohne zugleich das Volumen zu verändern, einen sehr geringen Widerstand entgegen.

2. Die Gase setzen jeder äufseren Ursache, welche ihr Volumen zu vermindern strebt, einen relativ geringen Widerstand entgegen.

3. Gase, welche keinem äufseren Einflusse (z. B. der Schwerkraft) unterworfen sind, erfüllen gleichmäfsig das ganze ihnen zur Verfügung stehende Volumen und üben auf Körper, welche dieses Volumen begrenzen, einen bestimmten Druck aus. Letzteren pflegt man in Kilogrammen pro Quadratmeter der entsprechenden Oberfläche oder in Millimetern (Centimetern) der Höhe einer Quecksilbersäule auszudrücken und als Druck oder Spannung des Gases zu bezeichnen.

4. Gegeneinander verhalten sich die Gase fast indifferent, wenn man die Fälle ausschliefst, wo sich dieselben chemisch beeinflussen; obiger Satz besagt, dafs sich zwei Gase in einem Gefäfse in beliebigen relativen Mengen miteinander vollkommen mischen, einander gewissermafsen durchdringen und ein in allen seinen Teilen gleichartiges Gemenge bilden.

Neben obigen sozusagen augenfälligen Kennzeichen besitzen die Gase noch andere charakteristische Eigenschaften und zwar die folgenden:

1. Alle Gase gehorchen angenähert dem Boyle-Mariotteschen Gesetze: Die Spannung einer gegebenen Gasmenge ändert sich bei konstanter Temperatur umgekehrt proportional ihrem Volumen.

2. Alle Gase gehorchen angenähert dem Gay-Lussacschen Gesetze, nach welchem bei konstantem Druck das Volumen v einer gegebenen Gasmenge bei der Temperatur t^0 und das Volumen v_0 bei 0^0 durch die Relation $v = v_0\,(1 + \alpha t)$ miteinander verbunden sind. Hierbei ist für alle Gase $\alpha = 0{,}00366$.

3. Alle Gase gehorchen angenähert dem Avogadroschen Gesetze: In gleichen Volumina verschiedener Gase bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke ist die gleiche Anzahl Moleküle enthalten.

4. Alle Gase gehorchen angenähert dem Jouleschen Gesetze: Sie leisten keine innere Arbeit (vergl. S. 111 und 112), wenn sich ihr Volumen ändert, d. h. die Kohäsion ihrer Moleküle ist äufserst gering.

Es soll hier noch nicht untersucht werden, inwieweit die genannten vier Eigenschaften voneinander unabhängig sind oder sich auseinander ergeben.

Die in Wirklichkeit existierenden „realen" Gase sind speziell dadurch charakterisiert, dafs sie den erwähnten vier Gesetzen eben nur angenähert entsprechen. Es treten „Abweichungen" von diesen Gesetzen auf und zwar findet man, dafs diese Abweichungen um so gröfser sind, je näher sich die Gase dem Zustande der Verflüssigung befinden. Für komprimierte Kohlensäure sind obige Abweichungen aufserordentlich grofs; für verdünnten Wasserstoff äufserst gering. Geht man in Gedanken in dieser Richtung noch etwas weiter, so gelangt man zu der Vorstellung von einem fingierten, d. h. in der Natur augenscheinlich nicht existierenden Stoffe, welcher den Gesetzen von Boyle-Mariotte, Gay-Lussac und Avogadro absolut genau entspricht und zwischen dessen Molekülen nicht die geringste Kohäsion vorhanden ist, so dafs seine innere Arbeit genau gleich Null ist. Ein solcher Stoff heifst ein vollkommenes oder ideales Gas.

§ 2. Dichte der Gase (und überhitzten Dämpfe) und deren Molekulargewicht. Wir sahen bereits (auf Seite 43), dafs man unter Dichte eines Gases zwei verschiedene Gröfsen versteht: die Dichte D eines Gases in Bezug auf Wasser — diese ändert sich bei Verdünnung und Kompression der Gase in den weitesten Grenzen, — und die Gasdichte δ bezogen auf Luft von gleicher Temperatur und Druck. Die letztere Gröfse stellt eine für ein gegebenes Gas nahezu konstante Gröfse dar und ändert sich nur insoweit, als die Luft und das in Betracht gezogene Gas nicht in gleicher Weise vom Boyle-Mariotteschen und Gay-Lussacschen Gesetze abweichen. Die genannten beiden Gesetze sollen der Kürze halber im folgenden durch B.-M. und G.-L. bezeichnet werden. Man betrachtet bisweilen die Methoden zur Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen gesondert und zwar letztere in der Wärmelehre. Aus der Elementarphysik ist jedoch schon bekannt, dafs Dämpfe jeder beliebigen Flüssigkeit sich von Gasen durchaus nicht unterscheiden, falls nur ihre Temperatur hinlänglich weit über derjenigen liegt, welche der Siedetemperatur für den herrschenden Druck entspricht, d. h. falls sie nur genügend

weit vom Sättigungsgrad entfernt sind. Andererseits können, wie bekannt, alle „Gase" im gewöhnlichen Sinne (H, O, N, Cl, CO u. s. w.) als weit vom Sättigungspunkt entfernte Dämpfe von Flüssigkeiten angesehen werden. Daher wollen wir bei Besprechung der Gasdichte zugleich auch die Methoden zur Bestimmung der Dichte von Dämpfen solcher Stoffe betrachten, die bei gewöhnlicher Zimmertemperatur Flüssigkeiten darstellen. In jedem Falle nehmen wir aber an, dafs die Dämpfe weit vom Sättigungspunkte entfernt sind.

Aus dem Avogadroschen Gesetze folgt offenbar, dafs das Gewicht eines Moleküls der verschiedenen Gase proportional der Dichte δ des entsprechenden Gases ist. Man pflegt nun bei Bestimmung des Molekulargewichtes μ als Gewichtseinheit das Gewicht eines Atoms Wasserstoff anzunehmen; da das Wasserstoffmolekül aus zwei Atomen besteht, so ist für den Wasserstoff $\mu = 2$. Sauerstoff ist 15,88 mal schwerer als Wasserstoff, mithin ist für ihn $\mu = 31{,}76$. Überhaupt ist für ein beliebiges Gas, dessen Dichte in Bezug auf Luft gleich δ, in Bezug auf Wasserstoff gleich $14{,}45\,\delta$ ist, das Molekulargewicht μ gleich

$$\mu = 28{,}9\,\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Das Volumen eines Grammmoleküls, d. h. einer solchen Gasmenge, deren Gewicht in Grammen gleich dem Molekulargewicht des Gases ist, nennt man das Molekularvolumen. Aus dem Avogadroschen Gesetze folgt, dafs bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck alle Gase das gleiche Molekularvolumen v_m besitzen müssen, wenn man die oben erwähnten Abweichungen vernachlässigt. Die Gröfse v_m ist also das Volumen von 2 g Wasserstoff, 32 g Sauerstoff, 18 g Wasserdampf u. s. w. Da nun 2 g Wasserstoff bei 0° und 760 mm Druck ein Volumen besitzen, welches gleich 22,32 Litern ist, so haben wir allgemein: das Molekularvolumen v_m eines Gases ist bei 0° und bei dem Druck einer Atmosphäre gleich

$$v_m = 22{,}32 \text{ Liter} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1,\text{a})$$

Gehen wir nunmehr dazu über, die Methoden der Dichtbestimmung von Gasen oder Dämpfen zu betrachten.

§ 3. Regnaults Methode der Bestimmung von δ und D. Der Gedanke, welcher dieser Methode zu Grunde liegt, ist der folgende: Ein Glasballon, dessen Volumen etwa 10 Liter beträgt, wird mit getrocknetem Gas von 0° und dem Drucke H gefüllt und sein Gewicht P bestimmt; hierauf wird bei 0° das Gas verdünnt, bis es den sehr geringen Druck h ausübt; das Gewicht des Glasballons sei nun p. Es ist dann das Gewicht Π des Gases, welches bei 0° und 760 mm Druck das Volumen v des Glasballons erfüllt

$$\Pi = (P - p)\,\frac{760}{H - h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und hieraus findet man die Dichte D

$$D = \frac{(P - p)\,760}{v\,(H - h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Haben dieselben Messungen für trockene Luft die Zahlen P', p', H' und h' ergeben, so ist für sie

$$D' = \frac{(P' - p')\,760}{v\,(H' - h')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Endlich ist die Dichte δ des untersuchten Gases

$$\delta = \frac{D}{D'} = \frac{P - p}{P' - p'} \cdot \frac{H' - h'}{H - h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

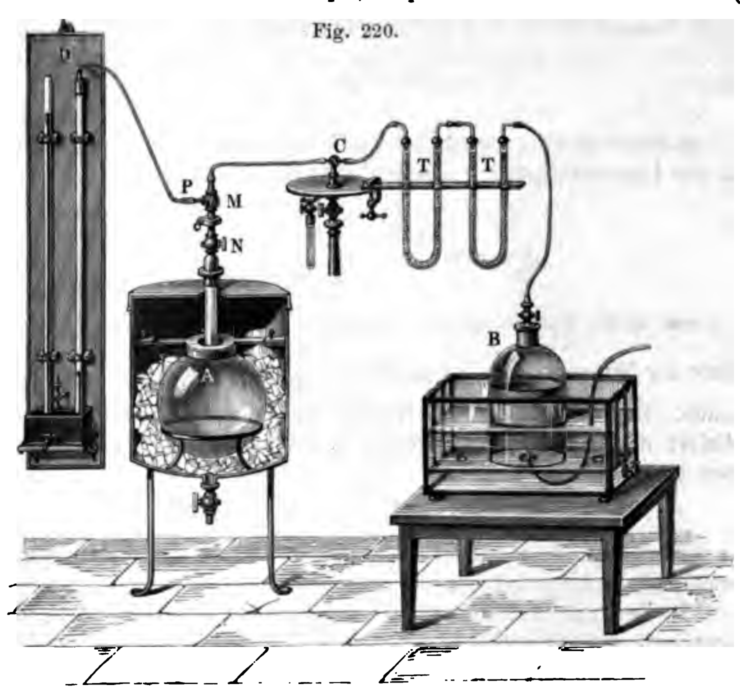
Regnault umgab den Ballon A (Fig. 220) mit schmelzendem Eise und verband ihn mit dem Manometer D (vergl. Kap. III, § 7; neben dem Manometer befindet sich auf demselben Brett ein Gefäßbarometer), der Luftpumpe C, den U-förmigen Trockenröhren T und dem Behälter B, in welchem sich das zu untersuchende Gas angesammelt hat. Bei der zweiten Beobachtung (wenn der Druck gleich h war), befand sich das Quecksilber in beiden Röhren D beinahe in der gleichen Höhe. Bei der Gewichtsbestimmung des Glasballons hat man eine Korrektion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft (vergl. S. 348) einzuführen, die sich zugleich mit dem Drucke, der Temperatur und Feuchtigkeit der Luft ändert. Um diese Korrektion, die im Hinblick auf das sehr geringfügige Gewicht $P - p$ sehr bedeutend ist, zu umgehen, brachte **Regnault** den Glasballon A mit einem anderen, dessen äußeres Volumen genau gleich demjenigen von A war, ins Gleichgewicht. Beide Ballons wurden von unten an die Wagschalen (Fig. 221) gehängt und waren dabei, um die Wirkung etwaiger Luftströmungen zu verhindern, in einem besonderen Schränkchen eingeschlossen. Um die Volumina beider Glasballons genau gleich zu machen, hing **Regnault** an den zweiten, der an und für sich etwas kleiner war als A, eine geschlossene Röhre von solcher Länge, daß der Ballon A einerseits und der zweite mit der Röhre andererseits einen gleichen Gewichtsverlust erlitten, wenn sie in Wasser tauchten. Hat man beide Ballons einmal ins Gleichgewicht gebracht, so ändert sich dasselbe nicht mehr, wie sehr sich auch der Luftzustand ändern mag, da ja der Gewichtsverlust beider Ballons immer der gleiche bleibt. Man braucht mithin die vorerwähnte Korrektion gar nicht einzuführen.

Um die Dichte D' der Luft in Bezug auf Wasser nach Formel (4) zu bestimmen, muß man das Volumen v des Ballons bei 0° kennen. **Regnault** verfuhr hierbei folgendermaßen: Er wog zunächst den g e ö f f n e t e n Ballon A direkt, d. h. ohne ihn mit dem zweiten ins Gleichgewicht zu bringen. Das so erhaltene Gewicht P bestand aus dem Gewichte P_1 des Glasballons, dem Gewichte Π_1 der in ihm ent-

haltenen Luft weniger dem Gewichtsverluste ω beider in Luft. Somit war

$$P = P_1 + \Pi_1 - \omega \quad \text{(6)}$$

Fig. 220.



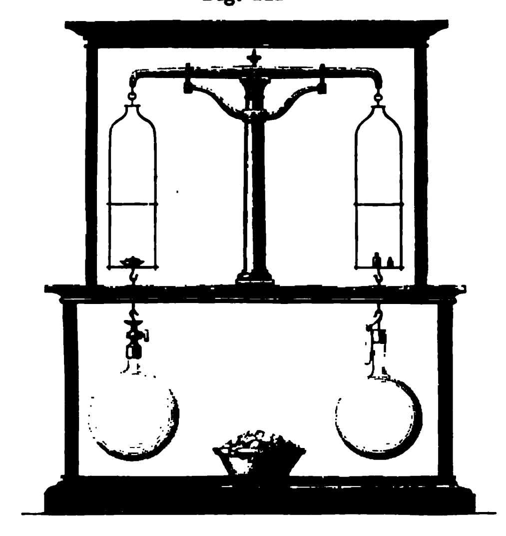
Hierauf wurde der Ballon A mit reinem Wasser von 4^0 gefüllt und das Gewicht Q bestimmt

$$Q = P_1 + E_0 - \omega' \quad (7)$$

wo E_0 das Gewicht des Wassers und ω' den Gewichtsverlust bedeutet. Die Gröfsen ω und ω' unterscheiden sich nur sehr wenig voneinander; ihre Differenz $\omega' - \omega = \omega_0$ kann mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden. Subtrahiert man nun (6) von (7), so erhält man

$$Q - P + \omega_0 = E_0 - \Pi_1 \quad (8)$$

Fig. 221.



Die vorhergehenden Messungen haben das Gewicht Π' der trockenen Luft, welche den Ballon bei 0° und 760 mm Druck erfüllt, ergeben; analog Formel (2) erhalten wir hier für Luft

$$\Pi' = (P' - p') \frac{760}{H' - h'} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Ist die erste Wägung (6) bei der Temperatur von t^0, dem Drucke H und der Luftfeuchtigkeit h ausgeführt worden, so ist

$$\Pi_1 = \Pi' \frac{\left(H - \frac{5}{8} h\right)(1 + kt)}{(1 + \alpha t)\, 760} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

wo k und α die Ausdehnungskoeffizienten von Gas und Luft sind; die Dichte der Wasserdämpfe ist hierbei zu $\frac{5}{8}$ (vergl. S. 350) angenommen worden. Das Gewicht E_0 des Wassers ist gleich dem Volumen v multipliziert mit der Dichte 0,999 881 des Wassers bei 0°; Formel (8) liefert demnach

$$0{,}999\,881\, v = Q - P + \omega_0 + \Pi_1 \quad \ldots \quad (11)$$

Kennt man v, so findet man die Dichte D' der Luft nach der Formel (4).

Die Versuche von Regnault ergeben für das Gewicht e_0 eines Liters Luft von 0° und 760 mm Druck für Paris $e_0 = 1{,}293\,187$ g. Die von Mendelejeff an den Regnaultschen Rechnungen angebrachten Korrektionen haben die Zahl $e_0 = 1{,}293\,47 \pm 0{,}000\,28$ g ergeben. Das Gewicht e_0 ändert sich mit Änderung der Schwerkraft, es ist der Beschleunigung g proportional.

Die letztere Zahl für e_0 kann man auch folgendermaſsen schreiben: $e_0 = 0{,}131\,852\, g$ Gramm, wo g in den Einheiten Meter-Sekunde ausgedrückt ist. Neuere Untersuchungen von Leduc (1892) und Rayleigh haben zu Resultaten geführt, welche von denen Regnaults nur sehr wenig abweichen. Durch kritische Untersuchung aller entsprechenden Arbeiten ist Mendelejeff zu dem Endresultate gelangt, daſs das Gewicht eines Liters trockener Luft von 0° bei 760 mm gleich ist

$$e_0 = 0{,}131\,844\, g\, \text{g} \pm 0{,}000\,10\, \text{g} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

In welcher Weise g von der Höhe und Breite des Beobachtungsortes abhängt, ist auf S. 391 auseinandergesetzt worden.

Für Petersburg giebt Mendelejeff die Zahl

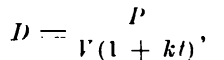
$$e_0 = 1{,}294\,55\, \text{g} \pm 0{,}000\,10\, \text{g} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Leduc hat 1898 für Paris ($g = 981$ cm) die Zahl $e_0 = 1{,}293\,16$ g und bei einem Druck von einer Megadyne auf den Quadratcentimeter $e_0' = 1{,}275\,73$ g gegeben (vergl. weiter unten Kap. III, § 1).

§ 4. Methoden von Gay-Lussac und W. Hofmann zur Bestimmung der Dampfdichte. In ein gufseisernes, mit Quecksilber gefülltes Gefäfs tauchen eine sorgfältig kalibrierte, anfänglich ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Röhre *g* (Fig. 222) und ein mit Wasser gefüllter Cylinder *m*. Das Gefäfs wird von unten erwärmt, die Temperatur des Wassers wird durch ein oder mehrere Thermometer angegeben. In den Raum über dem Quecksilber der kalibrierten Röhre wird ein zugeschmolzenes Glaskügelchen gebracht, welches ein gewisses Quantum Flüssigkeit vom Gewicht P enthält. Beim Erwärmen des Apparates platzt das Kügelchen, die darin enthaltene Flüssigkeit verdampft und das Quecksilber sinkt herab. Es sei nun V das vom Dampf bei 0^0 erfüllte Volumen der Röhre, t die Temperatur und H die Spannung des Dampfes, die gleich dem Barometerstande ist, vermehrt um den Druck der Wassersäule und vermindert um den Druck der in der kalibrierten Röhre g enthaltenen Quecksilbersäule. Für die Dampfdichte D haben wir unter den Versuchsbedingungen

Fig. 222.





$$D = \frac{P}{V(1 + kt)},$$

wo k der Ausdehnungskoeffizient des Glases ist; für die Dichte δ erhalten wir

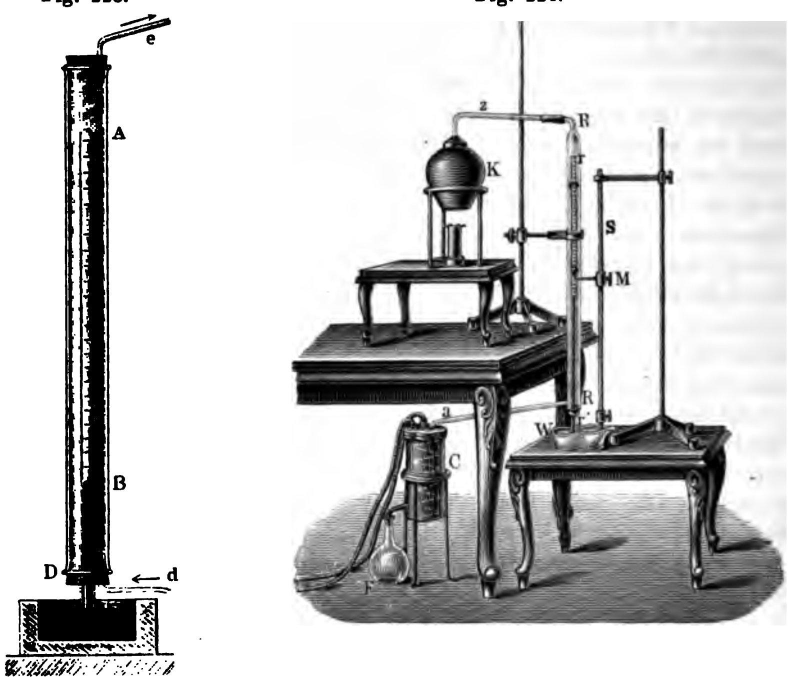
$$\delta = \frac{P}{V(1 + kt)} : \frac{e_0 H}{(1 + \alpha t) 760} = \frac{P(1 + \alpha t) 760}{V(1 + kt) e_0 H}. \quad (14)$$

e_0 ist aus (12) und (13) zu entnehmen; V ist in Litern auszudrücken, P und e_0 in Grammen

Die Mängel obiger Methode, insbesondere den Umstand, dafs die Temperatur des Wassers schwer zu bestimmen ist, beseitigte Hofmann, dessen Apparat in Fig. 223 (a. f. S.) abgebildet ist. Die Röhre, welche den zu untersuchenden Dampf enthält, ist von einer breiten Röhre ABD umgeben, durch welche die Dämpfe irgend einer entsprechend gewählten Flüssigkeit, je nachdem bis zu welcher Temperatur

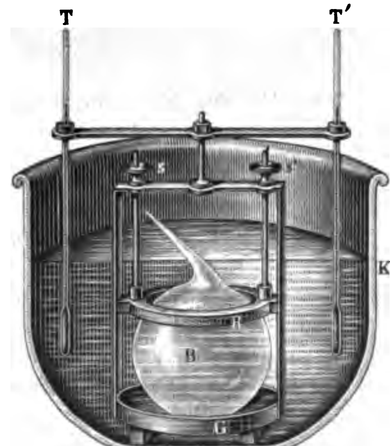
man den gegebenen Dampf zu erhitzen wünscht, geleitet werden. Ist jene Temperatur recht hoch, so hat man eine Korrektion wegen der

Fig. 223. Fig. 224.



Spannung der Quecksilberdämpfe anzubringen; letztere beträgt bei 100° — 0,28 mm, bei 120° — 0,77 mm, bei 140° — 1,9 mm und bei 160° — 4,3 mm. Fig. 224 zeigt einen Hofmannschen Apparat mit allen Nebenbestandteilen; *RR* entspricht der Röhre *AB* in Fig. 223. Die zur Erwärmung dienenden Dämpfe werden in *K* entwickelt, im Kühlapparat *C* verdichtet und in der Flasche *F* wieder gesammelt.

Fig. 225.



§ 5. Methode von Dumas. Dieselbe beruht auf der Gewichtsbestimmung eines bekannten Dampfvolumens. In einen Glasballon B (Fig. 225) mit ausgezogener spitzer Röhre, welcher das Gewicht p hat, bringt man eine gewisse Menge Flüssigkeit, deren Dampfdichte δ

man zu bestimmen wünscht. Dieser Ballon wird längere Zeit hindurch einer Temperatur ausgesetzt, welche beträchtlich höher (etwa 30°) als die Siedetemperatur der Flüssigkeit bei gewöhnlichem Atmosphärendruck ist. Zu diesem Zwecke wird der Ballon in ein Gefäfs getaucht, welches, je nach der Siedetemperatur der untersuchten Flüssigkeit, mit Wasser, Öl oder Chlorzink gefüllt ist. Dieses Bad wird erhitzt; infolgedessen verdampft die in der Kugel enthaltene Flüssigkeit und durch die Spitze entweicht ein Dampfstrahl. Sobald das Ausströmen des Dampfes beendet ist, schmilzt man das Ende der ausgezogenen Röhre zu und bestimmt für diesen Moment den Barometerstand H', der gleich der Dampfspannung ist, und an den Thermometern T und T' die Temperatur T des Dampfes. Hierauf trocknet man die Glaskugel von aufsen und bestimmt ihr Gewicht p', welches sich nun von dem anfangs bestimmten Gewichte p unterscheidet. Ferner taucht man die Spitze unter Wasser und bricht dort ihr Ende ab; das Wasser erfüllt dann die ganze Kugel, falls sämtliche Luft vom Dampfe vertrieben war. Es erübrigt nun noch das Gewicht P der mit Wasser gefüllten Kugel zu bestimmen.

Seien t und H Temperatur und Luftdruck während der Bestimmung des Gewichts p der offenen Kugel. Das Volumen der Kugel kann man gleich $P - p$ setzen, also das Gewicht des Dampfes gleich $D(P - p)$; das Gewicht desselben Volumens Luft während der ersten Wägung (bei t^0 und H mm Druck) ist gleich $D'(P-p)$.

Der Unterschied zwischen dem Gewichte von Dampf und Luft ist gleich $p'-p$; somit ist $(D-D')(P-p) = p'-p$, woraus $D = \frac{p'-p}{P-p} + D'$ folgt. D' ist die Dichte der Luft bei t^0 und H mm Druck, die gesuchte Dichte δ aber ist $\delta = \frac{D}{D'_1}$, wo D'_1 die Dichte der Luft unter den Bedingungen darstellt, unter welchen sich der Dampf in dem Augenblicke befand, wo die ausgezogene Röhre zugeschmolzen wurde. Wir haben also $D'_1 = D' \frac{H'(1+\alpha t)}{H(1+\alpha T)}$, wo α der Ausdehnungskoeffizient der Luft ist. Die gesuchte auf Luft bezogene Dampfdichte ist dann schliefslich

$$\delta = \frac{D}{D'_1} = \left(\frac{p'-p}{P-p} \cdot \frac{1}{D'} + 1\right) \frac{H(1+\alpha T)}{H'(1+\alpha t)} \quad . \quad . \quad (15)$$

Bei Bestimmung von D' kann man auch die Spannung h der Wasserdämpfe in Betracht ziehen, d. h. die allgemeine Formel

$$D' = D_0 \frac{H - \frac{5}{8}h}{760\,(1+\alpha t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

anwenden, wo D_0 numerisch gleich dem Gewicht eines Kubikcentimeters trockener Luft von 0° und 760 mm Spannung ist, also gleich 0,001 e_0 [vergl. (12) und (13)]; angenähert ist $D_0 = 0{,}001\,294\,6$ g.

Bei Herleitung der Formel (15) hatten wir die Volumenänderung der Kugel bei Erwärmung von t^0 auf T^0 vernachlässigt und hatten die Dichte des Wassers in der Kugel gleich Eins gesetzt. Man kann leicht die entsprechenden Korrektionen anbringen. Bildet sich, während man die Kugel mit Wasser füllt, in letzterer ein Luftbläschen, so hat man noch eine weitere Korrektion anzubringen, deren Gröfse ebenfalls leicht gefunden wird.

Pawlewski schlug vor, die Öffnung der ausgezogenen Röhre durch ein kleines Hütchen zu verschliefsen, welches einfach heruntergenommen wird, während man die Kugel mit Wasser füllt.

Deville und Troost haben die Dumassche Methode auch bei höheren Temperaturen angewandt. Zu diesem Zweck wird die Glaskugel durch eine solche aus Porzellan ersetzt, die man in die Dämpfe von Hg, S, Cd oder Zn bringt. Zersetzt sich die untersuchte Flüssigkeit beim Sieden unter Atmosphärendruck, so mufs man sie bei geringerem Drucke verdunsten lassen. Habermann verbindet die Kugel in diesem Falle mit einer Wasserluftpumpe nebst Manometer.

§ 6. Verdrängungsmethode von Victor Meyer. Der Gedanke, welcher dieser Methode zu Grunde liegt, stammt von Dulong. Den Hauptbestandteil des Apparats bildet ein langes, unten verbreitertes Gefäfs A (Fig. 226), das man den Dämpfen irgend einer siedenden Flüssigkeit aussetzt. Letztere wählt man derart, dafs sie der Verdampfungstemperatur der untersuchten Substanz entspricht; man kann zu diesem Zwecke Wasser (100°), Xylol (140°), Anilin (185°), Diphenylamin (310°) usw. wählen. Die Siedetemperatur der in B befindlichen Flüssigkeit braucht man übrigens nicht genau zu kennen.

Fig. 226.



Der obere Teil des Gefäſses A ist durch einen dünnen Gummischlauch mit der kalibrierten Röhre g verbunden, in welcher sich Wasser befindet. Letztere steht mit dem Reservoir n in Verbindung, das man bequem heben und senken kann, so daſs man das Wasser in g und n auf gleicher Niveauhöhe erhalten kann. Das obere Ende von A hat eine mit einem Stopfen verschlossene Öffnung und auſserdem bisweilen eine entsprechende Vorrichtung, die dazu dient, in einem gegebenen Moment eine kleine Kugel auf den Boden von A fallen zu lassen, in welcher sich eine abgewogene Menge m der zu untersuchenden Substanz befindet. Die kleine Kugel stützt sich auf ein Glasstäbchen t, das man soweit herausziehen kann, daſs sie auf den Boden von A fallen kann; letzterer ist mit Asbest bedeckt, um nicht durch das Aufschlagen der kleinen Kugel beschädigt zu werden. Zunächst läſst man nun die in B enthaltene Flüssigkeit so lange sieden, bis die Luft aus A auszuströmen aufhört, d. h. das Niveau des in g enthaltenen Wassers sich zu ändern aufhört. Hierauf bringt man die abgewogene Menge m der zu untersuchenden Substanz in das Gefäſs A, indem man die erwähnte kleine Kugel auf den Boden von A niederfallen läſst oder aber den Stopfen für einen Moment öffnet. Die Substanz verdampft in kurzer Zeit und verdrängt eine gewisse Menge Luft, die nach g strömt; durch Senken des Reservoirs n bringt man den Wasserspiegel in g und n wieder auf dieselbe Höhe. Es sei nun v das Volumen der in g angesammelten Luft, t die Temperatur des Beobachtungsraumes und p der Luftdruck in g, welcher gleich dem Barometerdruck, vermindert um den Druck des Wasserdampfes ist, welcher die in g enthaltene Luft sättigt. Beim Übergang nach g nimmt die Luft die Temperatur t^0 an. Kann man annehmen, daſs die Dämpfe, welche sich in A gebildet hatten, so sehr überhitzt sind, d. h. soweit über der Sättigungstemperatur liegen, daſs für sie die Gesetze von B.-M. und G.-L. gelten, so folgert man hieraus, daſs diese Dämpfe bei t^0 und p mm Druck genau das Volumen v inne hatten. Hieraus folgt für ihre Dichte δ

$$\delta = \frac{m}{v} : \frac{0{,}001\,293\,p}{760\,(1 + \alpha t)} = \frac{m\,(1 + \alpha t)\,760}{0{,}001\,293\,p\,v}.$$

Da die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, so setzt man für α den Wert $\alpha = 0{,}004$ und erhält zuletzt

$$\delta = 587\,100\,\frac{m}{p\,v}\left(1 + 0.004\,t\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Anstatt des Apparats gn kann man auch einen einfachen Maſscylinder wählen, der mit Wasser gefüllt und über einer pneumatischen Wanne umgestülpt wird. In diesem Falle hat man jedoch bei Bestimmung von p den Druck der Wassersäule mit in Betracht zu ziehen, welche im Cylinder zurückbleibt.

Andere Methoden zur Bestimmung der Gasdichte sowie der Dichte

überhitzter Dämpfe beruhen auf Beobachtung des von ihnen verdrängten Flüssigkeitsvolumens, ihrer Geschwindigkeit beim Ausströmen aus engen Röhren (vergl. Methode von Bunsen, Kapitel VI, § 3), auf Bestimmung der Tonhöhe von Pfeifen, die mit dem betreffenden Gas oder Dampf gefüllt sind (Methode von R. Jahoda, 1900) u. s. w. Nilsson und Petterson haben den V. Meyerschen Apparat in sehr geeigneter Weise abgeändert.

Litteratur.

Gesetz der Molekularkräfte. Überblicke.

Gehlers Physikal. Wörterbuch 2, 118.
Todhuuter and Pearson: A history of the theory of elasticity, London 1886.
Galitzin: Über die Molekularkräfte u. s. w. Bull. de l'Acad. d. Sciences de St. Pétersbourg (5) 3, Nr. 1; St. Petersburg 1895.

Dichtebestimmung von Gasen und Dämpfen.

Arago et Biot: Mém. Acad. Fr. 1806.
Regnault: Mém. Acad. Fr. 21. — Relation des expériences, tome I, p. 221, 1847; Ann. chim. et phys. (3) 63, 45, 1861; Pogg. Ann. 65.
D. J. Mendelejeff: Wremennik Glawnoj Palatij (russ.) I, p. 57.
Leduc: Ann. chim. et phys. (7) 15, 5, 1898.
Bunsen: Gasometrische Methoden 1847, S. 128.
Dumas: Ann. chim. et phys. (2) 33, 337, 1827; Pogg. Ann. 9, 1827.
Pawlewski: Chem. Ber. 16, 1293, 1883.
Deville et Troost: Ann. chim. et phys. (3) 58, 257, 1858; Compt. rend. 45, 821.
Habermann: Lieb. Ann. 187, 341, 1877.
A. W. Hofmann: Chem. Ber. 1, 198, 1868.
Gay-Lussac: Ann. chim. et phys. (1) 80, 118, 1811.
V. Meyer: Chem. Ber. 9, 1216, 1876; 11, 2068, 1878.
R. Jahoda: Wien. Ber. 108, 803, 1900.
Nilsson u. Petterson: Journ. f. prakt. Chemie (2) 33, 1, 1886.

Im Text nicht erwähnte Methoden:

Graham: Trans. R. Soc. 1846, p. 573; 1863, p. 385.
Lux: Instr. 1885, S. 411; 1886, S. 255.
Lommel: Instr. 1886, S. 109; Wied. Ann. 27, 144, 1886.
Moissan et Gautier: Ann. chim. et phys. (7) 5, 568, 1895.
Buff: Pogg. Ann. 22, 242, 1831.
Marchand: Chem. Ber. 13, 2019, 1880.
Mensching u. V. Meyer: Ztschr. phys. Chem. 1, 145, 1887.
L. Pfaundler: Chem. Ber. 12, 165, 1879.
Malfatti u. Schoop: Ztschr. phys. Chem. 1, 159, 1886.

Zweites Kapitel.

Spannung der Gase.

§ 1. **Boyle-Mariottesches Gesetz.** Zwei richtige Ausdrucksweisen für dieses Gesetz sind bereits auf S. 42 gegeben worden. Bezeichnet man die dem Aufsendruck gleiche Gasspannung mit p, das Gasvolumen mit v, so ist bei konstanter Temperatur für ein gegebenes Gasquantum

$$p\,v = Const. \qquad (1)$$

Die Spannung p werden wir in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche, das Volumen v in Kubikmetern, bezogen auf die Gewichtseinheit des Gases angeben, so dafs v das specifische Volumen bezeichnet. Trägt man auf Koordinatenachsen die Volumina v als Abscissen, die Spannungen p als Ordinaten ab, so ist die den Zusammenhang dieser beiden Gröfsen bei konstanter Temperatur liefernde Kurve eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen selbst sind; ihre Gleichung lautet $p = \frac{c}{v}$. Das Gesetz der Gaskompression wurde von Boyle im Jahre 1662 entdeckt; eine genaue experimentelle Untersuchung desselben hat zuerst Mariotte im Jahre 1676 ausgeführt. Die gewöhnlichen Methoden zur Verifizierung des Gesetzes für Drucke, welche höher resp. geringer als der Atmosphärendruck sind, werden in der Elementarphysik beschrieben; hier soll auf sie nicht eingegangen werden.

Auf S. 405 hiefs es, die Gase gehorchten angenähert dem Gesetz von B.-M.; in der That stimmt unsere Formel (1) nicht genau mit den Beobachtungen überein, insofern als das Produkt $p\,v$ bei Änderung des Drucks p keinen konstanten Wert behält. Die Abweichungen vom B.-M. Gesetze können nach zwei Richtungen erfolgen:

Wenn bei Zunahme des Drucks p das Produkt pv abnimmt, so heifst das, dafs man zu kleine Volumina v erhält, d. h. das Gas wird stärker komprimiert, als es das B.-M. Gesetz verlangt.

Wenn umgekehrt mit Zunahme des Drucks p das Produkt pv wächst, so deutet dies darauf hin, dafs sich das Gas schwächer komprimiert, als nach dem B.-M. Gesetze zu erwarten ist.

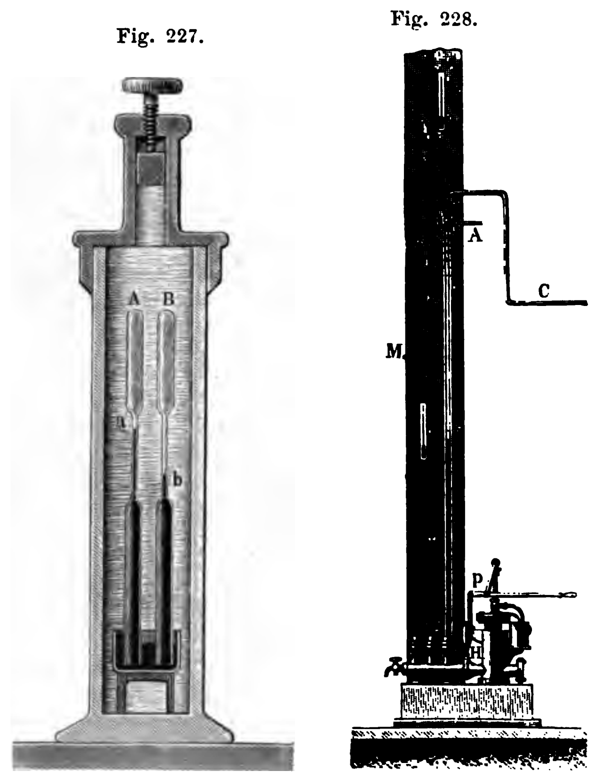
§ 2. **Untersuchungen bis auf Regnault** (bis 1847). Mit der Frage nach der Kompression der Gase haben sich sehr viele Beobachter beschäftigt. Die wichtigsten vor Regnault ausgeführten Untersuchungen sind folgende: Örstedt und Svendsen (1826)

fanden für Luft bei Drucken bis zu 60 Atmosphären keine Abweichungen vom B.-M. Gesetze. Für diejenigen Gase jedoch, welche Faraday in den flüssigen Zustand übergeführt hatte (NH_3, SO_2 u. a.), fanden sie Abweichungen nach der Seite gröfserer Kompressibilität hin.

Despretz bewies (1827) zuerst durch einen überaus einfachen Versuch, dafs sich verschiedene Gase ungleich komprimieren. Zwei gleiche Röhren *A* und *B* (Fig. 227) wurden mit verschiedenen Gasen gefüllt. Die offenen Enden beider Röhren tauchten in Quecksilber und

Fig. 227.

Fig. 228.



befanden sich im Innern eines Piezometers (Fünfter Abschnitt, Kapitel III, § 3), d. h. eines Gefäfses mit Wasser, welches durch den Druck eines Kolbens komprimiert werden konnte (vergl. die Fig. 227). Um geringere Unterschiede der Volumina wahrnehmen zu können, waren beide Röhren in der Mitte zu sehr engen Röhrchen verjüngt; die Beobachtung zeigte, dafs sich das Quecksilber in beiden Röhren auf ungleicher Höhe *a* und *b* einstellte. In gleicher Weise fand Pouillet (1837), dafs sich CO_2, SO_2, HN_3, NO_2, CH_4 und C_2H_4 stärker komprimieren als Luft, und dafs sich N, O, H, N_2O_2, CO und Luft in ganz gleicher Weise komprimieren. Dulong und Arago (1830)

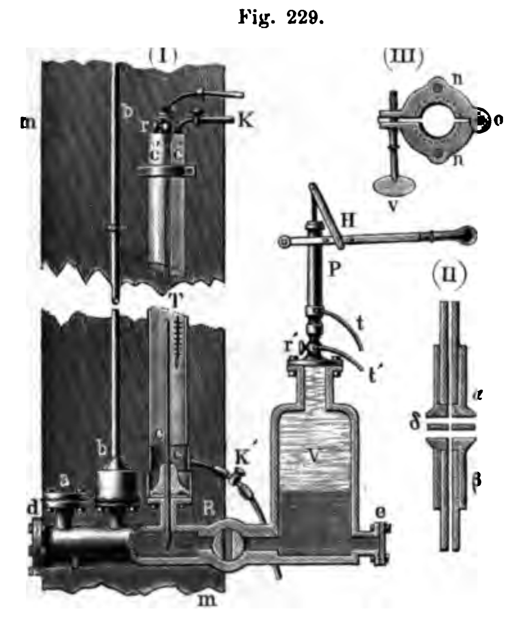
komprimierten das in einer Röhre (von 1,7 m Länge) eingeschlossene Gas in gewöhnlicher Weise, indem sie die Länge der Quecksilbersäule in einer anderen mit der ersteren verbundenen Röhre vergröfserten und die Länge dieser Säule, sowie das abnehmende Gasvolumen mafsen. Für Luft fanden sie bis zu 27 Atmosphären keine Abweichung vom B.-M. Gesetze.

§ 3. Untersuchungen von Regnault (1847 und 1862). Der hauptsächlichste Mangel, welcher den vor Regnault in Anwendung gebrachten Methoden anhaftete, bestand darin, dafs sich das Gasvolumen in dem Mafse verringerte, als der Druck gesteigert wurde; die relative Genauigkeit, mit welcher dieses Volumen gemessen wurde, mufste sich daher ebenfalls verringern. Infolgedessen konnten geringere Abweichungen vom B.-M. Gesetze nicht bemerkt werden. Das Wesentlichste bei den Versuchen von Regnault bestand darin, dafs er um so gröfsere Gasmengen komprimierte, je höher der erreichte Druck war, so dafs das Anfangsvolumen v_0 des Gases, bevor es weiter komprimiert wurde, bei allen Versuchen ein und dasselbe war; die Kompression wurde jedesmal solange fortgesetzt, bis $v = \frac{v_0}{2}$ wurde. Hierbei mufste sich der anfängliche Druck p_0 in den neuen Druck $p = 2p_0$ verwandeln, wenn das Gas genau dem B.-M. Gesetze folgte. Durch Messung von p_0 und p konnte Regnault die Abweichungen von diesem Gesetze finden.

Der wichtigste Teil des Regnaultschen Apparates ist in Fig. 228 abgebildet. Die Röhre $A\alpha$ enthielt das zu untersuchende Gas, ihre Länge betrug 3 m, ihr innerer Durchmesser 10 mm; der Teilstrich β teilte die Röhre in zwei Hälften von gleichem Volumen. Diese Röhre war von einer weiteren Röhre umgeben, durch welche ununterbrochen Wasser von bestimmter Temperatur strömte. Am oberen Ende der Röhre befand sich ein Hahn und eine seitliche Röhre c, durch welche mittels einer Kompressionspumpe trockenes Gas nach $A\alpha$ gebracht wurde. Das untere Ende der Röhre tauchte in ein gufseisernes, mit Quecksilber gefülltes Reservoir. In dasselbe Reservoir tauchte auch das untere Ende einer zweiten Röhre, deren Länge 24 m betrug; diese Röhre war an den Wänden eines Turmes und an einer Maststange im Collège de France befestigt. Der Cylinder H enthielt Quecksilber und über demselben Wasser, dessen Quantum man mit Hülfe der Pumpe P vergröfsern konnte. Der Verbindungshahn (siehe den vertikalen Griff links von H) wurde geschlossen, sobald im Apparate der gewünschte Druck erreicht war. Die Röhre $A\alpha$ wurde bis zur Marke α mit Gas von einem Atmosphärendruck gefüllt und das Gas bis zur Marke β geprefst, darauf der Druck gemessen, der nahezu zwei Atmosphären betrug. Hierauf wurde soviel Gas hinzugepumpt, dafs sich die

Röhre mit demselben wieder bis zur Marke α füllte, wobei es unter dem Druck von zwei Atmosphären verblieb. Danach wurde das Gas komprimiert bis das Quecksilber β erreichte, also das Gas sich nahezu unter einem Drucke von vier Atmosphären befand. Dann wurde wieder Gas hinzugepumpt und dies vom vierfachen Atmosphärendruck auf den achtfachen gebracht u. s. w. In Fig. 229 ist der untere Teil des Regnaultschen Apparats im Durchschnitt und in vergröfsertem Mafsstabe dargestellt. Die Bedeutung der einzelnen Teile ist leicht aus der vorangegangenen Beschreibung zu entnehmen. In (II) sieht man, wie die Teile, aus denen die linke Röhre bb' zusammengesetzt war, miteinander verbunden wurden. Die Armaturen α und β wurden durch einen in (III) dargestellten Klemmverschlufs miteinander verbunden.

Fig. 229.



Die hauptsächlichsten eingeführten Korrektionen waren die folgenden:

1. Der Atmosphärendruck, den man dem Drucke der Quecksilbersäule hinzuzufügen hatte, mufste am oberen Ende dieser Säule bestimmt werden.

2. Die Höhe der Quecksilbersäule mufste auf 0° reduziert werden; hierzu dienten mehrere Thermometer, von denen zwei in Fig. 228 sichtbar sind.

3. Das Quecksilber in der offenen Röhre komprimierte sich durch sein eigenes Gewicht und daher nahm seine Dichte von oben nach unten zu.

4. Das Volumen der Röhre, welche das Gas enthielt, vergröfserte sich ein wenig, wenn der Druck sich verdoppelte.

5. Die Temperatur des zirkulierenden Wassers blieb nicht ganz konstant.

Regnault erhielt die im folgenden angegebenen Resultate. Seien p_0 und v_0 die Anfangswerte bei einem Versuche; p_1 und v_1 die entsprechenden Werte nach der Kompression, wobei v_1 sehr nahe gleich $v_0:2$ ist. Regnault bestimmte den Wert des Bruchs $\alpha = \frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs, wenn

$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$ $\begin{cases} >1 \text{ ist, sich das Gas stärker} \\ <1 \text{ ist, sich das Gas schwächer} \end{cases}$ komprimiert, als nach dem B.-M. Gesetze zu erwarten ist.

Die Versuche zeigten, dafs für Luft, N und CO_2 der Bruch $\alpha > 1$ wird, für H dagegen < 1; erstere Gase komprimieren sich also stärker, H — schwächer, als es das B.-M. Gesetz verlangt. In der folgenden Tabelle sind diese Resultate zusammengestellt:

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
p_0 mm	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0 mm	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0 mm	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0 mm	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$
739,19	1,00142	753,96	1,00101	763,86	1,00764	—	—
2111,63	1,00276	2159,12	1,00125	2164,31	1,01901	—	—
4219,05	1,00350	3030,22	1,00195	3186,13	1,02870	3989,47	0,99758
9332,82 (12,30at)	1,00613	9772,99 (12,85at)	1,00482	9620,06 (12,66at)	1,09983	9175,25	0,99313
—	—	—	—	—	—	10361,88 (13,62at)	0,99233

Die Abweichungen vom B.-M. Gesetze sind besonders anschaulich in folgender Tabelle dargestellt:

v	Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
	p	pv	p	pv	p	pv	p	pv
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$^1/_2$	1,9978	0,9989	1,9986	0,9993	1,9829	0,9914	2,0011	1,0006
$^1/_8$	7,9457	0,9932	7,9641	0,9955	7,5194	0,9399	8,0339	1,0042
$^1/_{20}$	19,7199	0,9860	19,7886	0,9894	16,7054	0,8353	20,2687	1,0134

Folgten die Gase dem B.-M. Gesetze, so wären die Zahlen p gleich 1, 2, 8 und 20 und alle Zahlen für pv wären gleich Eins. Regnault drückte die Resultate seiner Beobachtungen durch folgende empirische Formel aus

$$\frac{p_0 v_0}{pv} = 1 + A\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + B\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo A und B Konstante bedeuten, die für die verschiedenen Gase verschieden sind.

Später benutzte Regnault die Formel

$$\frac{0{,}76\, v_0}{pv} = 1 + A(p - 0{,}76) + C(p - 0{,}76)^2.$$

Für Luft sind die Koeffizienten der Formel (2) $A = -0{,}001\,105\,4$,

$B = 0{,}000\,019\,381$; für Wasserstoff ist $A = +\,0{,}000\,547\,23$, $B = 0{,}000\,008\,415\,5$; p ist der in Metern ausgedrückte Druck.

Gegenwärtig wird die Regnaultsche Formel häufig in folgender Gestalt angewandt

$$\frac{p_0 v_0}{p v} - 1 = A(p - p_0) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

D. Berthelot benutzte diese Formel, um den Grenzwert der Dichte eines Gases bei unbegrenzter Verminderung seiner Spannung zu bestimmen, d. h. diejenige Gröfse, welche für ein ideales Gas gar nicht von seiner Spannung abhängt, und welche nach dem Avogadroschen Gesetze als Mafs für sein Molekulargewicht dient. Für O = 16 findet er H = 1,0075, C = 12,004, N = 14,005 u. s. w., d. h. Zahlen, welche den Resultaten der genauesten chemischen Bestimmungen entsprechen.

§ 4. Drucke unterhalb einer Atmosphäre. Arbeiten von Siljestroem, Mendelejeff, Amagat und Fuchs. Siljestroem liefs (1873) eine gegebene Gasmenge sich ausdehnen und beobachtete die neuen Volumina und Drucke. Er fand, dafs bei geringem Druck (unter 76 mm) sich der Wasserstoff stärker komprimiert, als nach dem B.-M. Gesetze zu erwarten ist; die Luft hingegen befolgt obiges Gesetz um so genauer, je geringer der Druck ist.

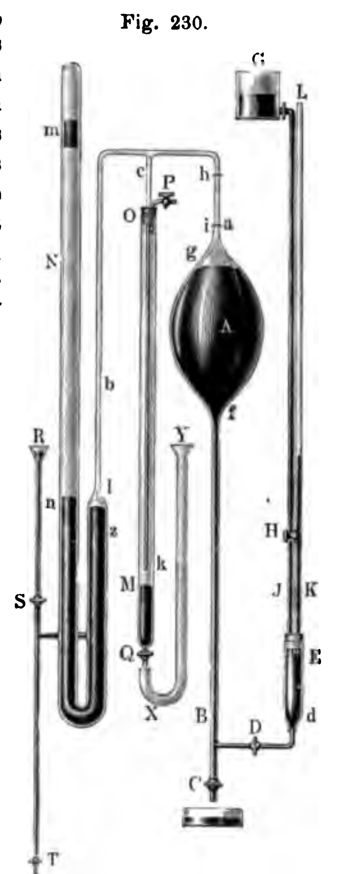
D. J. Mendelejeff kam (1874 bis 1876) zu einem völlig anderen Resultate; er fand, dafs sich Luft zwischen 5 mm und 650 mm schwächer komprimiert, als es nach dem B.-M. Gesetze sein müfste. Die Abweichungen verringern sich in dem Mafse, als man sich 650 mm nähert, bei welchem Drucke $\frac{d(pv)}{dp} = 0$ ist; für $p > 650$ mm übersteigt die Kompressibilität der Luft diejenige, welche dem B.-M. Gesetze entspricht. Es mögen hier einige von den Zahlen folgen, welche Mendelejeff angiebt

p	pv	p	pv
646,185 mm	1,00000	104,805 mm	0,99730
486,215	0,99960	16,395	0,97114
207,430	0,99867	14,555	0,96551

Der Apparat, welchen Mendelejeff benutzte, ist in Fig. 230 abgebildet. Das grofse eiförmige Gefäfs D kann mit Quecksilber gefüllt werden, indem man den Hahn D öffnet und es mit dem Quecksilberreservoir E in Verbindung setzt; durch Öffnen des Hahnes C kann das Quecksilber abgelassen werden. Das Gefäfs A ist mittels einer dünnen Röhre mit dem „Quecksilberverschlufs" MO und mit der heberförmigen Barometerröhre mnl verbunden, welche als Manometer (Kapitel III, § 8) dient. Am oberen Ende der breiten Röhre Z ist

eine Marke angebracht, bis zu welcher das Quecksilber bei jeder Messung reichen muſs, was man durch Hinzugieſsen in den Trichter *R* oder durch Ablassen mittels des Hahnes *T* erreicht. Die Einrichtung des „Quecksilberverschlusses“ *OM* ist aus der Figur leicht zu ersehen: Senkt man den Schlauch *XY*, so wird das untere Ende der Röhre *kc* frei und man kann das zu untersuchende Gas durch *P* nach *OM*, *ch* und *A* bringen; hebt man hierauf *XY*, so wird *ck* unten verschlossen und das eingeführte Gas befindet sich in einem allseitig geschlossenem Raume. Hat man *Y* gesenkt und *P* geöffnet, so steht das Quecksilber in *N* um so viel höher als in *Z*, als dem jeweiligen Barometerstande entspricht. Hat man *Y* gehoben und ist das Gas in *kchA* verdünnt, so senkt sich das Quecksilber in *N* und giebt der Höhenunterschied desselben in *N* und *Z* den Druck p des Gases. Die Versuche wurden folgendermaſsen angestellt: Durch *P* wurde das Gas eingeführt, wobei der Hahn *C* geöffnet war, so daſs das Gas einen Teil von *A* erfüllen konnte. Hierauf wurde *C* geschlossen, *Y* gehoben und der Druck p_1 des Gases (am Manometer *ZN*), sowie sein Volumen bestimmt, welches gleich dem Volumen der Verbindungsröhren (ein Teil von *kc* und *ahb*) und dem Volumen des durch *C* abgeflossenen Quecksilbers war. Letzteres wurde durch Wägung ermittelt. Hierauf wurde wiederum ein Teil des Quecksilbers durch *C* abgelassen und durch Wägung das neue Volumen v_2 bestimmt; der entsprechende Druck p_2 wurde dann wiederum am Manometer *ZN* abgelesen. Auf diese Weise war es möglich, den Änderungen des Produktes pv zu folgen, welches, wie aus der angeführten kleinen Tabelle ersichtlich, sich mit der Druckabnahme verminderte, so daſs also $p_2 v_2 < p_1 v_1$ erhalten wurde.

Fig. 230.



Selbstverständlich waren alle nötigen Korrektionen wegen Einwirkung der Temperatur u. s. w. angebracht worden.

Amagat kam (1876 bis 1883) zu dem recht unwahrscheinlichen Resultate, daſs Luft bei geringen Drucken von 0,245 bis 12,297 mm streng dem B.-M. Gesetze folgt.

Fuchs bestätigte (1888) die Resultate von Mendelejeff; er fand, dafs Luft bei Drucken unter 600 mm sich schwächer, CO_2 und SO_2 zwischen 1000 und 250 mm dagegen stärker komprimiert, als es das B.-M. Gesetz verlangt. Für H erhielt er keine Abweichungen vom B.-M.-Gesetz.

Fig. 231.



§ 5. Sehr hohe Drucke. Arbeiten von Natterer, Cailletet und Amagat. Alle Untersuchungen haben zu dem Resultate geführt, dafs sich für Gase, die sich bei gewöhnlicher Temperatur nicht verflüssigen (vergl. § 7), z. B. für N, O, H u. s. w. die Kompressibilität bei sehr hohen Drucken mit der Druckzunahme schnell vermindert.

Natterer untersuchte (1850 bis 1854) Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Sauerstoff und Kohlenoxyd. Es mögen hier einige seiner Resultate folgen (s. nebenstehende Tabelle).

Bei diesen gewaltigen Drucken wächst das Produkt pv schnell an, also ist die Kompressibilität geringer, als es dem B.-M. Gesetze entspricht.

Cailletet komprimierte (1870) bei seinen ersten Versuchen die Gase in einer langen, innen vergoldeten Röhre; der vom Gase erfüllte Raum wurde durch die Stelle markiert, bis zu welcher die Vergoldung vom Quecksilber aufgelöst worden war. Im allgemeinen bestätigten seine Untersuchungen die Resultate Natterers. Für Luft fand er das Maximum der Kompressibilität bei 70^{at}. Seine späteren Arbeiten (1877 und 1879) führte Cailletet mit dem in Fig. 231 abgebildeten Apparate aus. Die im Innern vergoldete Glasröhre R wurde mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt; ihr oberer Teil stellt eine Kapillarröhre dar, in welche das Quecksilber nur bei hohem Drucke eintritt. Diese Glasröhre war in einen mit Quecksilber gefüllten Stahlcylinder AA eingeschlossen, der mit einer 250 m langen stählernen Röhre TT in Verbindung stand. Letztere Röhre stieg an einem Berge (in Chatillon sur Seine) empor; bei späteren Versuchen wurde sie in einen artesischen Brunnen (in Butte-aux-Cailles) versenkt, dessen Tiefe gegen 500 m betrug. Zwei Maximal-

Wasserstoff		Stickstoff		Luft		Kohlenoxyd		Sauerstoff	
p^{atm}	$\frac{p_0 v_0}{p v}$	p^{atm}	$\frac{p_0 v_0}{p v}$	p^{atm}	$\frac{p_0 v_0}{p v}$	p^{atm}	$\frac{p_0 v_0}{p v}$	p^{atm}	$\frac{p_0 v_0}{p v}$
78	1,000	75	1,000	76	1,000	77	1,000	77	1,000
248	0,879	252	0,962	252	0,933	248	0,955	254	0,972
505	0,788	515	0,747	504	0,785	515	0,810	517	0,864
1015	0,619	1035	0,507	1047	0,512	1016	0,538	1010	0,590
2790	0,361	2790	0,253	2790	0,260	2790	0,261	1354	0,485

thermometer t und t' erlaubten die Temperatur der Wasserschicht zu bestimmen, in welche der Apparat versenkt war. Für Stickstoff (von 15°) fand Cailletet folgende Zahlen:

p^{at}	$p v$	p^{at}	$p v$
1	1,0000	130,52	1,0120
51,79	0,9789	143,68	1,0345
64,83	0,9595	163,31	1,0592
77,84	0,9449	196,33	1,0653
91,28	0,9583	215,99	1,0801
104,35	0,9762	239,46	1,1159
117,41	0,9955		

Bis zu 75^{at} komprimiert sich der Stickstoff stärker als nach dem B.-M. Gesetze zu erwarten ist; darauf komprimiert er sich schwächer und hat bei 125^{at} ein solches Volumen, wie es dem B.-M. Gesetze entspricht. Bei noch höherem Drucke fallen die Volumina schon zu grofs aus. Das Produkt pv hat mithin ein Minimum. U. Lala hat die Zusammendrückbarkeit eines Gemenges von Luft und CO_2, sowie von Luft und Wasserstoff untersucht.

Amagat (der seine Arbeiten bereits 1878 begann) benutzte einen Apparat, welcher an den Cailletetschen erinnerte. Hier jedoch befand sich der obere Teil der das Gas enthaltenden Glasröhre im Innern eines mit Wasser gefüllten Glascylinders, so dafs die Höhe des Quecksilberniveaus unmittelbar abgelesen werden konnte. Das Quecksilber wurde in die das Gas enthaltende Röhre und zugleich in die Manometerröhre mittels einer Pumpe in ähnlicher Weise hineingebracht, wie es Regnault gethan. Die Versuche wurden teils in Lyon, teils im Bergwerk Saint-Etienne ausgeführt, wo der Apparat in einer Tiefe von 326 m unter der Erdoberfläche aufgestellt wurde. Amagat erhielt folgende Resultate:

Für Stickstoff nimmt das Produkt pv bis zu 50^{at} ab und nimmt darauf zu, bei Drucken von etwa 100^{at} ist es gleich Eins (also ebenso grofs wie bei 1^{at}). Als Amagat die Kompression anderer

Gase mit derjenigen des Stickstoffs verglich, fand er, dafs Luft, O, CO, CH_4 und C_2H_4 ebenfalls bei Drucken über einer Atmosphäre sich zunächst stärker und bei sehr hohen Drucken schwächer komprimieren, als das B.-M. Gesetz verlangt. Das Minimum des Produktes pv oder das Minimum der Kompressibilität tritt ein für

Luft	bei $p =$	65 m	Quecksilberdruck
N	" " =	50 "	"
O	" " =	100 "	"
CO	" " =	50 "	"
CH_4	" " =	120 "	"
C_2H_4	" " =	65 "	"

Für Wasserstoff beobachtete Amagat eine kontinuierliche Zunahme des Produktes pv bis zu sehr hohen Spannungen.

§ 6. Arbeiten von Leduc. Kompressibilität der Gasgemische. A. Leduc untersuchte (1896 bis 1898) die Abweichungen einiger Gase vom B.-M. Gesetze vorzugsweise um 0° und 76 cm herum. Ähnlich Regnault benutzte er die empirische Formel

$$\frac{p_0 v_0}{p v} - 1 = A\,(p - p_0),$$

wo v_0 und v die auf 0° reduzierten Volumina bei p cm und $p_0 = 76$ cm Druck bedeuten.

Einige seiner Resultate sind die folgenden:

	$A \cdot 10^6$ 0°	100°		$A \cdot 10^6$ 0°	100°
H_2 . . .	— 6	— 11	C_2H_2	114	36
N_2 . . .	+ 5	0	HCl	107	34
CO . . .	6	0	NC	336	94
O_2 . . .	10	2	SO_2	342	97
NO . . .	14	3	C_2H_6	202	59
CH_4 . . .	26	6	NH_3	205	61
C_2H_4 . . .	105	33	H_2S	141	42
CO_2 . . .	91	29	Cl_2	217	61
N_2O . . .	103	32			

Die Zahlen der ersten Kolumne (0°) beziehen sich auf den Übergang von 760 mm auf 1520 mm, die der zweiten — auf den Übergang von 760 mm auf 1040 mm Quecksilberdruck.

A. Leduc untersuchte ferner theoretisch die Frage nach den Abweichungen verschiedener Gase vom B.-M. Gesetze im Zusammenhange mit der Frage nach den sogen. korrespondirenden Zuständen, von denen erst im dritten Bande die Rede sein kann.

Die Kompressibilität von Gasgemischen untersuchte Dan. Berthelot und P. Sacerdote. Sie fanden, dafs die Gröfse A, welche

als Maſs für die Abweichung eines Gases vom B.-M. Gesetze dient, für Gasgemische kleiner ist als derjenige Wert, den man nach den Werten A_1 und A_2 für die Bestandteile des Gemisches erwarten kann, also kleiner als $A' = (m_1 A_1 + m_2 A_2) : (m_1 + m_2)$, wo m_1 und m_2 die Massen der Bestandteile bedeuten. So haben wir bei Zimmertemperatur $A_1 = 265 . 10^{-6}$ für SO_2 und $A_2 = 73 . 10^{-6}$ für CO_2; ist $m_1 = m_2$, so erhält man für das Gemisch $A' = 169 . 10^{-6}$, während die Beobachtung nur den Wert $A = 143 . 10^{-6}$ liefert. Ferner ist $A_1 = 8 . 10^{-6}$ für O_2 und $A_2 = -8 . 10^{-6}$ für H_2, so daſs man bei $m_1 = m_2$ den Wert $A' = 0$ erwarten könnte, während jedoch $A = -2 . 10^{-6}$ beobachtet wird. D. Berthelot zeigte, daſs sich diese Abweichungen aus der Van der Waalsschen Gleichung berechnen lassen, welche wir in diesem Kapitel (§ 10) kennen lernen werden.

§ 7. Kritische Temperatur. Um die von Cailletet, besonders aber die von Amagat erhaltenen Resultate vollkommen zu verstehen, müssen wir uns bereits an dieser Stelle mit dem Begriffe der kritischen Temperatur bekannt machen, welcher eingehender in der Wärmelehre behandelt werden soll.

Andrews machte (1869) die Entdeckung, daſs für jedes Gas eine besondere Temperatur existiert, oberhalb welcher es bei keinem noch so hohen Drucke verflüssigt werden kann, so daſs also für dasselbe oberhalb dieser Temperatur der einzig mögliche Zustand der Gaszustand ist. Diese Temperatur nennt man die kritische Temperatur des betreffenden Stoffes. Die kritische Temperatur für CO_2 liegt bei $+ 32^0$, für N bei $- 146^0$, für O bei $- 113^0$, für CO bei $- 140^0$ u. s. w. Hieraus folgt, daſs bei der gewöhnlichen Zimmertemperatur sich Luft, N, O, CO oberhalb, CO_2 dagegen unterhalb ihrer kritischen Temperatur befinden.

§ 8. Einfluſs der Temperatur auf die Kompressibilität. Im § 5 war gesagt worden, Amagat habe kein Minimum der Kompressibilität für H gefunden, das doch für andere Gase so scharf ausgesprochen ist. Wroblewski dagegen machte die Entdeckung, daſs auch für H, wenn man ihn bei sehr niedrigen Temperaturen komprimiert, ähnlich wie für O, N, CO u. a. ein Minimum des Produktes pv existiert, daſs sich also bei sehr niedrigen Temperaturen auch H zunächst stärker komprimiert, als es das B.-M. Gesetz verlangt. Bei Temperaturen oberhalb der Zimmertemperatur untersuchten die Kompressibilität der Gase Regnault, Amagat, Winkelmann und Roth. Regnault fand bereits 1847, daſs die Abweichungen der Kohlensäure vom B.-M. Gesetze bei 100^0 um vieles geringer sind als bei 0^0.

Amagat untersuchte zunächst (1869 bis 1872) CO_2 und SO_2 von 1 bis zu 2^{at} Druck und bei Temperaturen von 8° (für CO_2) resp. 15° (für SO_2) bis zu 250°. Er fand, daſs sich die Abweichungen vom B.-M. Gesetze (die zu groſse Kompressibilität) mit Zunahme der Temperatur so sehr verringern, daſs sie bei 250° fast verschwinden. Später untersuchte Amagat Luft (bis 320°) und Wasserstoff (bis 250°) und fand, daſs sich auch für diese Gase die Abweichungen vom B.-M. Gesetze (nach entgegengesetzten Richtungen) mit Zunahme der Temperatur verringern.

Dasselbe Resultat erhielt Winkelmann (1878) für C_2H_4, das er Drucken von 1 bis 2 und von 1 bis 3^{at} bei 0° und 100° aussetzte. Roth untersuchte (1880) CO_2, SO_2, C_2H_4 und NH_3 bei Drucken bis zu 60^{at} und Temperaturen bis zu 183° und fand ebenfalls, daſs sich die Kompressibilität dieser Gase der vom B.-M. Gesetze geforderten in dem Maſse nähert, als die Temperatur wächst. Für CO_2 fand er bei 183° eine kontinuierliche Abnahme des Produktes pv bis zu $130{,}55^{at}$, ohne das Minimum zu erhalten, welches Cailletet für die anderen Gase gefunden hatte.

Eine spätere Arbeit von Amagat löste (1881) diesen scheinbaren Widerspruch. Er untersuchte H, N, CH_4, C_2H_4 und CO_2 anfangend von der Zimmertemperatur bis zu 100° hinauf und fand, daſs diese Gase in drei Gruppen oder Typen zerfallen. Zur ersten gehört H, der bei allen Temperaturen im selben Sinne vom B.-M. Gesetze abweicht, indem er sich zu schwach komprimiert. Den entgegengesetzten Typus vertreten CO_2 und C_2H_4, für welche sich pv mit Zunahme von p zunächst schnell vermindert, um alsdann wieder zu wachsen. Das Minimum von pv liegt bei einem um so höheren Drucke, je höher die Temperatur ist; für CO_2 liegt es bei $p = 70$ m, wenn $t = 35{,}1°$ ist und bei $p = 170$ m, falls $t = 100°$ ist; ein ähnliches Resultat wurde auch für C_2H_4 erhalten. Hierdurch erklärt sich das von Roth erhaltene Resultat. Den dritten Typus repräsentieren N und CH_4, bei niedrigen Temperaturen ist ein Minimum für pv vorhanden, für höhere Temperaturen verschwindet dasselbe für N (pv nimmt bloſs zu), für CH_4 geht es zu immer geringeren Drucken über und tritt überhaupt weniger scharf hervor.

Wir wollen hier einige numerische Daten der Amagatschen Versuche geben und zwar den Wert der Gröſse pv, indem wir überall $pv = 1$ setzen, wenn $t = 0°$ und $p = 1^{at}$ ist.

Luft:

p^{at} =	1	150	500	800	1000	2000	3000
$t = 0°$	1	0,9840	1,3400	1,7368	1,9990	3,2260	4,3230
99,4°	—	1,4310	1,7815	2,1555	2,4150	—	—
200,4°	—	1,8430	2,2110	2,5750	2,8280	—	—

Sauerstoff:

p^{at} =	1	150	500	800	1000	2000	2900
$t = 0^0$	1	0,9135	1,1570	1,5040	1,7366	2,8160	3,7120
$99,5^0$	—	1,3820	1,6220	1,9340	2,1510	—	—
$199,5^0$	—	1,8000	2,0500	2,3430	2,4980	(950^{at})	—

Stickstoff:

p^{at} =	1	150	500	800	1000	2000	3000
$t = 0^0$	1	1,0085	1,3900	1,8016	2,0700	3,3270	4,4970
$95,45^0$	—	1,0815	1,4590	1,8655	2,1360	—	—
$199,5^0$	—	1,8620	2,2570	2,6400	2,8380	(950^{at})	—

Wasserstoff:

p^{at} =	1	150	500	800	1000	2000	2800
$t = 0^0$	1	1,1030	1,3565	1,5760	1,7250	2,3890	2,8686
$99,25^0$	—	1,4770	1,7310	1,9490	2,0930	—	—
$200,25^0$	—	1,8480	2,1040	2,3200	2,3915	(900^{at})	—

Äthylen (C_2H_4):

p^{at} =	1	50	100	175	250	500	750	1000
$t = 0^0$	1	{0,1570 42^{at}}	0,3100	0,5040	0,6870	1,2555	1,7865	2,3209
50^0	—	0,8375	0,5665	0,6480	0,8200	1,3985	1,9385	2,4565
100^0	—	1,1920	1,0050	0,8575	1,0315	1,5775	2,1190	2,6425
$198,5^0$	—	1,6520	1,5800	1,5350	1,5690	1,9846	2,5030	{2,8140 900^{at}}

Die vorhergehende Tabelle zeigt besonders deutlich nach welcher Richtung und um welchen Betrag die verschiedenen Gase vom B.-M. Gesetze bei verschiedenen Temperaturen und Drucken abweichen.

Die von uns in Betracht gezogenen Untersuchungen führen nun zu folgendem Schlusse:

Bei einer Temperatur, die weit oberhalb der kritischen liegt, komprimieren sich alle Gase weniger, als das B.-M. Gesetz verlangt; das Produkt pv wächst mit der Zunahme von p.

Näher zur kritischen Temperatur (wie z. B. H bei den im Vorhergehenden erwähnten Versuchen Wroblewskis) komprimieren sich bei Zunahme von p alle Gase zunächst stärker, hierauf schwächer, als dem B.-M. Gesetze entspricht; pv hat ein Minimum.

Unterhalb der kritischen Temperatur komprimiert sich das Gas stärker, als es das B.-M.-Gesetz verlangt; die Kompressibilität wächst mit der Druckzunahme bis zum Moment der Verflüssigung, wo sie fast plötzlich sehr klein wird, nämlich gleich der minimen Kompressibilität der entstandenen Flüssigkeit.

Witkowski findet für Luft bei verschiedenen und dabei sehr

niedrigen Temperaturen t folgende Werte für den **Druck** p in Atmosphären, bei welchen pv ein Minimum wird:

$t =$	$+100^0$	16^0	0^0	-35^0	$-78{,}5^0$	$-103{,}5^0$	-130^0	-135^0
$p =$	<10	79	95	115	123	106	66	57

Im dritten Bande werden die Fragen, denen die letzten Paragraphen gewidmet waren, eingehender behandelt werden.

§ 9. Zustandsgleichung der idealen Gase. Gleichung von Clapeyron. Als Zustandsgleichung eines gegebenen Stoffes werden wir einen Ausdruck von der Form

$$F(v, p, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bezeichnen, welcher einen Zusammenhang zwischen dem specifischen Volumen v, der Spannung oder dem Aufsendruck p und der Temperatur t einer gegebenen Menge des betreffenden Stoffes darstellt. Für ideale Gase wird dieser Zusammenhang zwischen v, p und t durch die Gesetze von B.-M. und G.-L. (Boyle-Mariotte und Gay-Lussac) geliefert. Seien v_1, p_1, t_1 und v_2, p_2, t_2 Gröfsen, welche sich auf zwei verschiedene, willkürliche Zustände einer und derselben Gasmenge beziehen. Kühlen wir das Gas in beiden Fällen bis auf 0^0 ab, ohne den Druck zu ändern; wir erhalten zwei neue Zustände

$$\frac{v_1}{1 + \alpha t_1}, \; p_1, \; 0^0 \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{1 + \alpha t_2}, \; p_2, \; 0^0,$$

wo $\alpha = \frac{1}{273}$ den Ausdehnungskoeffizienten der Gase bedeutet. Die Temperatur in diesen beiden Zuständen ist die gleiche, folglich hat man nach dem B.-M. Gesetze

$$\frac{v_1 p_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{v_2 p_2}{1 + \alpha t_2}.$$

Multipliziert man beide Nenner mit 273 und bezeichnet die absoluten Temperaturen (S. 37) mit T_1 und T_2, d. h. setzt man $273 + t_1 = T_1$ und $273 + t_2 = T_2$, so ist

$$\frac{v_1 p_1}{T_1} = \frac{v_2 p_2}{T_2}$$

oder wegen der willkürlichen Wahl der Zustände $\frac{vp}{T} = Const$; bezeichnet man die Konstante mit R, so erhält man

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies ist die Clapeyronsche Zustandsgleichung eines idealen Gases. Der Zahlenwert von R hängt von der Gasart, der in Betracht gezogenen Menge derselben und von den Einheiten ab, durch

welche p, v und T gemessen werden. Bleiben p und T ungeändert, so ist das Volumen v der Masse M des Gases proportional und indirekt proportional der Dichte δ, wenn man verschiedene Gase in den gleichen Mengen M wählt; hieraus folgt, dafs auch die Konstante R der Masse M des Gases direkt proportional und indirekt proportional seiner Dichte δ bei gleichen Massen ist.

Wir wollen nun drei Fälle der Bestimmung des Zahlenwertes von R betrachten.

I. Nehmen wir 1 kg Gas und messen wir v in Kubikmetern, p in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche. Für Luft berechnen wir R, indem wir $p = 1^{at} = 10\,333$ kg pro Quadratmeter und $t = 0^0$, d. h. $T = 273^0$ setzen. Das Volumen von einem Kilogramm Luft bei 0^0 und 760 mm Druck ist gleich 0,7733 cbm, folglich ist

$$R = \frac{p\,v}{T} = \frac{10\,333\,.\,0{,}7733}{273} = 29{,}27 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Für andere Gase haben wir $R = 29{,}27\,\delta^{-1}$ und mithin die Zustandsgleichung

$$\left.\begin{array}{c} p\,v = 29{,}27\,\delta^{-1}\,T \\ \text{(Ein kg Gas, cbm, kg pro qm Oberfläche)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Wählen wir für jedes Gas ein „Grammmolekül", d. h. so viel Gramm, als in seinem Molekulargewichte Einheiten enthalten sind, z. B. 2 g Wasserstoff, 32 g Sauerstoff, 18 g Wasserdampf u. s. w.; das Volumen v wollen wir in Litern, den Druck p in Atmosphären ausdrücken. Da ja für gegebene p und t die Volumina v eines Grammmoleküls aller vollkommenen Gase gleich sind, so ist klar, dafs man für R ein und dieselbe Zahl für alle Gase erhält. Aus dem Gesetze von Avogadro (S. 406) geht hervor, dafs wir die gleiche Anzahl Moleküle verschiedener Gase, folglich die gleichen ihren Dichten proportionalen Mengen der verschiedenen Gase nehmen. Um R zu berechnen, setzen wir $v = 1$, $t = 0^0$; es ist dann p der in Atmosphären ausgedrückte Gasdruck eines Grammmoleküls, das bei 0^0 das Volumen eines Liters erfüllt (z. B. 2 g Wasserstoff). Das Gewicht von einem Liter Luft bei 0^0 und 1^{at} Druck ist gleich 1,293 g, folglich das Gewicht eines Liters Wasserstoff bei 0^0 und 1^{at} Druck gleich $\frac{1{,}293}{14{,}4}$ g. Hieraus erhält man für den Druck p von 2 g Wasserstoff, die bei 0^0 das Volumen eines Liters erfüllen

$$p = 2 : \frac{1{,}293}{14{,}4} = \frac{28{,}8}{1{,}293} = 22{,}24^{at}.$$

Offenbar ist dies auch zugleich der Druck eines Grammmoleküls jeden beliebigen Gases, welches bei 0^0 das Volumen von 1 Liter hat. Da $p = 22{,}24$, $v = 1$ und $T = 273$ ist, so folgt

$$R = \frac{pv}{T} = \frac{22,24}{273} = 0,0815$$

und für die Clapeyronsche Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} pv = 0,0815\,T \\ \text{(Grammmolekül Gas, Liter, Atmosphären)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8$$

III. Wir wählen wieder ein Grammmolekül Gas, drücken ab das Volumen in Kubikcentimetern, den Druck in Grammen pr Quadratcentimeter aus. Da der Druck einer Atmosphäre gleic dem Druck von 1033,3 g pro Quadratcentimeter ist, so ist die Spannun eines Grammmoleküls bei dem Volumen v = 1 cbm = 0,001 Lit offenbar gleich

$$p = 22,24 \times 1033,3 \times 1000 \text{ g pro Quadratcentimeter.}$$

Es ist also

$$R = \frac{22,24 \times 1033,3 \times 1000}{273} = 84\,200,$$

und die Zustandsgleichung wird

$$\left.\begin{array}{c} pv = 84\,200\,T \\ \text{(Grammmolekül Gas, Kubikcentimeter, Gramm pro Quadratcentimeter)} \end{array}\right\} (8,$$

IV. Von besonderem Interesse ist der folgende Fal Schreiben wir die Zustandsgleichung des Gases in der Form $Ap = ART$ hin, wo A das thermische Arbeitsäquivalent bedeutet; fern setzen wir $AR = H$, dann ist

$$Apv = HT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9$$

Wir werden in Kapitel VI, § 1 sehen, dafs pv als eine gewis Arbeit betrachtet werden kann. Leicht kann man sich auch davo überzeugen, dafs die Dimension der Gröfse pv gleich der Dimensio der Arbeit ist; es ist nämlich der Druck p gleich der Kraft f, welch auf die Oberfläche s drückt, dividiert durch dieses s, und daher

$$[pv] = \frac{[f][v]}{[s]} = \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{L^3}{L^2} = \frac{ML^2}{T^2},$$

das aber ist die Dimension der Arbeit. Hieraus folgt, dafs Apv, folg lich auch H als eine gewisse Wärmemenge angesehen werde kann.

Nehmen wir ein Kilogrammmolekül Gas, messen v durc Kubikmeter, p durch Kilogramme pro Quadratmeter, dann i $A = 1 : 425$ und H ist in grofsen (Kilogramm-) Kalorien ausgedrücl für alle Gase die gleiche Zahl. Setzen wir wie früher $p = 1^{at} = 10333$ k pro Quadratmeter, $T = 273$; für v müssen wir $0,7733\,\mu : \delta$ setzen, w μ das Molekulargewicht, δ die auf Luft bezogene Gasdichte ist; es i aber $\mu = 28,9\,\delta$ (vergl. S. 407), folglich $v = 0,7733 \cdot 28,9$. Hieraus i

$$H = \frac{10\,333 \,.\, 0{,}7733 \,.\, 28{,}8}{425 \,.\, 273} = 1{,}978$$

oder nahezu $H = 2$, so dafs wir bei dieser Wahl der Einheiten

$$Apv = 2\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

erhalten.

Es ist leicht einzusehen, dafs obige Gleichung auch für den Fall richtig bleibt, wenn man ein Grammmolekül Gas nimmt und das Volumen in Litern ausdrückt.

§ 10. Van der Waalssche Gleichung. (1879). Die im Vorhergehenden besprochenen Versuche zeigen, dafs die Gase den Gesetzen von B.-M. und G.-L. durchaus nicht genau folgen, dafs daher die Clapeyronsche Formel (5) auch nicht den wahren Zusammenhang zwischen p, v und T geben kann. Man hat zahlreiche und sehr verschiedene Korrektionen der Clapeyronschen Formel in Vorschlag gebracht, d. h. kompliziertere Zustandsgleichungen für die wirklich vorhandenen Gase aufgestellt. Eine der bekanntesten hierhergehörigen ist die von van der Waals. Sie hat folgende Gestalt

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\,T \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (11)$$

wo a und b zwei für die verschiedenen Gase verschiedene Konstanten sind.

Ihre physikalische Bedeutung ist die folgende. Wir sahen (vergl. S. 42), dafs man den Gasdruck durch Stöfse der Gasmoleküle erklärt, welche die Wandungen des Gefäfses, in denen sich ein Gas befindet, treffen. Im Kapitel VI wird gezeigt werden, wie man die Formel $pv = R\,T$ herleitet unter der Annahme, dafs die Gasmoleküle Punkte darstellen, zwischen welchen keine Anziehung existiert. Die Moleküle nehmen indes ein gewisses Volumen v' ein, so dafs hierdurch der ihnen zur Bewegung freibleibende Raum verkleinert erscheint; infolgedessen werden sie häufiger gegen die Wandungen schlagen und ihre Spannung p wird dadurch gröfser als $\frac{R\,T}{v}$. Van der Waals zeigte, dafs p in diesem Falle gleich $\frac{R\,T}{v - b}$ sein mufs, wo $b = 4v'$ ist, d. h. b gleich dem vierfachen des von den Gasmolekülen eingenommenen Raume ist. Übrigens nehmen einige (z. B. O. E. Meyer) an, dafs $b = 4\sqrt{2}\,v'$ zu setzen ist.

Die Kohäsion vermindert den Druck, denn die Teilchen, welche sich in der Nähe der Wandungen befinden, werden gewissermafsen in die Gasmasse hineingezogen und dies vermindert die Wucht ihrer Stöfse. Die Verminderung von p mufs proportional der Zahl der

Stöfse und proportional der Zahl der Moleküle sein, welche die ersteren in die Gasmasse hineinzuziehen suchen, d. h also sie mufs proportional dem Quadrat der Gasdichte D oder indirekt proportional dem Quadrat des Volumens v sein. Danach erhält man

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad \cdots \cdots \quad (12)$$

woraus Formel (11) hervorgeht. Die van der Waalssche Formel kann auch in folgender Gestalt geschrieben werden

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \left(\frac{ab}{v^2} + bp\right) \cdot \quad \cdots \quad (13)$$

Diese Formel entspricht angenähert den Versuchsresultaten; bei Zunahme von p nimmt das Volumen v ab und die ganze rechte Seite nimmt zunächst ab, erreicht für $\frac{a}{v} = 2\frac{ab}{v^2} + bp$ ein Minimum und nimmt danach wieder zu. Für CH_4 fand Baynes (1880) eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit Formel (11); eine ebensolche Übereinstimmung fanden Roth und andere für CO_2, SO_2, NH_3 und Luft. Die numerischen Werte der Koeffizienten a und b werden aus den Beobachtungen gefunden.

Nimmt man als Einheit des Druckes den Druck von 1 m Quecksilbersäule auf die Volumeneinheit an, als Volumeneinheit das Volumen von 1 kg Gas bei 0° und 1 m Druck, so erhält man aus den Regnaultschen Versuchen für a und b folgende Zahlenwerte:

	a	b
Luft	0,0037	0,0026
CO_2	0,0115	0,003
H_2	0	0,00069.

Roth nimmt als Druckeinheit 1[at] und als Volumen 1 kg Gas bei 0° an und findet bezogen auf die Druckeinheit für die Volumeneinheit folgende Werte:

	a	b	
CO_2 . . .	0,00874	0,0023	bei 18,5°
		0,0027	„ 49,5°
		0,0029	„ 99,6° und 183,8°
SO_2 . . .	0,03002	0,0062	„ 58,0°
		0,0094	„ 96,6°
		0,0084	„ 183,2°
NH_3 . . .	0,0169	0,00602	„ 46,2°
		0,00631	„ 99,6° und 183°
C_2H_4 . . .	0,0142	0,00698	„ 18°
		0,00666	„ 50,2°
		0,00608	„ 99,6°
		0,00587	„ 182,8°

Neue Tabellen der Zahlenwerte für a und b haben A. Guye und L. Friderich 1900 veröffentlicht.

§ 11. Formeln von Clausius und Regnault. Clausius schlug als Zustandsgleichung folgenden Ausdruck vor

$$\left[p + \frac{a}{T(v + \beta)^2}\right](v - b) = RT \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Derselbe enthält drei Konstanten a, b und β und sagt uns, dafs der sogenannte „innere Druck“, der nach van der Waals gleich $a : v^2$ ist, von der Temperatur T abhängt und in komplizierterem Zusammenhange mit dem Volumen v steht. Bei Zugrundelegung derselben Einheiten, wie sie von Roth (vergl. § 10) zur Bestimmung der Werte von a und b gewählt wurden, erhält man hier für Kohlensäure $R = 0{,}003688$, $a = 0{,}000843$, $b = 0{,}000977$, $c = 2{,}0935$. Der Formel (14) kann die folgende Gestalt gegeben werden:

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v - b} - \frac{a}{RT^2(v + \beta)^2}.$$

In der Folge schlug Clausius eine noch kompliziertere Formel vor, in welcher bereits fünf Konstanten enthalten waren:

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v - b} - \frac{AT^{-n} - B}{(v + \beta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Aus der grofsen Zahl anderer in Vorschlag gebrachter Formeln sei hier nur die bereits angeführte [vergl. § 3, Formel (2)] Regnaultsche Formel erwähnt. Da man dieselbe in folgender Gestalt schreiben kann

$$pv = (1 + A + B) - \frac{A + 2B}{v} + \frac{B}{v^2}$$

und im letzten Gliede der Formel (13) für den van der Waalsschen Ausdruck anstatt bp auch $b' : v$ geschrieben werden kann, so ist klar, dafs sich die Formeln von Regnault und van der Waals bei $T =$ Const. nicht wesentlich voneinander unterscheiden.

Im dritten Bande werden die Abweichungen der Gase und Dämpfe vom B.-M. und G.-L. Gesetze ausführlicher behandelt und auch verschiedene andere Formen der Zustandsgleichung betrachtet werden.

Litteratur.

Boyle: Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris elastica. London 1662.
Mariotte: De la nature de l'air 1679.
Örstedt and Svendsen: Edinb. Journ. of science 4, 224, 1826.

Despretz: Ann. ch. et phys. (2) **34**, 335 und 443, 1827; Compt. rend. **14**, 239; **21**, 216.
Arago et Dulong: Mém. de l'Acad. Fr. **10**, 193, 1831; Ann. ch. et phys. (2) **43**, 74, 1830.
Pouillet: Elements de Phys. **1**, 327 (4. Aufl.).
Regnault: Mém. de l'Inst. **21**, 329, 1847; **26**, 229, 1862.
D. Berthelot: J. de phys. (3) **8**, 263, 1899; Compt. rend. **128**, 553, 1899.
Jochmann: Schlömilchs Zeitschr. **5**, 106, 1860.
Schröder v. d. Kolk: Pogg. Ann. **116**, 429, 1862; **126**, 333, 1865.
Natterer: Wien. Ber. **5**, 351, 1850; **6**, 557, 1850; **12**, 199, 1854; Pogg. Ann. **62**, 139; **94**, 436.
Cailletet: Compt. rend. **70**, 1131; **83**, 1211; **84**, 82; **88**, 61; Ann. ch. et phys. (5) **19**, 386.
Amagat: Compt. rend. **68**, 1170; **71**, 67; **73**, 183; **87**, 432; **88**, 336; **89**, 427; Ann. ch. et phys. (4) **28**, 274; **29**, 246; (5) **8**, 270; **19**, 345; **22**, 353; **23**, 353; **28**, 480; (6) **29**, 68, 1893.
A. Leduc: Compt. rend. **123**, 743, 1896; **125**, 297, 571, 646, 1897; **126**, 413, 1898; Ann. ch. et phys. (7) **15**, 5, 1898; J. de phys. (3) **7**, 5, 189, 1898.
P. Sacerdote: J. de phys. (3) **8**, 319, 1899.
D. Berthelot: J. de phys. (3) **8**, 521, 1899; Compt. rend. **128**, 1229, 1899.
D. Berthelot et P. Sacerdote: Compt. rend. **128**, 820, 1899.
Winkelmann: Wied. Ann. **5**, 92; J. de phys. (2) **8**, 183, 1880.
Roth: Wied. Ann. **11**, 1, 1880.
Siljeström: Pogg. Ann. **151**, 451 und 573, 1874; Chem. Ber. **8**, 576.
Mendelejeff und Kirpitscheff (russ.): Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. **19** und **21** 1874; Ann. ch. et phys. (5) **2**, 427, **9**, 111. — Über die Elasticität der Gase (russ), St. Petersburg 1875.
Fuchs: Wied. Ann. **35**, 430, 1888.
Van der Waals: Über die Kontinuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes (aus dem Holländischen übers.) 1873.
Clausius: Wied Ann. **9**, 337, 1880; **14**, 701, 1881.
Baynes: Nature (engl.) **22**, 186.
Andrews: Phil. Traus. 1869; Ann. ch. et phys. (4) **21**, 208, 1870.
U. Lala: Compt. rend. **3**, 819, 1890; **112**, 426, 1891.
Witkowski: Extraits du Bull. de l'Acad. des Sc. de Cravovie. Mai 1891, p. 181.
E. Baly and W. Ramsay: Phil. Mag. (5) **37**, 301, 1894.
C. Bohr: Wied. Ann. **27**, 459, 1886.
K. Krajewitsch (russ.): Neue Methode zur Untersuchung der Elasticität der Gase. Journ d. russ. phys.-chem. Ges. **14**, 395, 1882. Andere Abhandlungen über die Elasticität der Gase: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **16**, 307, 1884; **17**, 335, 1885.
N. N. Schiller: Die Zustandsgleichung der Gase (russ.). Journ. de russ. phys.-chem. Ges. **22**, 110, 1880.

Drittes Kapitel.

Barometer, Manometer und Pumpen.

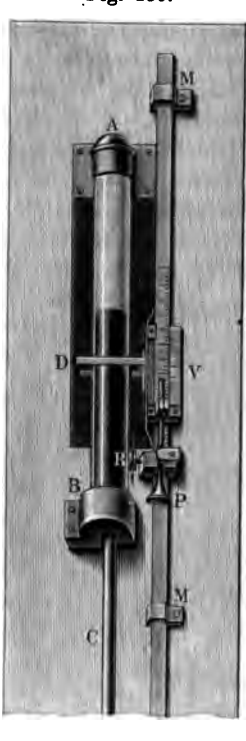
§ 1. **Der Luftdruck.** Als normalen Luftdruck bezeichnet man denjenigen, welcher dem Drucke einer Quecksilbersäule von 760 mm

Höhe bei 0° am Meeresniveau und in 45° Breite gleich ist. Da das Gewicht eines Kubikcentimeters Quecksilber bei 0° gleich 13,596 g ist, so beträgt der normale Luftdruck 1,0333 kg pro Quadratcentimeter. Drückt man denselben in Dynen aus (S. 89), so erhält man 1,0132 Megadynen pro Quadratcentimeter. Da sich diese Zahl nur wenig von Eins unterscheidet, ist der Vorschlag gemacht worden, den Luftdruck überhaupt in Megadynen pro Quadratcentimeter zu messen und den Druck einer Megadyne pro Quadratcentimeter als Normaldruck gelten zu lassen.

Fig. 232.



Fig. 233.



Streng genommen hat jeder Ort auf der Erde seinen eigenen normalen Luftdruck, welcher gleich dem mittleren Druck für ein gröfseres Zeitintervall (von mehreren Jahren) ist. In diesem Sinne ist der normale Luftdruck auf dem Gipfel des Montblanc gleich 420 mm. Die Apparate, welche zum Messen des Luftdrucks dienen, heifsen Barometer. Es giebt Quecksilber-, Glycerin-, Naphtha-, Wasser-, Metallbarometer u. s. w.

§ 2. Das Quecksilberbarometer. Man bezeichnet die Quecksilberbarometer je nach ihrer Form als Gefäfsbarometer, Heberbarometer und Wagebarometer. Es soll hier übergangen werden wie man die Barometer anfertigt, insbesondere wie man sie mit reinem, luftfreiem Quecksilber füllt.

In Fig. 232 ist ein Gefäfsbarometer abgebildet, so genannt nach dem Gefäfs E, welches als Reservoir für das Quecksilber dient. In dies Gefäfs taucht das untere Ende der Röhre $ABCE$, welche Quecksilber und über demselben die sogenannte Torricellische Leere enthält. Der obere Teil AB der Röhre ist in Fig. 233 gesondert abgebildet; er ist breiter als die übrige Röhre, um die Wirkung der Kapillarität (V. Abschnitt, Kap. 5, § 4) zu vermindern. Letztere wirkt auf die Quecksilbersäule wie ein von oben nach unten gerichteter Druck und

erniedrigt das obere Quecksilberniveau um so mehr, je enger die Röhre ist. Neben der Barometerröhre befindet sich ein Lineal aus Messing, auf dessen oberem versilberten Ende eine Skala aufgetragen ist; der Nullpunkt dieser Skala würde, wenn sie bis nach unten reichte, am Ende des am Lineal angebrachten spitzen Stäbchens liegen. Mittels eines kleinen Zahnrades, das mit dem Kopfe F verbunden ist, und einer kleinen Zahnradstange kann man die Skala derart heben oder senken, daſs die Spitze des erwähnten Stäbchens die Quecksilberoberfläche E berührt; dies ist leicht zu erreichen, wenn man das Spiegelbild der Spitze im Quecksilber beobachtet. Das Stäbchen wird bisweilen durch einen Schwimmer ersetzt, an dem ein horizontaler Strich sich in gleicher Höhe mit einem ebensolchen Strich auf dem Elfenbeinansatz des Messingstreifens befinden muſs. Parallel zur Skala verschiebt sich der Nonius V, mit welchem zwei Prismen verbunden sind. Letztere umfassen die Röhre AB von vorn und hinten; ihre nach oben gekehrten Kanten liegen in einer horizontalen Ebene, falls die Barometerröhre selbst vertikal ist, und entsprechen dem Nullpunkt des Nonius. Bevor man eine Ablesung am Barometer vornimmt, hat man zunächst die Skala, wie vorher erwähnt, einzustellen und hierauf den Nonius derart zu verschieben, daſs die durch die Prismenkanten gehende Horizontalebene die Quecksilberkuppe gerade tangiert.

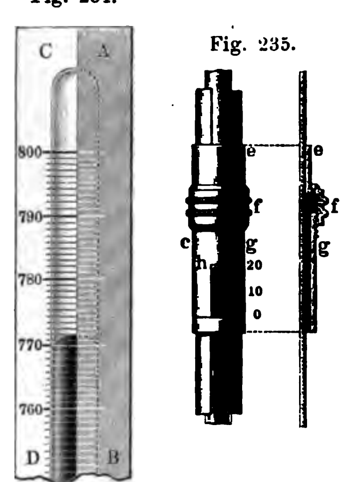


Fig. 234.

Fig. 235.

Bisweilen trägt man die Skala nicht auf einem Lineal aus Messing, sondern auf einem Glasstreifen $CADB$ (Fig. 234) auf, dessen eine Hälfte (AB) amalgamiert ist und als Spiegel dient. In diesem Spiegel erblickt der Beobachter das Bild seines eigenen Auges; bei der Ablesung hat man den Kopf in eine solche Höhe zu bringen, daſs derjenige Teilstrich, welcher der Quecksilberkuppe am nächsten liegt, das Spiegelbild der Pupille gerade halbiert. Eine andere Ablesungsmethode ist aus Fig. 235 ersichtlich; die Barometerröhre ist hier von einer Messinghülse umgeben, die den Nonius trägt (rechts, wo die Striche 0 bis 20 stehen). In der Hülse befinden sich zwei einander gegenüberliegende Einschnitte, durch welche man das obere Ende der Quecksilbersäule erblicken kann. Die Horizontalebene, welche durch die oberen Ränder der Einschnitte geht, muſs die Quecksilberkuppe berühren.

Die letztgenannte Ablesungsmethode wird am transportablen

Barometer von Fortin (Reisebarometer) in Anwendung gebracht. In Fig. 236 ist dasselbe in derjenigen Stellung dargestellt, in welcher es bei den Beobachtungen gebraucht ist; in Fig. 237 ist der untere Teil desselben, welcher das Quecksilbergefäfs enthält, im Durchschnitt


Fig. 236. Fig. 237.

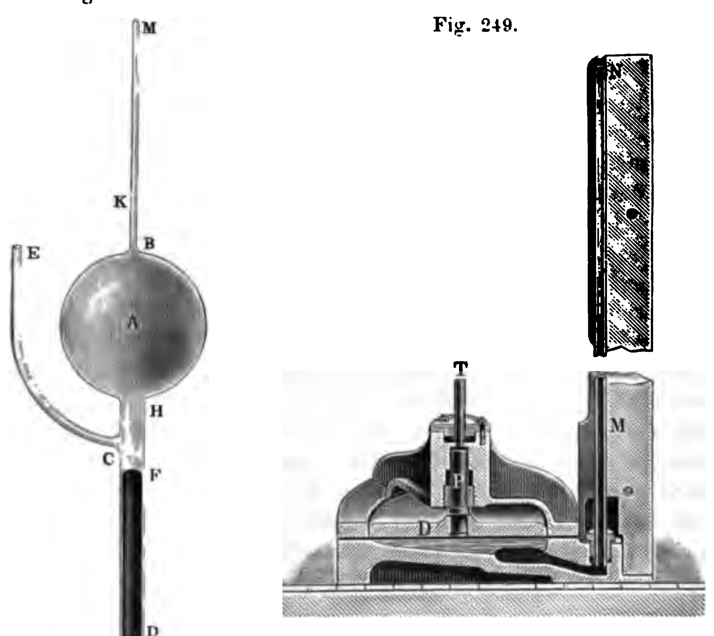




wiedergegeben. Dieser untere Teil stellt ein allseitig geschlossenes Gefäfs dar; das Quecksilberniveau wird vor jeder Beobachtung auf ein und dieselbe Höhe gebracht und zwar so, dafs es das untere Ende des elfenbeinernen Stäbchens *r* berührt. Der Boden des Quecksilberbehälters besteht aus sämisch Leder und kann mittels der Schraube *s* gehoben oder gesenkt werden. Der Nullpunkt der Skala entspricht der Spitze des elfenbeinernen Stäbchens *r*. Hat man das Barometer zu transportieren, so dreht man die Schraube *s* so, dafs sich der den Boden vertretende Lederbeutel hebt. Alle innen über dem Quecksilber enthaltene Luft entweicht dann aus dem Gefäfs, das Quecksilber erfüllt zunächst das ganze Reservoir und hierauf

gehoben werden. Es ist klar, dafs das in A enthaltene Gas ebenfalls die Spannung hat, welche hier gesucht wird. Um nun diese Spannung zu finden, hebt man das Quecksilberniveau über F hinaus; hierbei wird zunächst die seitliche Öffnung C der linken Röhre verschlossen, worauf dann das Quecksilber einerseits in der Röhre CE aufsteigt, andererseits den Ballon A und einen Teil der Röhre BM z. B. bis zu einem Punkte K, füllt. Das ganze Gasquantum, welches sich vordem im Volumen $V = CM$ befand, ist nunmehr auf den Raum $v = KM$ zusammengedrückt; seine Spannung ergiebt sich aus dem Niveauunterschiede des Quecksilbers in den Röhren CE und BM. Kennt man das Verhältnis der Volumina V und v, so kann man leicht die ursprüngliche Gasspannung finden. Brush hat (1897) obige Methode von Mc. Leod vervollkommnet.

Fig. 248. Fig. 249.



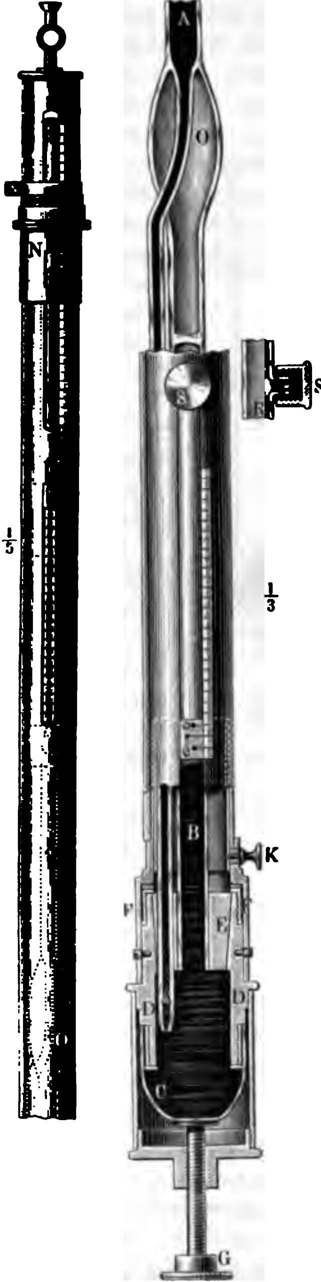
Zur Messung sehr hoher Spannungen kann das Manometer von Desgoffe dienen, welches in Fig. 249 abgebildet ist und gewissermafsen eine umgekehrte hydraulische Presse darstellt. Der gesuchte Druck wirkt durch die Röhre T auf den Stahlcylinder P ein, der in einer breiten Platte D endet. Unter D befindet sich eine grofse Kautschukplatte, welche den kurzen Schenkel des Manometers vollkommen verschliefst. In diesem befindet sich Wasser und unter letzterem Quecksilber, welches in den oben offenen Schenkel MN hineingeprefst

durchsetzt die Erweiterung O, in welche sie eingeschmolzen ist, biegt dann um und nimmt die gleiche Breite wie B an. Die Röhre B steht durch eine kleine seitliche, mit der Kappe S zu verschliefsenden Öffnung in Verbindung mit der Aufsenluft. Auf der die Glasröhre umgebenden Messinghülse befindet sich die Skalenteilung, deren Nullpunkt unten liegt. Bei der Ablesung hebt man zunächst das Quecksilberniveau in B bis zum unteren Rande eines kleinen Visiers, dessen drei Teilstriche zunächst gegen die Skala eingestellt worden sind. Jetzt befindet sich das Quecksilberniveau des kurzen Schenkels B in gleicher Höhe mit dem Nullpunkte der Skala. Man verschiebt nun die Hülse N nach oben oder unten so, dafs sich der Rand des in dieser Hülse angebrachten Spaltes in gleicher Höhe mit der Quecksilberkuppe befindet. Hierauf nimmt man die eigentliche Ablesung vor. Hat man das gefüllte Barometer zu transportieren, so schraubt man zunächst G so weit herauf, dafs das Quecksilber die lange Röhre A völlig, die kurze

Fig. 241.



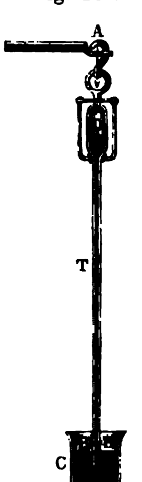
Fig. 242.



Röhre B bis zur Seitenöffnung derselben erfüllt und schliefst hierauf letztere mittels der Kappe S.

Ein Wagebarometer ist in Fig. 243 abgebildet; seine Röhre ist am einen Ende eines Wagebalkens befestigt. Der Druck auf den Punkt A hängt von dem Gewichte des Quecksilbers ab, welches in der Röhre oberhalb BB enthalten ist (falls man das Gewicht der Glasröhre und der metallenen Aufhängevorrichtung nicht in Betracht zieht). Die Änderungen des Luftdruckes werden durch das zum Äquilibrieren erforderliche, auf der Wage befindliche Gegengewicht oder durch die Neigungsänderung des Wagebalkens bestimmt. Das Prinzip, auf welchem die Wagebarometer beruhen, findet vorzugsweise bei den Barographen (vergl. § 5) Verwendung.

Fig. 243.



§ 3. Aufstellung des Barometers und Ablesungskorrektionen. Damit ein Barometer richtige Angaben giebt, sind folgende Umstände in Betracht zu ziehen:

1. Die Barometerröhre mufs eine solche Weite haben, dafs die Kapillarität keinen schädlichen Einflufs ausüben kann.

2. Das Quecksilber mufs vollkommen rein sein.

3. In der sogenannten Torricellischen Leere darf sich keine Spur von Luft vorfinden.

4. Das Barometer (d. h. eigentlich die Skala desselben) mufs genau vertikal sein.

5. Die Skala mufs vollkommen genau oder aber es müssen die Korrektionen für sie bei 0° bekannt sein, die man durch Vergleichung mit einem geaichten Mafslineal erhält.

6. Um die Trägheit des Quecksilbers zu beseitigen, die es am gehörigen Aufsteigen hindert, ist es gut, die ganze Quecksilbersäule vor der Ablesung leicht zu erschüttern. Ist die Ablesung gemacht, d. h. hat man den Vertikalabstand H beider Quecksilberniveaus in den entsprechenden Skalenteilen für den gegebenen Beobachtungsort und die Temperatur t gefunden, so hat man noch eine Reihe von Korrektionen anzubringen, um ein Mafs für den Luftdruck in Millimetern der Quecksilbersäule für die Temperatur 0°, die Meereshöhe und die geographische Breite von 45° zu erhalten. Es sind dies folgende Korrektionen:

1. Reduktion der Quecksilbersäule auf 0°. Der kubische Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers ist gleich $\beta = 0{,}000\,181$; ebenso grofs ist auch der Änderungskoeffizient der Quecksilberdichte und der Höhe der Quecksilbersäule, welche auf die Flächeneinheit ihrer

Basis den gegebenen Druck ausübt. Die hierher gehörige Korrektion giebt anstatt H den Wert

$$H_0 = \frac{H}{1 + \beta t}.$$

II. Reduktion der Skala auf 0°. Wir setzen voraus, dafs die Korrektionen der Skalenteile für 0° bekannt sind. Den Ausdehnungskoeffizienten der Skala bezeichnen wir mit γ; für Messing ist $\gamma = 0{,}000\,019$, für Glas und Platin ist $\gamma = 0{,}000\,009$. Infolge der Skalenausdehnung erhält man bei der Ablesung zu kleine Werte. Die neue Korrektion ist $H_0 = H(1 + \gamma t)$. Vereinigt man sie mit der ersteren, so erhält man angenähert

$$H_0 = \frac{H(1 + \gamma t)}{1 + \beta t} = H[1 - (\beta - \gamma)t] \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es existieren Tabellen für die Gröfse $H(\beta - \gamma)t$, entsprechend den verschiedenen Werten von H und t für eine Skala aus Messing. Ist $H = 760$ mm und $t = 20^0$, so beträgt diese Korrektion 2,46 mm für Messing und 2,60 mm für eine Glasskala. Man hat diese Korrektion, falls $t > 0^0$ ist, vom beobachteten H zu subtrahieren.

III. Korrektion wegen Kapillardepression des Quecksilbers. Diese Korrektion hängt von der Röhrenweite (der Meniskushöhe) ab; bei den Heberbarometern fällt sie weg, falls die Weite beider Schenkel die gleiche ist. Man hat auch für diese Korrektion fertige Tabellen; beträgt die Röhrenweite nicht weniger als 16 mm, so kann sie vernachlässigt werden.

IV. Korrektion wegen Änderung der Schwerkraft mit der Höhe und geographischen Breite des Beobachtungsorts. Entsprechend der Formel (22) auf S. 392 ist

$$H_0 = H(1 - 0{,}002\,59 \cos 2\varphi - 0{,}000\,000\,003\,14\,h) \quad . \quad (2)$$

wo φ die geographische Breite, h die in Metern ausgedrückte Höhe des Beobachtungsortes über der Erdoberfläche ist. Werden die Beobachtungen auf einem Hochplateau angestellt, so ist statt 314 die Zahl 196 zu setzen. Die Korrektion wegen der Breite beträgt für die Pole und den Äquator 2 mm, für St. Petersburg etwa 1 mm.

V. Korrektion wegen des Drucks der Quecksilberdämpfe. Diese äufserst geringe Korrektion beträgt bei 20° 0,02 mm, bei 40° 0,03 mm.

VI. Reduktion auf das Meeresniveau. Diese Korrektion hat man nicht einzuführen, falls man die Gröfse des Luftdrucks für einen gegebenen Ort zu wissen wünscht. In der Meteorologie wird sie indes eingeführt, sobald man den Luftdruck für verschiedene Orte eines ausgedehnten Gebietes vergleichen will. Sie wird nach gewissen hypsometrischen Formeln berechnet, welche den Luftdruck mit der Höhenlage eines Orts über dem Niveau der Ozeane in Relation setzen.

Ein Barometer, bei welchem mit gröfster Umsicht alle Vorkehrungen getroffen sind, um die Gröfse des Luftdrucks mit der höchsten erreichbaren Genauigkeit zu erhalten, heifst Normalbarometer. Zwei derartige Barometer sind z. B. im Physikalischen Zentralobservatorium zu St. Petersburg angefertigt worden; eines derselben befindet sich im Konstantinobservatorium zu Pawlowsk, das andere in der Zentralanstalt (Glawnaja Palata) der Mafse und Gewichte zu St. Petersburg.

§ 4. Barometer mit anderen Flüssigkeiten und Metallbarometer. Um die Empfindlichkeit des Barometers zu erhöhen, hat man das Quecksilber durch Wasser oder Glycerin ersetzt. Ein Glycerinbarometer hat eine Höhe von 8,22 m, ist mithin mehr als zehnmal so empfindlich wie ein Quecksilberbarometer.

Ein Barometer mit gemischter Füllung ist in Fig. 244 dargestellt; der Teil *bac* ist mit Quecksilber, der Teil *dc* mit Wasser gefüllt. Es

Fig. 244.



Fig. 245.



ist leicht einzusehen, dafs eine Niveauänderung in *b* und *c* eine vergröfserte Niveauverschiebung der Wassersäule innerhalb der dünnen Röhre *d* zur Folge hat.

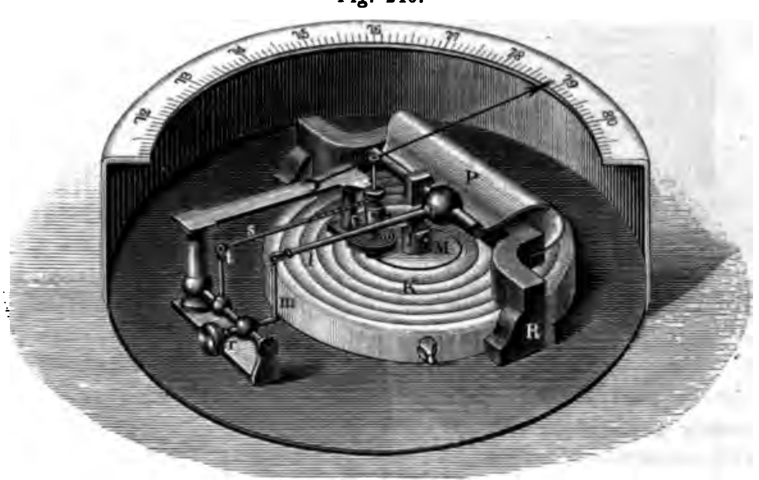
Mendelejeff hat ein sehr empfindliches Differentialbarometer konstruiert, in welchem die Füllung aus Naphtha besteht. Dasselbe gestattet den Unterschied des Luftdrucks an zwei Orten zu messen, deren Vertikalabstand nicht mehr als 1 m beträgt. Zwei interessante Formen des Naphthabarometers sind von P. Reinbot in Vorschlag gebracht worden. Zur Messung sehr geringer Luftdruckschwankungen

dienen die Apparate von Kohlrausch (1873), Hefner-Alteneck und insbesondere J. West (1898). Die Beobachtungen von West haben gezeigt, dafs der Luftdruck kontinuierlich kleine Schwankungen erleidet, insbesondere bei starkem Winde.

In Fig. 245 ist das Metallbarometer von Bourdon abgebildet. Der Hauptbestandteil desselben ist die evakuierte dünnwandige Metallröhre *ABC* mit elliptischem Querschnitt, die im Punkte *B* befestigt ist. Bei Zu- resp. Abnahme des Aufsendrucks nähern resp. entfernen sich ihre Enden *A* und *C* voneinander. Diese Verschiebungen werden mittels des Stäbchens *DE* auf eine bogenförmige Zahnradstange *ik* übertragen, welche ein kleines Zahnrad und den damit verbundenen Zeiger in Bewegung setzt. Die Skala wird durch Vergleichung der Zeigerstellung mit den Angaben eines Quecksilberbarometers hergestellt.

Bei dem sogenannten Aneroidbarometer von Vidi, welches Breguet vervollkommnet hat, ist die Röhre durch eine runde Metall-

Fig. 246.



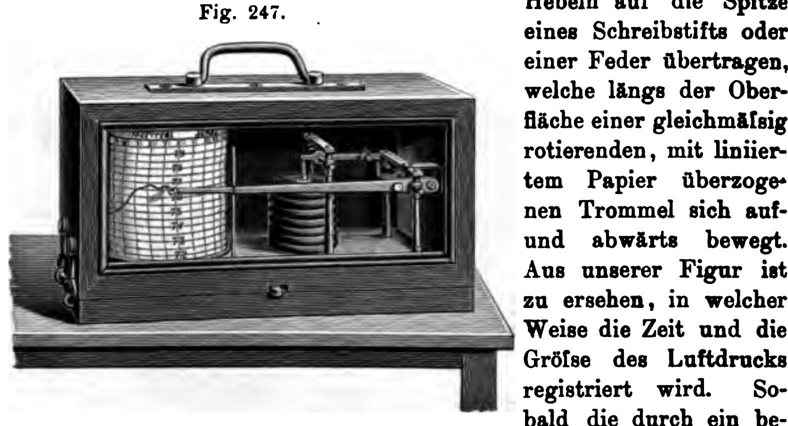
dose *K* (Fig. 246) ersetzt, welche ebenfalls evakuiert ist. Der kreisförmig gerillte Boden der Dose biegt sich nach aufsen oder innen, sobald sich der Aufsendruck ändert. Die starke Metallfeder *P*, welche mittels des Trägers *R* an die Bodenplatte des Apparates befestigt ist, ist mit der Mitte des Dosendeckels bei *M* verbunden und wirkt dem äufseren Luftdruck entgegen. Das mit der Feder *P* verbundene Stäbchen *l*, der Hebel *mr* und die Kette *s* dienen zur Übertragung der Bewegungen des Bodens *M* auf den Zeiger.

§ 5. Barograph. Die selbstregistrierenden Instrumente, welche mehr oder weniger kontinuierlich die Änderungen des Luftdrucks ver-

zeichnen, nennt man Barographen. Man hat Quecksilberbarographen, bei denen sich die Bewegungen eines Schwimmers, der sich im offenen Schenkel der Heberröhre befindet, durch einen ziemlich komplizierten Mechanismus auf einen Schreibstift übertragen. Letzterer berührt einen sich nach unten bewegenden Papierstreifen und verschiebt sich selbst nach links und rechts. Als Barograph kann auch ein Wagebarometer (S. 442) dienen; der Schreibstift befindet hier am Ende eines langen, am Wagebalken befestigten Zeigers. Ein solcher Barograph befindet sich im Observatorium zu Pawlowsk.

Sehr verbreitet ist der in Fig. 247 abgebildete Barograph von Richard. Sein wesentlichster Bestandteil ist eine Reihe übereinander stehender Metalldosen, die an die Dose des Aneroid erinnern. Der Deckel der obersten Dose biegt sich bei Änderung des Luftdrucks recht beträchtlich. Diese Verschiebungen werden durch ein System von Hebeln auf die Spitze eines Schreibstifts oder einer Feder übertragen, welche längs der Oberfläche einer gleichmäfsig rotierenden, mit liniiertem Papier überzogenen Trommel sich auf- und abwärts bewegt. Aus unserer Figur ist zu ersehen, in welcher Weise die Zeit und die Gröfse des Luftdrucks registriert wird. Sobald die durch ein besonderes Uhrwerk in Drehung versetzte Trommel eine volle Umdrehung gemacht hat, mufs man den Papierstreifen abnehmen und durch einen neuen ersetzen. Einen durch seine Empfindlichkeit ausgezeichneten Wagebarograph hat K. Krajewitsch konstruiert.

Fig. 247.



§ 6. Grenzen, innerhalb deren der barometrische Druck schwankt. Zwei Fragen werden hier, weil nicht unmittelbar in die Physik gehörig, unberührt bleiben: die Frage nach den Ursachen für die Schwankungen des Luftdrucks und ferner die Frage nach der Verwendung des Barometers zu Höhenmessungen (Hypsometrie). Die erste dieser Fragen gehört in die Meteorologie, die letztere in die Geodäsie.

Es sei hier jedoch auf die Grenzwerte hingewiesen, innerhalb deren der Luftdruck in verschiedenen Städten Rufslands schwankt; es ist dies nicht ohne Interesse im Hinblick auf die Abhängigkeit des

Siedepunkts der Flüssigkeiten, insbesondere des Wassers vom äufseren Druck. Die folgenden Zahlen sind aus einer Arbeit von A. Tillo entlehnt.

Name der Städte	Beobachtungsdauer Jahre	Maximum mm	Minimum mm	Differenz mm
Archangelsk	40	791,4	712,7	78,7
St. Petersburg	55	797,5	712,6	84,9
Moskau	55	795,8	724,9	70,9
Jekaterinburg	55	796,8	725,8	71,0
Nikolajew	55	787,5	737,0	50,5
Tiflis	46	784,3	746,5	37,8
Bogoslowsk	55	794,8	711,3	83,5

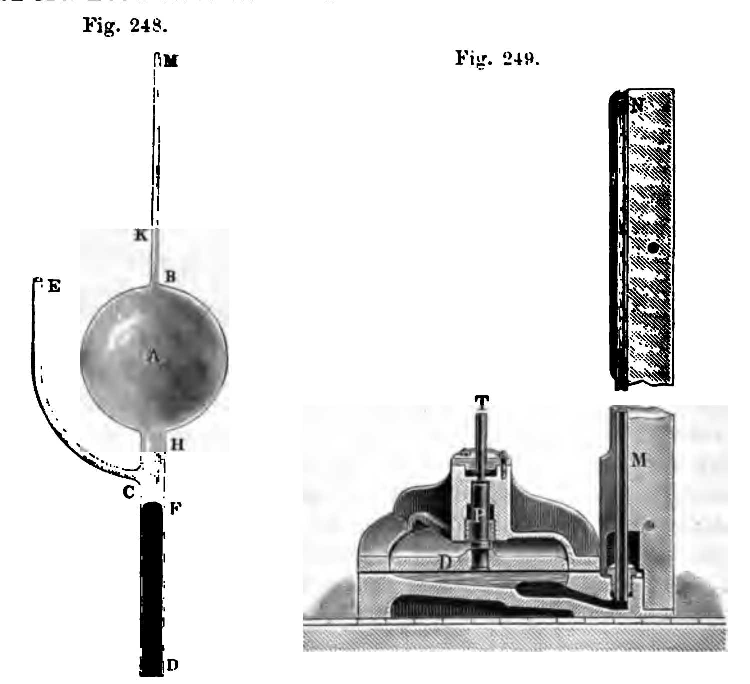
§ 7. **Manometer.** Die Apparate, welche zur Messung der Spannung von Gasen und Dämpfen dienen, heifsen Manometer. Einigen derselben begegneten wir bereits bei Beschreibung der Versuche von Cailletet und Amagat (S. 424). Je nach der Gröfse der zu messenden Spannung benutzt man Manometer von sehr verschiedenartiger Konstruktion.

Für sehr geringe Spannungen benutzt man ein verkürztes Barometer (Barometerprobe) oder Baromanometer; es ist dies eine U-förmige Röhre; einer ihrer Schenkel ist ganz mit Quecksilber gefüllt, während der andere, offene nur wenig Quecksilber enthält. Ist der äufsere Druck h genügend klein, so fällt das Quecksilber im festen Schenkel und steigt im offenen. Der Druck h wird durch die Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln gemessen. Solche Barometerproben befinden sich an den gewöhnlichen Luftpumpen. Für Spannungen, welche sich vom Atmosphärendruck nur wenig unterscheiden, wird eine offene U-förmige Röhre benutzt, deren Schenkel nur bis zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt sind. Der gesuchte Druck h ist gleich $h = H + h'$, wo H den Luftdruck, h' die Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln bedeutet.

Zur Messung der minimen Spannungen eines Gasresiduums, welches nach Auspumpen des Gases aus einem Gefäfse mittels einer guten Pumpe noch übrig geblieben ist (z. B. in einer Crookesschen Röhre), kann das Manometer von Mc. Leod (1874) dienen. Dasselbe besteht aus einem Glasballon A (Fig. 248, a. f. S.), an welchem oben eine lange vertikale, äufserst dünne Glasröhre BM, die mit Teilung versehen ist, ansetzt. Die Röhre HD enthält Quecksilber, das bis zur Höhe F reicht. Über F befindet sich die Mündung einer seitlichen Röhre CE, die mit dem Raume in Verbindung steht, in welchem die zu messende Spannung herrscht. Das Quecksilber der Röhre DF kann in gewöhnlicher Weise

gehoben werden. Es ist klar, dafs das in A enthaltene Gas ebenfalls die Spannung hat, welche hier gesucht wird. Um nun diese Spannung zu finden, hebt man das Quecksilberniveau über F hinaus; hierbei wird zunächst die seitliche Öffnung C der linken Röhre verschlossen, worauf dann das Quecksilber einerseits in der Röhre CE aufsteigt, andererseits den Ballon A und einen Teil der Röhre BM z. B. bis zu einem Punkte K, füllt. Das ganze Gasquantum, welches sich vordem im Volumen $V = CM$ befand, ist nunmehr auf den Raum $v = KM$ zusammengedrückt; seine Spannung ergiebt sich aus dem Niveauunterschiede des Quecksilbers in den Röhren CE und BM. Kennt man das Verhältnis der Volumina V und v, so kann man leicht die ursprüngliche Gasspannung finden. Brush hat (1897) obige Methode von Mc. Leod vervollkommnet.

Fig. 248. Fig. 249.



Zur Messung sehr hoher Spannungen kann das Manometer von Desgoffe dienen, welches in Fig. 249 abgebildet ist und gewissermafsen eine umgekehrte hydraulische Presse darstellt. Der gesuchte Druck wirkt durch die Röhre T auf den Stahlcylinder P ein, der in einer breiten Platte D endet. Unter D befindet sich eine grofse Kautschukplatte, welche den kurzen Schenkel des Manometers vollkommen verschliefst. In diesem befindet sich Wasser und unter letzterem Quecksilber, welches in den oben offenen Schenkel MN hineingeprefst

wird. Sei nun h die Höhe des Quecksilbers in MN, H der gesuchte Druck, s die Fläche des Cylinderquerschnitts, S die Fläche der Platte D; es ist dann $H = h\frac{S}{s}$. Bei $S = 100\,s$ kann man einen gewaltigen Druck mit einer relativ niedrigen Quecksilbersäule messen.

Für hohe Spannungen kann auch ein geschlossenes Manometer dienen, wie es Cailletet benutzt hat; es ist mit Luft gefüllt, aus deren Volumverminderung man auf den zu messenden Druck schliefst. Um dem Apparate die gleiche Empfindlichkeit auch für hohe Spannungen zu verleihen, läfst man die Röhre sich nach dem verschlossenen Ende

Fig. 250.

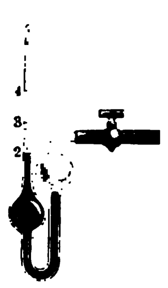


Fig. 251.



hin verjüngen. Ein solches Manometer ist in Fig. 250 abgebildet, die beigefügten Zahlen geben die Spannung in Atmosphären an.

Sehr verbreitet ist das Metallmanometer von Bourdon, welches auf demselben Prinzipe beruht wie sein Barometer (S. 445); es ist in Fig. 251 abgebildet. Die gebogene Messingröhre b, deren ovaler Durchschnitt nebenbei abgebildet ist, steht mit ihrem verschlossenen Ende c mit einem Zeiger in Verbindung; das offene Ende a der Röhre ist durch eine mit einem Hahn hh versehene Röhre mit dem Raum verbunden, in welchem die zu messende Spannung herrscht. Je gröfser der Druck in diesem Raume ist, um so stärker wird die Röhre abc gestreckt, wobei sich dann das Zeigerende längs einer Skala hinbewegt. Die Skala selbst wird durch Vergleichung der Zeigerangaben

mit den Angaben eines Quecksilbermanometers oder eines sonstigen justierten Manometers entworfen.

§ 8. Quecksilber- und Wasser-Luftpumpen. Die Konstruktion der gewöhnlichen Saug- und Druckpumpen ist aus der Elementarphysik bekannt. Wir wollen daher hier hauptsächlich die Einrichtung einiger Quecksilberpumpen betrachten, welche gegenwärtig vielfache Verwendung gefunden haben. Wir begnügen uns dabei mit der Beschreibung einiger wichtiger Typen von solchen Pumpen; eine ausführliche Beschreibung verschiedener Nebenapparate und genaue Angabe über die Art der Benutzung der Pumpen gehört nicht in den Rahmen dieses Buches, um so mehr, da die von verschiedenen Mechanikern konstruierten Pumpen sich durch mancherlei, neuerdings angebrachte Abänderungen nicht unbeträchtlich voneinander unterscheiden.

Fig. 252a.

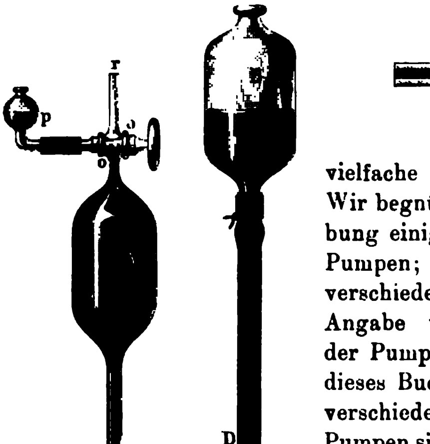
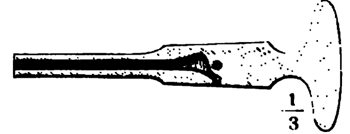


Fig. 252b.



Die sämtlichen gegenwärtig gebräuchlichen Quecksilberluftpumpen lassen sich in zwei Gruppen teilen, welche nach ihren Erfindern als Geisslersche und als Sprengelsche Pumpen bezeichnet werden können.

Die Konstruktion der ersteren beruht wesentlich darauf, dafs der zu evakuierende Raum, d. h. der Rezipient, mehrmals hintereinander mit einem Raum in Verbindung gebracht wird, der sich als Torricellische Leere über einer Quecksilbersäule darstellt. Fig. 252a und Fig. 252b können dazu dienen, das Prinzip der Geisslerschen Pumpe zu erläutern. *AC* und *BD* sind zwei kommunizierende Gefäfse, welche Quecksilber enthalten. Das Gefäfs *B* ist oben offen; das Reservoir *A* kann durch den Hahn *oo* entweder mit *r* oder mit dem kleinen Gefäfs *p* verbunden werden. Fig. 252a zeigt die Einrichtung des Hahnes *oo*; bei der hier angegebenen Stellung ist *A* durch den Längskanal des Hahnes mit *p*

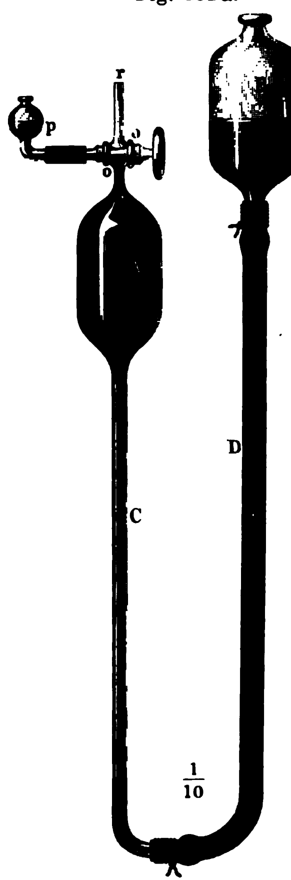


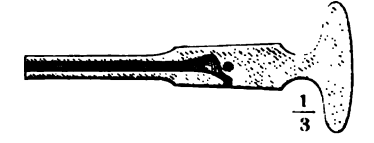
mit den Angaben eines Quecksilbermanometers oder eines sonstigen justierten Manometers entworfen.

§ 8. Quecksilber- und Wasser-Luftpumpen. Die Konstruktion der gewöhnlichen Saug- und Druckpumpen ist aus der Elementarphysik bekannt. Wir wollen daher hier hauptsächlich die Einrichtung einiger Quecksilberpumpen betrachten, welche gegenwärtig



Fig. 252 a. Fig. 252 b.





vielfache Verwendung gefunden haben. Wir begnügen uns dabei mit der Beschreibung einiger wichtiger Typen von solchen Pumpen; eine ausführliche Beschreibung verschiedener Nebenapparate und genaue Angabe über die Art der Benutzung der Pumpen gehört nicht in den Rahmen dieses Buches, um so mehr, da die von verschiedenen Mechanikern konstruierten Pumpen sich durch mancherlei, neuerdings angebrachte Abänderungen nicht unbeträchtlich voneinander unterscheiden.

Die sämtlichen gegenwärtig gebräuchlichen Quecksilberluftpumpen lassen sich in zwei Gruppen teilen, welche nach ihren Erfindern als Geisslersche und als Sprengelsche Pumpen bezeichnet werden können.

Die Konstruktion der ersteren beruht wesentlich darauf, dafs der zu evakuierende Raum, d. h. der Rezipient, mehrmals hintereinander mit einem Raum in Verbindung gebracht wird, der sich als Torricellische Leere über einer Quecksilbersäule darstellt. Fig. 252a und Fig. 252b können dazu dienen, das Prinzip der Geisslerschen Pumpe zu erläutern. *AC* und *BD* sind zwei kommunizierende Gefäfse, welche Quecksilber enthalten. Das Gefäfs *B* ist oben offen; das Reservoir *A* kann durch den Hahn *oo* entweder mit *r* oder mit dem kleinen Gefäfs *p* verbunden werden. Fig. 252a zeigt die Einrichtung des Hahnes *oo*; bei der hier angegebenen Stellung ist *A* durch den Längskanal des Hahnes mit *p*

der Wasserpumpe weggesogen. Hat das Quecksilber die Röhre S^1 erreicht, so kippt der Rahmen nach rechts; der Hahn K wird gedreht, das Wasser fliefst aus M durch k_2 ab und das Quecksilber sinkt durch seine Schwere zur Kugel H herab, wobei sich in s_1 und r_1 Quecksilberverschlüsse bilden, während in r_2 und Q Vakua entstehen. Sobald das Quecksilber unter die Öffnung der Röhre S herabgesunken ist, strömt die Luft aus R nach Q. Sinkt das Quecksilber in V noch etwas weiter, so kippt der Rahmen nach links, das Wasser strömt wieder nach M, das Quecksilber hebt sich bis zur Röhre S u. s. w. Hat sich diese Manipulation mehrmals wiederholt und ist ein gewisser Verdünnungsgrad der Luft erreicht, so klappt man den Hebel T herunter und hebt durch Drehung des Hahnes t_1 die Verbindung der Wasserpumpe mit dem Apparat gänzlich auf. Von diesem Moment an wirkt die Pumpe vollkommen automatisch. Fünfmal steigt das Quecksilber bis r_1 und treibt die Luft aus Q in den Akkumulator r_2; das sechste Mal hebt sich das Quecksilber bis S^1 und treibt die Luft aus dem Akkumulator r_2 in den relativ grofsen Raum P, wo sie verbleibt. Um sie auszutrocknen, kann man durch das Rohr U eine gewisse Menge Schwefelsäure in die Kugel P einsaugen lassen.

Später (1893) hat A. **Raps** noch weitere Verbesserungen angebracht, z. B. die Röhre S verlängert, was gewisse Vorteile mit sich bringt.

Mit der hier beschriebenen Pumpe lassen sich die höchsten Verdünnungsgrade erreichen und zwar $^1/_{800\,000}$ mm Quecksilberdruck.

Wir wollen noch bemerken, dafs **Schulze-Berge** (1893) eine interessante „Rotationsluftpumpe“ beschrieben hat.

Litteratur.

Thurot: Note historique sur l'expérience de Torricelli. J. de phys. (1) **1**, 171 und 267.

Torricelli und Descartes: Briefe an verschiedene Personen.

Pascal: Expériences touchant le vide. Paris 1647 und 1648.

Pascal: Traité de la pesanteur de la masse de l'air 1663.

Wild: Repert. für Meteorol. **3**, Nr. 1, 1874.

Krajewitsch: Rep. de Phys. **23**, 339, 1887; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **9**, 319, 1877; **13**, 335, 1881.

P. Reinbot: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **12**, 243, 1880.

Krajewitsch: (Barometrograph) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **14**, 213, 1882.

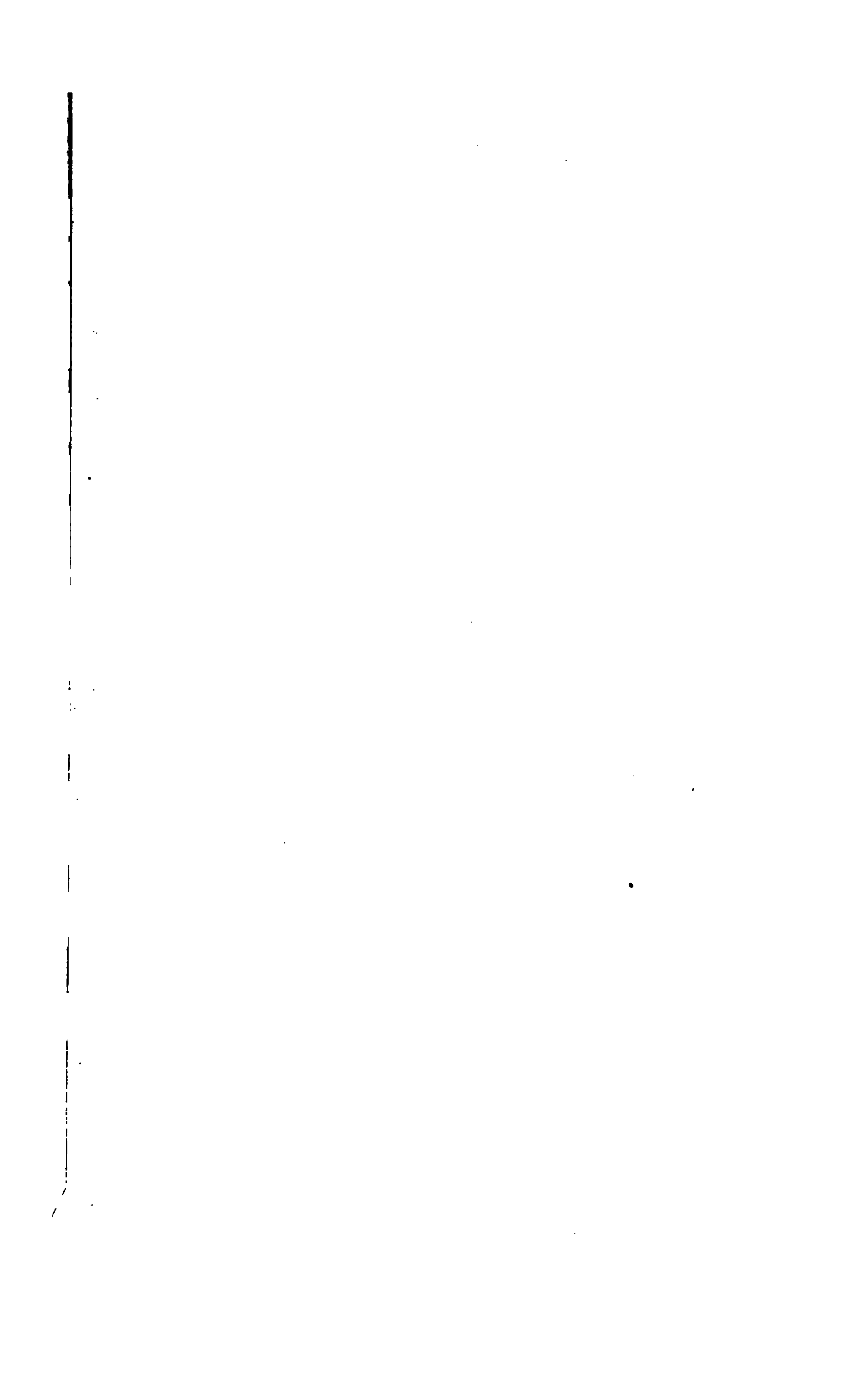
Tillo: Meteorologitscheski Westnik (russ.) 1894, p. 1.

Djakonow: Journ. de russ. phys.-chem. Ges. **14**, 476, 1882.

Zahlreiche Abhandlungen über Barometer findet man ferner in der Ztschr. f. Meteorol., Ztschr. f. Instrumentenk. u. a. Journalen.

Mc. Leod: Phil. Mag. (4) **48**, 110, 1874.

Brush: Phil. Mag. (5) **44**, 415, 1897.



einnahmen. Hierauf wurden sie bei derselben Temperatur t im Volumen V gemischt, in welchem ihre Partialdrucke $P_1 = \frac{p_1 v_1}{V}$, $P_2 = \frac{p_2 v_2}{V}, \ldots$ waren. Das Daltonsche Gesetz lautet nun dahin, daſs der Druck P des Gemisches gleich $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$ ist, d. h.

$$P = \frac{p_1 v_1}{V} + \frac{p_2 v_2}{V} + \frac{p_3 v_3}{V} + \cdots = \sum \frac{pv}{V} \quad . \quad . \quad (1)$$

oder

$$PV = \Sigma pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ist $p_i v_i = R_i T$ die Zustandsgleichung der Masseneinheit eines dieser im Gemisch enthaltenen Gase und m_i die Masse desselben, so gilt für dasselbe die Gleichung

$$p_i v_i = m_i R_i T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,a)$$

Geben wir der Zustandsgleichung des Gemisches die Form

$$PV = mRT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,b)$$

wo $m = \Sigma m_i$ ist, so ergiebt Formel (2) unmittelbar

$$R = \frac{\Sigma m_i R_i}{m} = \frac{\Sigma m_i R_i}{\Sigma m_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,c)$$

Das Daltonsche gilt nur angenähert, wie auch das Boyle-Mariottesche Gesetz. Ändert man beim Mischen das von den Gasen eingenommene Volumen nicht, d. h. ist $V = \Sigma v$ und sind alle p untereinander gleich, so giebt Formel (2) $P = p$, also ändert sich beim Mischen der Druck nicht. Dies wird durch den Versuch von Berthollet bestätigt, der zwei Kugeln untereinander verband, von denen die eine mit Wasserstoff, die andere mit Kohlensäure unter Atmosphärendruck gefüllt war. Das entstandene Gemisch besaſs dieselbe Spannung. Sind alle v untereinander gleich und gleich V, so ist $P = \Sigma p$. Die Formel (1) kann man auch in folgender Form schreiben

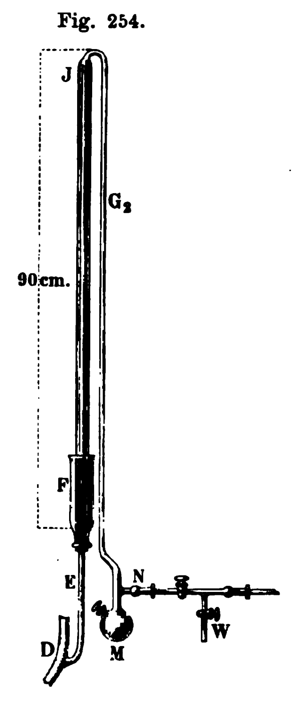
$$V = \sum \frac{p}{P} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welche aussagt, daſs das Volumen des Gasgemisches gleich der Summe derjenigen Volumina ist, welche von den einzelnen Gasen beim Drucke P des Gemisches eingenommen würden.

Die wichtige Frage, wie sich ein Gasgemisch gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetze bei hohen Spannungen verhält, ist noch wenig erforscht worden. Die Untersuchungen von Regnault an einem Gemenge von Luft und CO_2 haben gelehrt, daſs für dasselbe das Daltonsche Gesetz zwischen 1 und 2 Atmosphären Druck Geltung hat. Indes fanden Andrews und Cailletet, daſs für jedes Gas-

das Quecksilber des Gefäfses F taucht; als ihre Fortsetzung dient die dünne Röhre G_1 (G_2 in Fig. 254), welche zu dem Rezipienten R führt. Dieser ist entweder angeschmolzen (Fig. 253), oder durch Schliffstücke und Hähne (Fig. 254) mit G_1 (G_2) verbunden. M ist ein Trockengefäfs, welches Phosphorsäureanhydrid enthält; diese wird entweder durch einen seitlichen Tubulus (Fig. 254) oder durch die Röhre L (Fig. 253) eingeführt, welche nachher zugeschmolzen wird.

Fig. 254.



Wie aus obiger Beschreibung zu ersehen, wirkt der äufsere Luftdruck an drei Stellen: über Q, F und C. Das Quecksilber steht also anfänglich in gleicher Höhe: erstens in B und C, zweitens in SQ und AK, drittens im Gefäfs F und im Raume zwischen der inneren engen Röhre EJ und der sie umgebenden breiteren Röhre.

Das Auspumpen geschieht in folgender Weise. Das Gefäfs Q wird gehoben, das Quecksilber steigt in A, gelangt durch D nach P und unterbricht dadurch die Verbindung zwischen K und dem Rezipienten R. Bei weiterem Heben von Q füllt das Quecksilber die Kugel K und treibt die daselbst vorhandene Luft durch das Quecksilber in BC hindurch ins Freie. Beim Senken von Q strömt die in B nachgebliebene Luft (der schädliche Raum) und, sobald das Quecksilberniveau unterhalb P angelangt ist, auch die Luft aus R nach K. Beim neuen Heben von Q wird wiederum zuerst die Verbindung bei P unterbrochen und dann die Luft aus K durch BC hinausgetrieben. Anfangs erhält man in B nach dem Heben von Q jedesmal eine gewisse Luftmenge, deren Druck gröfser ist als der Druck der Atmosphäre, da sonst ein Hinaustreiben der Luft durch das Quecksilber in BC nicht möglich wäre. Sobald jedoch ein solches Hinaustreiben der Luft beim Heben von Q nicht mehr stattfindet, wird Q langsam soweit gehoben, bis das aus K über O nach B überströmende Quecksilber die ganze in B übrig gebliebene Luftmenge durch die Röhre C hinaustreibt. Beim erneuten Senken von Q bleibt in B eine Quecksilbermenge zurück, welche durch ihre Höhe die erreichte Verdünnung angiebt; in K entsteht eine Torricellische Leere in welche die Luft aus R hinüberströmt, sobald die Verbindung bei P frei wird. Nun strömt beim Senken von Q jedesmal Luft aus R nach K und wird bei genügendem Heben aus K durch BC hinaus-

getrieben. In dem Maße als das Verdünnen der Luft fortschreitet, steigt das Quecksilber aus dem Gefäß F in dem Raume zwischen den beiden Röhren FJ. Bei erreichter hoher Verdünnung erhält man das in Fig. 253 dargestellte Bild: durch den Druck der äußeren Luft über Q, C und F werden die drei Quecksilbersäulen A, B und FJ getragen.

Fig. 255.

In Fig. 255 ist die Quecksilberpumpe von Mendelejeff abgebildet. Vom Reservoir A führt eine Röhre nach unten, deren Ende mittels eines Kautschukschlauches mit dem Quecksilberreservoir B verbunden ist. Eine dünne Röhre führt vom oberen Teile des Gefäßes A abwärts und endet im Quecksilber des Behälters C. Endlich verbindet die Röhre aO das Gefäß A mit dem Raume, welcher zu evakuieren ist. An die absteigende Röhre aO ist ein Manometer angeschlossen; es ist $bd = 780$ mm und $cf = 760$ mm. Ist das Reservoir B genügend hoch gehoben, so füllt das Quecksilber das Gefäß A und verdrängt die Luft durch C, wohin auch ein Teil des Quecksilbers gelangt. Dies Quecksilber fließt dann schließlich nach d und wird von Zeit zu Zeit nach B zurückgegossen. Senkt man B, so tritt die Luft aus dem zu evakuierenden Raume durch Oa nach A über; von hier wird sie darauf nach C geschafft. In a steigt das Quecksilber bis zu einer Höhe, welche dem erreichten Verdünnungsgrade entspricht.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der **zweiten Art** von Quecksilberpumpen, deren Prinzip wir als das **Sprengelsche** bezeichnen wollen. Dasselbe beruht im wesentlichen darauf, daß eine Quecksilbermasse, die durch eine vertikale Röhre in getrennten Tropfen herabfällt, Luftblasen mit sich fortreißt. In Fig. 256 ist eine derartige Sprengelsche Pumpe abgebildet. Hier ist f die Fallröhre, welche in R mit dem Rezipienten verbunden ist. Das in T befindliche Quecksilber strömt durch die Röhre r in die oben verbreiterte Röhre f, durch welche es in einzelnen Tropfen oder Säulen herabfällt, zwischen

denen sich Luftblasen befinden. *E* ist ein Trockengefäfs, welches auf dem Kork *h* ruht; dieser ist auf ein um *a* drehbares Brettchen *b* festgeleimt, *B* ist ein Baromanometer. Die Röhre *f* reicht bis fast an den unteren Boden des Sammelgefäfses *g*, welches mit zwei seitlichen

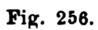
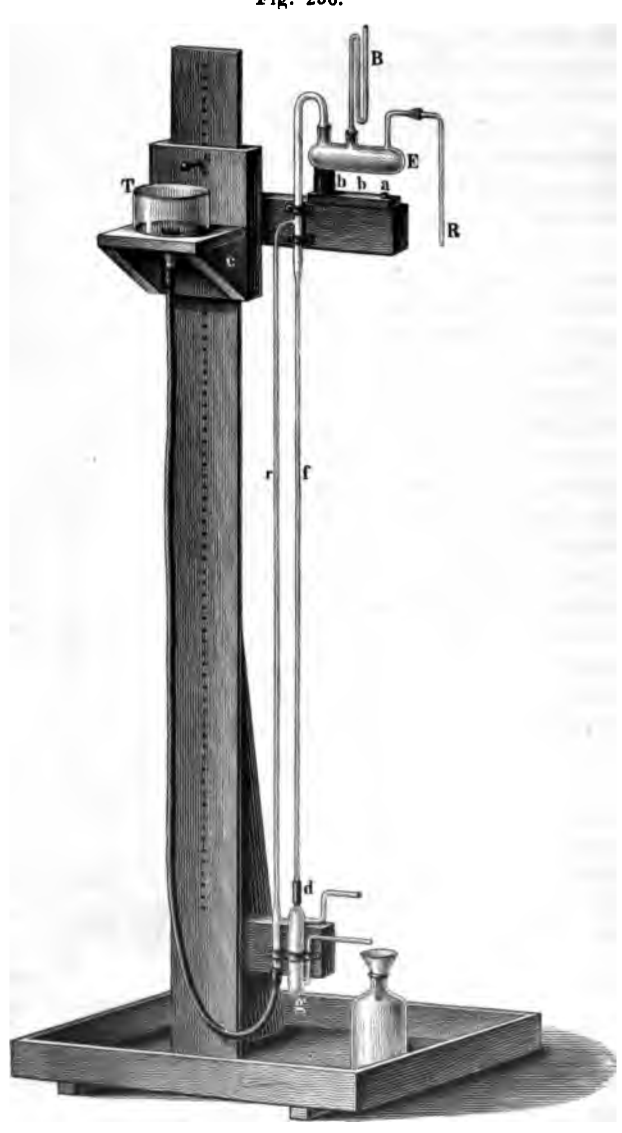


Fig. 256.



Röhren versehen ist, von denen die obere zum Austritt der Luft, die untere zum Abfliefsen des Quecksilbers dient.

Eine veränderte Form der Sprengelschen Quecksilberpumpe ist in Fig. 257 abgebildet. Sie ist folgendermafsen konstruiert: Aus einem Reservoir (oder Trichter) über *R* fliefst wohlgetrocknetes Quecksilber durch die enge Röhre *J*, welche in ihrem unteren Teile in die weite Röhre *AaA* übergeht, herab. Letztere steht durch *T* mit der Aufsenluft in Verbindung. Ferner fliefst das Quecksilber durch die Röhren *BB*, *CC* und *DD*; letztere ist oben verjüngt und mit *H* verbunden, von wo die Röhre *S* nach dem zu evakuierenden Raume führt. Im weiteren Verlaufe fliefst das Quecksilber tropfenweise durch die lange Röhre *FF*. Die Hähne *R* und *R'* dienen dazu, die Geschwindigkeit zu regulieren, mit welcher das Quecksilber ausfliefst. Von jedem einzelnen Quecksilbertropfen wird ein gewisses Luftquantum aus *H* fortgeführt und erhält man auf diese Weise rasch einen ziemlich hohen Verdünnungsgrad, der mittels der mit *H* verbundenen Barometerröhre *GG* gemessen wird. Die Röhren *AaA* und *T*, sowie der Behälter *K* dienen dazu, die Luft aufzufangen, welche etwa durch *R* nach *J* gelangen könnte. Somit enthält das in *CC* und *DD* vorhandene Quecksilber keine Luft mehr.

Fig. 257.



Bunsen hat zuerst das Quecksilber durch Wasser ersetzt und so zu den jetzt sehr verbreiteten Wasserluftpumpen den Grund gelegt. Dieselben werden, je nach dem Zwecke, welchem sie dienen sollen, in den verschiedenartigsten Formen konstruiert. Fig. 258 (a. f. S.) zeigt einen sehr einfachen, von W. Ostwald angegebenen Apparat, der ganz aus Glas besteht. Das Wasser strömt aus einem offenen Behälter oder aus der Wasserleitung durch die Röhre *B*, welche in die Erweiterung *P* eingeschmolzen ist, in die genügend lange, vertikale Röhre *D* und saugt hierbei die Luft aus dem mit *A* verbundenen Rezipienten. Auf weitere Einzelheiten wollen wir hier verzichten. Mit der Wasserpumpe läfst sich ein Druck von etwa 20 mm Quecksilberhöhe erreichen (Druck der Wasserdämpfe bei Zimmertemperatur).

Wir wenden uns zur Beschreibung der gegenwärtig sehr verbrei-

von Gasen in Flüssigkeiten. Bunsen und seine Schüler haben eine grofse Reihe von Messungen der Gröfse α für verschiedene Flüssigkeiten und Gase ausgeführt. Es hat sich dabei erwiesen, dafs α mit Zunahme der Temperatur abnimmt. Die folgenden Werte von α geben die Löslichkeit in Wasser an:

t^0	H	N	O	CO_2	SO_2	NH_3
0^0	0,01930	0,02035	0,04114	1,7967	79,789	1050
10^0	0,01930	0,01607	0,03250	1,1847	56,647	813
20^0	0,01930	0,01403	0,02838	0,9014	39,374	654

Bei 70^0 erhält man für NH_3 den Wert $\alpha = 0$. Die Gröfse α kann überhaupt durch die empirische Formel $\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ wiedergegeben werden. Die Zahlen der ersten Horizontalreihe stellen demnach die Werte von α_0 dar. Für die verschiedenen Gase ist das Verhältnis $\alpha_1 : \alpha_0$ eine Gröfse, die sich in ziemlich engen Grenzen ändert (von irgend einem Werte an bis zum doppelten), während α_0 sich in sehr weiten Grenzen ändert (bis zum 400 fachen des ursprünglichen Werts). Auf diesen Umstand hat E. Wiedemann hingewiesen.

Für die Löslichkeit im Alkohol fand Bunsen folgende Werte:

H . . . . $\alpha = 0{,}069\,25 - 0{,}000\,148\,7\,t + 0{,}000\,001\,t^2$
N . . . . $\alpha = 0{,}126\,338 - 0{,}000\,418\,t + 0{,}000\,006\,t^2$
O . . . . $\alpha = 0{,}2825$
CO_2 . . . . $\alpha = 4{,}329\,55 - 0{,}093\,95\,t + 0{,}001\,24\,t^2$
SO_2 . . . . $\alpha = 328{,}62 - 16{,}95\,t + 0{,}312\,t^2$.

Bohr hat (1900) die Löslichkeit von CO_2 in Alkohol bei Temperaturen t zwischen -65^0 und $+45^0$ untersucht und folgende Werte von α gefunden:

$t =$	-65^0	-25^0	-10^0	0^0	$+10^0$	25^0	45^0
$\alpha =$	35,93	8,61	5,69	4,40	3,55	2,74	2,00

Die Löslichkeit der Gase in Wasser haben ferner untersucht Hüfner, Dittmar, Bohr und Bock, Winkler, Timofejew, Carius, (NH_3, N_2O), Schönfeld (SH_2, SO_2, Cl) u. a.; die Löslichkeit in anderen Flüssigkeiten haben Pagliani und Emo (NH_3 in Alkoholen) u. a. untersucht.

Die Löslichkeit von Chlor in Wasser erreicht bei 8^0 ihr Maximum. In einem Liter Wasser lösen sich 40 ccm Argon bei 12 bis 14^0, d. h. $2^1/_2$ mal mehr als Stickstoff. Die geringste Wasserlöslichkeit hat das Helium; wie Ramsay gezeigt, ist für dasselbe $\alpha = 0{,}0073$ bei $18{,}2^0$.

Setschenow und Mackenzie haben gefunden, dafs die Löslichkeit der Gase in Wasser, welches gelöste Salze enthält, kleiner ist, als in reinem Wasser. Dasselbe bestätigte Kumpf für die Löslichkeit von Chlor in einer Kochsalzlösung und Steiner für Wasserstoff in Lösungen verschiedener Salze. Konowalow hat (1898) die Löslich-

keit von NH_3 in Silbernitratlösungen untersucht, in denen sich, wie er fand, die Verbindung $AgNO_3 . 2HN_3$ bildet.

Bohr hat (1899) die Geschwindigkeit gemessen, mit der sich ein Gas löst und aus einer Flüssigkeit ausscheidet. Sei β die Zahl der Kubikcentimeter Gas (bei 0^0 und 760 mm Druck), welche sich in einer Minute von einem Quadratcentimeter der Flüssigkeitsoberfläche ausscheiden, wenn die Flüssigkeit ursprünglich mit Gas gesättigt war und das ausgeschiedene Gas fortwährend entfernt wird. Sei ferner γ die Zahl der Kubikcentimeter Gas, welche in jeder Minute durch 1 qcm Oberfläche der reinen Flüssigkeit eindringen, während der auf ihr lastende Gasdruck gleich 760 mm ist. In diesem Falle gelten nach Bohr für die Lösungen von CO_2 in Wasser folgende Formeln

$$\gamma = \alpha \beta, \qquad \alpha = \frac{K}{T - n}, \qquad \beta = c(T - n_1)$$

wo T die absolute Temperatur, K, n, c und n_1 Konstanten sind.

Bei hohem Druck treten für die gutlöslichen Gase sehr starke Abweichungen vom Henryschen Gesetze auf. So löst sich Ammoniak bei 20^0 in 1 g Wasser beim Druck $h = 100$ mm in einer Menge von $q = 0{,}158$ g; bei $h = 200$ mm ist $q = 0{,}232$ g, bei $h = 500$ mm ist $q = 0{,}403$ g, bei $h = 1000$ mm ist $q = 0{,}613$ und bei $h = 2000$ mm ist $q = 0{,}992$ g. Für CO_2 nimmt bei konstanter Temperatur der Koeffizient α ab, falls der Druck wächst, wie dies Wroblewski (1882) nachgewiesen hat. Bei 0^0 und $p = 1^{at}$ ist $\alpha = 1{,}797$, bei $p = 5^{at}$ ist $\alpha = 1{,}730$, bei $p = 10^{at}$ ist $\alpha = 1{,}603$, bei $p = 20^{at}$ $\alpha = 1{,}332$ und bei $p = 30^{at}$ $\alpha = 1{,}124$.

Richard hat einen Apparat konstruiert, mit dessen Hülfe man nachweisen konnte, dafs im Wasser der Oceane in beträchtlicher Tiefe, folglich bei hohem Druck, eine ebensolche Gasmenge gelöst ist, wie in dem an der Oberfläche befindlichen.

Das Flüssigkeitsvolumen nimmt, wenn in ihm Gase gelöst sind, stets zu; die Dichte dagegen nimmt bisweilen zu, bisweilen auch ab. Mit dieser Frage haben sich Angström, Blümke, Mackenzie, Nichols, Wheeler, Almen u. a. beschäftigt. Bei der Auflösung von einem Volumen Gas (Atmosphärendruck) in einem Volumen Wasser, findet eine Vergröfserung des Volumens um etwa 0,001 bei der Lösung von O und H statt; ferner um 0,0015 bei N, um 0,0013 bei CO_2 und um 0,0007 bei NH_3.

Bei der Lösung von Gasen in Flüssigkeiten wird sehr oft mehr Wärme frei, als bei ihrer Verflüssigung (latente Verdampfungswärme); hieraus folgt, dafs während der Lösung oft noch chemische Prozesse auftreten, welche diese Erscheinung komplizieren.

Bei der Lösung von Gasgemischen sind die Volumina v_1, v_2 ...

der in Lösung gehenden Bestandteile des Gemisches den Partialdrucken $p_1, p_2, \ldots$ proportional und proportional den Löslichkeitskoeffizienten. Somit ist

$$v_1 : v_2 : v_3 : \ldots . = p_1 \alpha_1 : p_2 \alpha_2 : p_3 \alpha_3 : \ldots \ldots \quad (11)$$

Löst sich z. B. Luft, so haben wir für den Stickstoff $p_1 = 0{,}7904\,h$, für den Sauerstoff $p_2 = 0{,}2096\,h$, wo h den Luftdruck bedeutet; findet die Lösung in Wasser statt, so haben wir z. B. bei 0° für Stickstoff $\alpha_1 = 0{,}020\,35$, für Sauerstoff $\alpha_2 = 0{,}041\,14$. Hieraus folgt für das Verhältnis der Volumina v_1 von Stickstoff und v_2 von Sauerstoff, die sich in Wasser lösen

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{0{,}7904 \times 0{,}020\,35}{0{,}2096 \times 0{,}041\,14} = \frac{0{,}016\,085}{0{,}008\,625} = 1{,}87 \quad . \quad . \quad (12)$$

Der Löslichkeitskoeffizient der Luft in Wasser bei 0° ist gleich $\alpha = 0{,}086\,25 + 0{,}016\,085 = 0{,}024\,708$. Aus Formel (12) folgt, dafs gelöste Luft 35 Proz. O und 65 Proz. N enthält; sie ist also reicher an Sauerstoff als die atmosphärische.

§ 5. Ausscheidung gelöster Gase aus Flüssigkeiten. Die gelösten Gase werden von den Flüssigkeiten unter folgenden Umständen ausgeschieden.

1. Bei der Druckverminderung des ungelösten Gases, welches oberhalb der Flüssigkeit verblieben ist oder bei Fortführung desselben durch einen kontinuierlichen Strom eines anderen Gases, welches das Gas in dem Mafse sofort entfernt, als es sich ausscheidet. Dasselbe Resultat wird erhalten, wenn man die Lösung offen an der Luft stehen läfst; ist dann das gelöste Gas nicht etwa in der Luft selbst enthalten, so verflüchtigt sich die Lösung.

2. Bei Temperaturerhöhung. Beim Sieden des Wassers scheiden sich die in ihm enthaltenen Gase aus.

3. Beim Erstarren der Lösung. Beim Gefrieren des Wassers scheiden sich die in ihm gelösten Gase aus. Geschmolzenes Kupfer und Silber lösen Sauerstoff auf, der sich dann beim schnellen Erkalten so energisch ausscheidet, dafs kleine Tropfen des flüssigen Metalls zugleich mit dem Gase herausgeschleudert werden.

4. Wenn man in die gesättigte Gaslösung feste Körper mit der an ihnen haftenden Luft einführt (oder aber ein anderes Gas, vergl. § 6). Diese eingeführte Luft bildet gewissermafsen die Zentren, um welche herum sich das gelöste Gas ansammelt, dafs sich in Form von Bläschen ausscheidet. Diese Erscheinung tritt besonders deutlich auf, wenn man eine Lösung wählt, die unter hohem Drucke gesättigt ist. Wenn man dann zunächst den Druck vermindert, so scheidet sich weniger Gas aus, als es dem neuen Druck entspricht und die Lösung wird übersättigt. Dies ist der Grund, weshalb

moussierende Getränke (Selterwasser, Bier), nachdem sie aufgehört haben Kohlensäure auszuscheiden, wieder von neuem zu perlen und zu schäumen beginnen, falls man Streuzucker, Sand, Brotkrumen u. s. w. in sie hineinschüttet.

§ 6. Erscheinungen, welche bei Berührung von Gasen mit festen Körpern auftreten. Kommt ein fester Körper in Berührung mit einem Gase, so können zweierlei Erscheinungen auftreten: eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers (Adsorption), die besonders grofs für poröse Körper ist (Absorption), da diese ja eine grofse Oberfläche besitzen, und eine unmittelbare Verschluckung des Gases durch die Gesamtmasse des festen Körpers (Okklusion), welche ihrem Charakter nach an Lösung erinnert.

Die Verdichtung von Gasen im Innern von festen Körpern hat zuerst Saussure untersucht (1814). Er fand, dafs geglühte Buchenholzkohle bei 12° folgende Volumina der Gase verschluckt: NH_3 — 90, HCl — 85, SO_2 — 65, CO_2 — 35, O — 9,2, N — 7,5, H — 1,75; Meerschaum bei 15°: NH_3 — 15, CO_2 — 5,26, O — 1,45, N — 1,60, H — 0,44; Gips bei 15° verschluckt ungefähr 0,5 Volumina H, N und O (0,58).

Das Henrysche Gesetz gilt hier nur in beschränktem Mafse, der Absorptionskoeffizient aber nimmt bei Druckzunahme nicht ab, wie es bei den Flüssigkeiten der Fall war. Für Ammoniak und Kokosnufskohle wächst er von 170,7 beim Druck von 760 mm bis 209,8 bei 2609 mm. Für Spindelbaumkohle (Evonymus) und CO_2 wächst er sogar von 0,7 bei einem Druck von 1,13 mm bis 77,1 bei 763 mm, wie Chappuis gefunden hat. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Absorptionsfähigkeit poröser Körper schnell ab.

Zur Untersuchung der Absorptionsfähigkeit poröser Körper bringt man sie an Stelle der Flüssigkeit in das Absorptiometer (S. 463). Geglühter Platinschwamm verdichtet an seiner Oberfläche bis zu 250 Volumina Sauerstoff; richtet man einen Wasserstoffstrahl gegen Platinschwamm, so entzündet sich der Wasserstoff, da der Platinschwamm aus der Luft entnommenen Sauerstoff kondensiert enthält; hierauf beruht die Döbereinersche Zündmaschine.

Die starke Absorption der Gase in porösen Körpern stellt aller Wahrscheinlichkeit nach nur einen besonderen Fall der Verdichtung von Gasen an der Oberfläche fester Körper überhaupt dar. Man findet, dafs jeder feste, in Berührung mit einem Gase befindliche Körper sich mit einer sehr dünnen, dem Anscheine nach stark verdichteten Schicht dieses Gases überzieht. Nach der Ansicht von Quincke nimmt die Dichte dieser Schicht in dem Mafse zu, als sie der Oberfläche des festen Körpers näher liegt und erreicht an der Oberfläche selbst die Dichte des festen Körpers. Jamin und Bertrand

evakuierten ein mit zerstofsenem Glase gefülltes Gefäfs; nach einiger Zeit erhöhte sich der im Gefäfse herrschende Druck, da ein Teil der Luft, welche an der Oberfläche des Glases haftete, allmählich frei wurde. Chappuis fand (1878), dafs ein Quadratmeter Oberfläche des Glases 0,27 cbcm H, 0,35 cbcm Luft, 0,63 cbcm SO_2 und 0,25 cbcm NH_3 zurückhält. An der Luft überziehen sich die Körper mit einer dünnen Schicht von Wasserdampf (Vaporisation); hieraus erklärt sich auch die bemerkenswerte, bisweilen starke Adsorption von CO_2 durch die Oberflächen fester Körper. P. Mülfarth untersuchte (1900) die Adsorption verschiedener Gase durch Glaspulver.

Die Moserschen Bilder erklären sich durch das Vorhandensein einer kondensierten Luftschicht an der Oberfläche der Körper. Bringt man auf eine gereinigte Glasfläche eine Münze oder Medaille (man kann auch umgekehrt die letztere reinigen und die Glasfläche ungereinigt lassen), so tritt eine deutliche Abbildung derselben hervor, wenn man das Glas nachher behaucht. Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dafs an den Punkten, wo innige Berührung erfolgt, ein Teil des kondensierten Gases auf den gereinigten Körper übergeht, wodurch sich die Dichte der übriggebliebenen oder neugebildeten Gasschicht auf der Glasfläche entsprechend den Erhabenheiten und Vertiefungen der Münze ändert. Dies aber wirkt auf die Gröfse und Form der kleinen Wassertröpfchen ein, welche am behauchten Glase haften bleiben, so dafs die Umrisse der Prägung sichtbar bleiben. Wenn man mit einem Holzstäbchen auf Glas oder Metall schreibt und dieses sodann behaucht, so treten die Schriftzüge ebenfalls deutlich hervor.

Einen interessanten Fall der Gasabsorption durch einen festen Körper stellt die von Divers (1873) entdeckte Absorption des Ammoniaks durch salpetersaures Ammoniak dar. Man erhält hierbei eine flüssige Lösung des Salzes im Ammoniak. Untersucht haben diese Erscheinung Raoult, Troost und Kurilow.

Das Verschlucken von Gasen durch massive Metalle (Okklusion) hängt von der Beschaffenheit des entsprechenden Metalles und Gases, sowie von der Temperatur ab. Besonders interessant ist die Okklusion von Wasserstoff durch Palladium. Ein Palladiumdraht okkludiert ein Wasserstoffvolumen, welches unter gewöhnlichem Atmosphärendruck das Volumen des Drahtes selbst bis zu 1000 mal übertreffen würde. Die Okklusionsfähigkeit des Palladiums für Wasserstoff nimmt mit steigender Temperatur bis zu 100° zu, um sich darauf zu vermindern. Während dieses Vorganges nimmt die Länge des Palladiumdrahtes bis um 1,6 Proz. zu, sein Volumen vergröfsert sich um 10 Proz. Die Rechnung zeigt, dafs der okkludierte Wasserstoff sich so stark kondensieren mufs, dafs seine Dichte gleich 1,7 wird. Die Spannung dieses okkludierten Wasserstoffs mufs eine ganz ungeheure sein und wahrscheinlich nach zehntausenden Atmosphärendrucken gemessen werden.

N. Hesehus hat die Okklusion von Wasserstoff durch Palladium und seine Legierungen mit Pt, Au und Ag (75 Proz. Pd und 25 Proz. der anderen Metalle) untersucht. Unter anderem mafs er die Längenzunahme eines Drahtes (von 500 mm Länge und 0,4 mm Dicke) durch Okklusion von Wasserstoff. Wenn der Draht als Kathode diente und Wasserstoff okkludierte, so erhielt man folgende Längenzunahmen in den ersten acht Minuten:

Pd + Ag	Pd + Pt	Pd	Pd + Au
7,2 mm	6,4 mm	5 mm	0,9 mm

Hesehus benutzte bei diesen Versuchen einen besonderen Apparat zur Messung geringer Längenzunahmen des Drahtes. Ferner untersuchte er das Freiwerden von Wasserstoff aus dem Palladium und seiner Legierungen unter verschiedenen Bedingungen und endlich den Einflufs des okkludierten Wasserstoffs auf die Elasticität der Drähte. Nickel okkludiert ebenfalls H, jedoch weit geringer als Palladium; eine ähnliche Erscheinung zeigten Kalium und Natrium. Wird Platin im Sauerstoff erhitzt, so okkludiert es geringe Mengen desselben.

Mior hat gefunden, dafs ein Volumen Pt bis zu 9,1 Volumen Sauerstoff okkludieren kann, und dafs die Geschwindigkeit, mit der die Okklusion erfolgt, sich beim Erwärmen des Pt bis zu 100° steigert. Gufseisen enthält ein wenig Wasserstoff; Eisen bis zu 12 Volumina CO; Aluminium H und CO_2. Besonders interessant ist, dafs Meteoreisen bis zu drei Volumina Gase enthält, von denen fünf Sechstel des Volumens auf den Wasserstoff kommen. Aufserdem enthält es noch Stickstoff und Kohlenoxyd. Das Vorhandensein von Gasen in den Metallen kann, wie Dumas (1878) gezeigt hat, zu Fehlern bei Bestimmung ihres specifischen Gewichtes führen.

Litteratur.

I. Daltonsches Gesetz.

Dalton: Manch. Phil. Soc. 5, 535, 1802; Gilb. Ann. **12**, 385, 1802; **15**, 21, 1803.
Henry: Nicholsons J. 8, 297, 1804; Gilb. Ann. **21**, 393, 1805.
Gay-Lussac: Ann. ch. et phys. **95**, 314, 1815; Biot: Traité de physique I, p. 298.
Magnus: Pogg. Ann. **38**, 488, 1836.
Regnault: Ann. ch. et phys. (3) **15**, 129, 1845; Mem. de l'Acad. de sc. **26**, 679.
Andrews: Phil. Mag. (5) **1**, 84, 1876.
Cailletet: J. de phys. (1) **9**, 192, 1880.
Springmühl: Pogg. Ann. **148**, 540, 1873.
Herwig: Pogg. Ann. **137**, 592, 1869.
Wüllner u. Grotrian: Wied. Ann. **11**, 545, 1880.
Krönig: Pogg. Ann. **123**, 299, 1864.

Braun: Wied. Ann. **34**, 943, 1888.
B. Galitzin: Das Daltonsche Gesetz. Diss. Strafsburg 1890.
B. Galitzin: Wied. Ann. **41**, 588, 1890.

II. Gase und Flüssigkeiten.

Henry: Phil. Trans. **1**, 29, 1803; Gilb. Ann. **20**, 1805.
Bunsen: Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857; Liebigs Ann. **93**, 1, 1855; Phil. Mag. (4) **9**, 116, 181, 1855; Ann. ch. et phys. (3) **43**, 496, 1855.
Hüfner: Wied. Ann. **1**, 629, 1877.
Bohr u. Bock: Overs. K. Dansk. Vid. Selsk. Forhdl. **22**, 84, 1891; Wied. Ann. **44**, 318, 1891.
Bohr: Wied. Ann. **62**, 644, 1897; **68**, 500, 1899; Drud. Ann. **1**, 244, 1900.
Winkler: Chem. Ber **22**, 1772, 1889; **24**, 89, 3602, 1891; Zeitschr. f. phys. Chem. **9**, 171, 1892.
Timofejew: Zeitschr. f. phys. Chem. **6**, 141, 1890.
Carius: Liebigs Ann. **94**, 129, 1855; **99**, 129, 1856; Ann. ch. et phys. (3) **47**, 418, 1856.
Schönfeld: Lieb. Ann. **95**, 1, 1885.
Pagliani e Emo: Atti R. Acc. d. Torino **18**, 67, 1882 (Beibl. **8**, 18, 1884).
Ramsay: Ann. ch. et phys. (7) **13**, 462, 1898.
Setschenow: Mém. de l'Acad. de St. Petersb. (7) **22**, Nr. 6; **34**, Nr. 3; **35**, Nr. 7; Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 117, 1889; Ann. ch. et phys. (6) **25**, 226, 1892; Ber. chem. Gas. 1877, S. 972; Phys. Sekt. d. Ges von Freunden d. Nat. zu Moskau (russ.) **5**, Heft 2, S. 6, 1893; Ann. ch. et phys. (6) **25**, 226, 1892.
Kumpf: Absorption von Chlor durch NaCl-Lösung. Dissert. Graz 1881.
Kanowalow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **30**, Chem. Abt., 367, 1898.
Wroblewski: Wied. Ann. **8**, 29, 1880; **17**, 103, 1882; **18**, 290, 1893; J. d. phys. (2) **1**, 452, 1882.
Richard: Compt. rend. **123**, 1088, 1896.
E. Wiedemann: Wied. Ann. **17**, 349, 1882.
Khanikoff et Longuinine: Ann. ch. et phys. (4) **11**, 412, 1867.
Mackenzie und Nichols: Wied. Ann. **3**, 134, 1878.
Nichols and Wheeler: Phil. Mag. (5) **11**, 113, 1881.
Almen: Öfvers. K. Vetens. Akad. Foerh. 1898, p. 735.
Angström: Wied. Ann. **15**, 297, 1882; **17**, 297, 1882.
Blümke: Wied. Ann. **23**, 404, 1884; **30**, 243, 1887.
Steiner: Wied. Ann. **52**, 275, 1894.
Konowalow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **26**, Chem. Abt. 48, 1894.

III. Gase und feste Körper.

(Eine ausführliche Litteraturangabe über Adsorption der Gase findet sich in der unten angeführten Abhandlung von P. Mühlfarth.)

Saussure: Gilb. Ann. **47**, 1814.
Chappuis: Wied. Ann. **8**, 1 u. 671, 1879; **12**, 160, 1881; Arch. Sc. phys. (3) **3**, 439, 1878.
Jamin et Bertrand: Ann. ch. et phys. (3) **34**, 344, 1852.
Moser: Pogg. Ann. **56** u. **57**, 1842.
Dumas: Compt. rend. **86**, 65, 1878.
Quincke: Pogg. Ann. **108**, 326, 1859.
Joulin: Compt. rend. **90**, 741, 1880.

Pfeiffer: Verdichtung von Gasen durch feste Körper. Diss. Erlangen 1882.
Kayser: Wied. Ann. **12**, 528; **14**, 450, 1881; **21**, 495, 1884; **23**, 416, 1884.
Bunsen: Wied. Ann. **20**, 545, 1883; **22**, 145, 1884; **24**, 321, 1885.
O. Schumann: Wied. Ann. **27**, 91, 1886.
Troost et Hautefeuille: Compt. rend. **78**, 686, 1874 (H und Pd).
P. Mühlfarth: Drud. Ann. **3**, 328, 1900.
Divers: Compt. rend. **77**, 788, 1873.
Raoult: Compt. rend. **76**, 1261, 1887; **94**, 1117, 1882.
Troost: Compt. rend. **94**, 789, 1882.
Kurilow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **25**, Chem. Abt., 170, 1893.
N. Hesechus: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **11**, 78, 1879.
Mond, Ramsay und Shields: (Okklusion von O_2 und H_2 durch Pt und Pd) Phys. Chem. **19**, 25, 1896; **25**, 657, 1898; **26**, 109, 1898; Proc. R. Soc. **62**, 290, 1898.
Mior: (Okklusion von H_2 durch Pt) N. Cim. (4) **9**, 67, 1899; Beibl. 1899, S. 620.

Fünftes Kapitel.

Grundlagen der kinetischen Gastheorie.

§ 1. **Bewegungsart der Gasmoleküle.** Als Begründer der kinetischen Gastheorie hat man Krönig (1856) und Clausius (1857) anzusehen, wennschon die Ideen und Vorstellungen, welche derselben zu Grunde liegen, bereits früher von mehreren Forschern ausgesprochen und entwickelt worden sind.

In ihrer einfachsten Form und ohne die Ergänzungen und Verbesserungen, welche allmählich in dieselbe eingeführt worden sind, nimmt die kinetische Gastheorie an, dafs die Gasmoleküle, ohne aufeinander einzuwirken (aufser bei Zusammenstöfsen) sich vollkommen frei bewegen. Diese Bewegung erfolgt geradlinig und mit einer Geschwindigkeit, die, wie wir sehen werden, nur von der Art des Gases und von der Temperatur abhängt. Die Bewegungsrichtung ändert sich plötzlich, wenn ein Gasmolekül auf seinem Wege etwa die Wandung des Gefäfses trifft, in welchem es sich befindet oder irgend ein anderes Hindernis, oder aber, wenn zwei Moleküle aufeinander treffen.

Aufser der in jedem gegebenen Augenblick geradlinigen Bewegung des Moleküls kommen jedoch im Gase noch andere Bewegungen vor. Erstens kann sich ein Molekül als Ganzes um eine beliebige Achse drehen; derartige Bewegungen müssen auftreten, wenn die Moleküle beim Zusammenstofse einander nicht zentral treffen. Zweitens sind sogenannte intramolekulare Bewegungen möglich, d. h.

Bewegungen (Schwingungen, Rotationen) der Atome innerhalb ihres Moleküls um gewisse mittlere Lagen. Die von den Molekülen eingenommenen Volumina zieht man nicht in Betracht, sondern betrachtet erstere als Punkte, zwischen denen jedoch Zusammenstöfse möglich sind. Das heifst nun mit anderen Worten, man vernachlässigt die linearen Dimensionen der Gasmoleküle im Vergleich zu ihrem mittleren Abstande voneinander. Ferner nimmt man an, die Gasmoleküle seien keiner äufseren Kraft unterworfen — man vernachlässigt mithin die Wirkung, welche die Schwerkraft auf sie ausübt.

Die im Vorhergehenden auseinandergesetzte Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle, nämlich die Geradlinigkeit ihrer Bewegung, macht die beiden Grundeigenschaften der Gase unmittelbar verständlich. Es erklärt sich daraus ihr Bestreben, das ganze ihnen zur Verfügung stehende Volumen gleichmäfsig zu erfüllen und ihre Spannung, d. h. der Druck, welchen sie auf die jenes Volumen begrenzenden Körper ausüben. Die erstere dieser Eigenschaften hat man früher durch die gegenseitige Abstofsung der Gasmoleküle erklärt. Wenn sich neben dem Raume A, welcher von Gas erfüllt ist, ein leerer Raum B befindet, so ist es klar, dafs alle Moleküle, welche sich in der Richtung nach diesem Raume B hin bewegen, da sie keinen Widerstand finden, in denselben eindringen bis eine gleichmäfsige Verteilung der Moleküle erreicht ist, wobei in der Zeiteinheit ebensoviel Teilchen von A nach B übergehen als von B nach A. Die gleichmäfsige Verteilung ist somit die Bedingung für das Gleichgewicht, das jedoch hier nicht der Ruhe entspricht, sondern im Gegenteil dem kontinuirlichen Austausch der Moleküle ohne Verminderung ihrer Anzahl in jedem nicht allzu kleinen Teile des Raumes. In derartigen Fällen, die häufig im Bereiche verschiedener physikalischer Erscheinungen vorkommen, pflegt man vom stationären Gleichgewicht der Bewegung oder von dynamischen Gleichgewicht zu reden.

Die Spannung der Gase, welche sich als Druck auf die ihnen benachbarten Körper kundtut, erklärt sich durch die Stöfse, welche jene Körper seitens der auf sie auffliegenden und von ihnen abprallenden Moleküle — durch das „molekulare Bombardement“ dem sie ausgesetzt sind, erfahren.

Um gleich zu Anfang eine richtigere Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle zu erhalten, wollen wir hier einige Daten anführen, auf die wir später wieder zurückkommen werden. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist sehr grofs; sie beträgt beispielsweise für die Luftmoleküle fast 500 m pro Sekunde und nimmt für alle Gase mit der Temperatur zu. Die Zusammenstöfse der Gasmoleküle erfolgen unvorstellbar oft; ein Luftmolekül vermag z. B. bei gewöhnlichem Druck im Mittel nicht mehr als 0,0001 mm in der Zeit von einem Zusammenstofse bis zum nächstfolgenden zurückzulegen.

Zieht man die Geschwindigkeit der Gasmoleküle in Betracht, so sieht man demnach, dafs jedes Molekül in jeder Sekunde bis zu 5000 Millionen Zusammenstöfse erleidet und im allgemeinen ebenso oft seine Bewegungsrichtung ändert. Bei Kompression eines Gases mufs die Zahl dieser Zusammenstöfse proportional der Dichte zunehmen; ist die Luft durch einen Druck von 100 Atmosphären zusammengedrückt, so erhält man bereits 500000 Mill. Zusammenstöfse pro Sekunde. Alles Gesagte zusammengenommen liefert uns ein Bild von dem unvorstellbar chaotischen Zustande, in welchem sich die gewaltig grofse Zahl von Gasmolekülen befindet, die sich mit grofser Geschwindigkeit nach allen Richtungen bewegen und kontinuirlich aufeinander prallen.

§ 2. **Das Boyle-Mariottesche Gesetz.** Die kinetische Gastheorie erklärt nicht nur in einfacher Weise weshalb der Druck p eines Gases indirekt proportional dem Volumen v ist, sondern liefert auch einen sehr interessanten Ausdruck für das Produkt pv, welches von der Temperatur abhängt.

Eine einfache Erklärung für das Gesetz selbst ist z. B. die folgende. Verkleinert man das Volumen v eines Gases, in welchem sich n Moleküle befanden, k mal, so bleiben in dem neuen Volumen $v:k$ alle früheren n Moleküle enthalten. Die Spannung wird dabei die gleiche sein, als ob sich im Volumen v die Anzahl kn Moleküle befände, denn teilt man dieses Volumen durch Scheidewände in k gleiche Teile, so ändert man die Spannung nicht, erhält aber dabei Volumina, welche gleich $v:k$ sind und von denen ein jedes n Moleküle enthält. Hat sich aber im Volumen v die Zahl der Moleküle k mal vergröfsert, so werden dieselben auf die Oberflächeneinheit der Wandungen k mal häufiger auftreffen, das „Bombardement“, mithin auch der Druck des Gases wird sich also k mal verstärken.

Eine andere Form der Erklärung ist die folgende: Vermindert man das Volumen q^3 mal, so vermindern sich die linearen Dimensionen, folglich auch der mittlere gegenseitige Abstand der Moleküle voneinander q mal; deshalb werden die längs der Einheit der Wandoberfläche in einer dünnen anliegenden Schicht befindlichen Moleküle beim Zurückprallen einen q mal kürzeren Weg zurücklegen bis zu ihrem nächsten wahrscheinlichen Zusammenstofse mit anderen Molekülen, von denen sie zur Wand zurückgeworfen werden. Jedes Molekül wird somit q mal häufiger auf die Wand auffliegen als vorher. Die Zahl der Moleküle innerhalb der Schicht, deren Dicke man jetzt q mal kleiner anzunehmen hat, nimmt q^2 mal zu, mithin wird die Gesamtzahl der Stöfse, die auf die Oberflächeneinheit der Wand erfolgt, sich q^3 mal vergröfsern, d. h. so viel mal, als sich das Volumen verkleinert hat.

Gehen wir nun zur Herleitung der Formel über, welche man als

Bewegungen (Schwingungen, Rotationen) der Atome innerhalb ihres Moleküls um gewisse mittlere Lagen. Die von den Molekülen eingenommenen Volumina zieht man nicht in Betracht, sondern betrachtet erstere als Punkte, zwischen denen jedoch Zusammenstöfse möglich sind. Das heifst nun mit anderen Worten, man vernachlässigt die linearen Dimensionen der Gasmoleküle im Vergleich zu ihrem mittleren Abstande voneinander. Ferner nimmt man an, die Gasmoleküle seien keiner äufseren Kraft unterworfen — man vernachlässigt mithin die Wirkung, welche die Schwerkraft auf sie ausübt.

Die im Vorhergehenden auseinandergesetzte Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle, nämlich die Geradlinigkeit ihrer Bewegung, macht die beiden Grundeigenschaften der Gase unmittelbar verständlich. Es erklärt sich daraus ihr Bestreben, das ganze ihnen zur Verfügung stehende Volumen gleichmäfsig zu erfüllen und ihre Spannung, d. h. der Druck, welchen sie auf die jenes Volumen begrenzenden Körper ausüben. Die erstere dieser Eigenschaften hat man früher durch die gegenseitige Abstofsung der Gasmoleküle erklärt. Wenn sich neben dem Raume A, welcher von Gas erfüllt ist, ein leerer Raum B befindet, so ist es klar, dafs alle Moleküle, welche sich in der Richtung nach diesem Raume B hin bewegen, da sie keinen Widerstand finden, in denselben eindringen bis eine gleichmäfsige Verteilung der Moleküle erreicht ist, wobei in der Zeiteinheit ebensoviel Teilchen von A nach B übergehen als von B nach A. Die gleichmäfsige Verteilung ist somit die Bedingung für das Gleichgewicht, das jedoch hier nicht der Ruhe entspricht, sondern im Gegenteil dem kontinuirlichen Austausch der Moleküle ohne Verminderung ihrer Anzahl in jedem nicht allzu kleinen Teile des Raumes. In derartigen Fällen, die häufig im Bereiche verschiedener physikalischer Erscheinungen vorkommen, pflegt man vom stationären Gleichgewicht der Bewegung oder von dynamischen Gleichgewicht zu reden.

Die Spannung der Gase, welche sich als Druck auf die ihnen benachbarten Körper kundtut, erklärt sich durch die Stöfse, welche jene Körper seitens der auf sie auffliegenden und von ihnen abprallenden Moleküle — durch das „molekulare Bombardement“ dem sie ausgesetzt sind, erfahren.

Um gleich zu Anfang eine richtigere Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle zu erhalten, wollen wir hier einige Daten anführen, auf die wir später wieder zurückkommen werden. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist sehr grofs; sie beträgt beispielsweise für die Luftmoleküle fast 500 m pro Sekunde und nimmt für alle Gase mit der Temperatur zu. Die Zusammenstöfse der Gasmoleküle erfolgen unvorstellbar oft; ein Luftmolekül vermag z. B. bei gewöhnlichem Druck im Mittel nicht mehr als 0,0001 mm in der Zeit von einem Zusammenstofse bis zum nächstfolgenden zurückzulegen.

Zieht man die Geschwindigkeit der Gasmoleküle in Betracht, so sieht man demnach, dafs jedes Molekül in jeder Sekunde bis zu 5000 Millionen Zusammenstöfse erleidet und im allgemeinen ebenso oft seine Bewegungsrichtung ändert. Bei Kompression eines Gases mufs die Zahl dieser Zusammenstöfse proportional der Dichte zunehmen; ist die Luft durch einen Druck von 100 Atmosphären zusammengedrückt, so erhält man bereits 500000 Mill. Zusammenstöfse pro Sekunde. Alles Gesagte zusammengenommen liefert uns ein Bild von dem unvorstellbar chaotischen Zustande, in welchem sich die gewaltig grofse Zahl von Gasmolekülen befindet, die sich mit grofser Geschwindigkeit nach allen Richtungen bewegen und kontinuirlich aufeinander prallen.

§ 2. **Das Boyle-Mariottesche Gesetz.** Die kinetische Gastheorie erklärt nicht nur in einfacher Weise weshalb der Druck p eines Gases indirekt proportional dem Volumen v ist, sondern liefert auch einen sehr interessanten Ausdruck für das Produkt pv, welches von der Temperatur abhängt.

Eine einfache Erklärung für das Gesetz selbst ist z. B. die folgende. Verkleinert man das Volumen v eines Gases, in welchem sich n Moleküle befanden, k mal, so bleiben in dem neuen Volumen $v:k$ alle früheren n Moleküle enthalten. Die Spannung wird dabei die gleiche sein, als ob sich im Volumen v die Anzahl kn Moleküle befände, denn teilt man dieses Volumen durch Scheidewände in k gleiche Teile, so ändert man die Spannung nicht, erhält aber dabei Volumina, welche gleich $v:k$ sind und von denen ein jedes n Moleküle enthält. Hat sich aber im Volumen v die Zahl der Moleküle k mal vergröfsert, so werden dieselben auf die Oberflächeneinheit der Wandungen k mal häufiger auftreffen, das „Bombardement", mithin auch der Druck des Gases wird sich also k mal verstärken.

Eine andere Form der Erklärung ist die folgende: Vermindert man das Volumen q^3 mal, so vermindern sich die linearen Dimensionen, folglich auch der mittlere gegenseitige Abstand der Moleküle voneinander q mal; deshalb werden die längs der Einheit der Wandoberfläche in einer dünnen anliegenden Schicht befindlichen Moleküle beim Zurückprallen einen q mal kürzeren Weg zurücklegen bis zu ihrem nächsten wahrscheinlichen Zusammenstofse mit anderen Molekülen, von denen sie zur Wand zurückgeworfen werden. Jedes Molekül wird somit q mal häufiger auf die Wand auffliegen als vorher. Die Zahl der Moleküle innerhalb der Schicht, deren Dicke man jetzt q mal kleiner anzunehmen hat, nimmt q^2 mal zu, mithin wird die Gesamtzahl der Stöfse, die auf die Oberflächeneinheit der Wand erfolgt, sich q^3 mal vergröfsern, d. h. so viel mal, als sich das Volumen verkleinert hat.

Gehen wir nun zur [illegible] über, welche man als

die Fundamentalformel der kinetischen Gastheorie bezeichnen kann. Sie hat folgende Gestalt:

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Hier ist v das vom Gase eingenommene Volumen, p seine Spannung, N die Zahl der im Volumen v enthaltenen Moleküle, m die Masse eines Moleküls und u seine Geschwindigkeit.

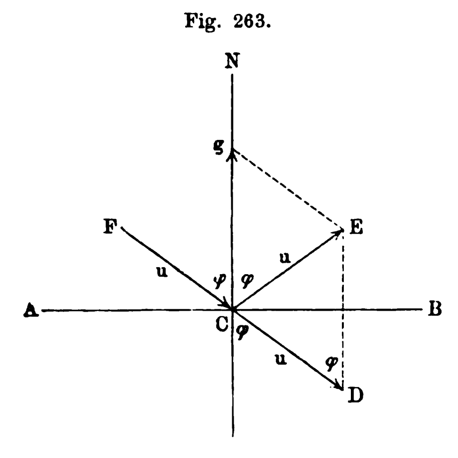
Um obige Formel herzuleiten, müssen wir uns an folgenden auf S. 85 ausgesprochenen Lehrsatz erinnern: Der Impuls K einer Aufsenkraft ist gleich dem geometrischen Zuwachs L der Bewegungsmenge.

Nehmen wir an, das Molekül C (Fig. 263), dessen Masse m ist, bewegt sich in der Richtung von FC und stöfst an die Wandung AB mit der Geschwindigkeit $u = CD$, welche den Winkel φ mit der Normalen CN einschliefst Der geometrische Zuwachs L der Bewegungsmenge ist dann gleich $m \times DE$. Es ist nun aber $DE = 2 u \cos \varphi$, folglich

$$L = 2 m u \cos \varphi \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Den Kraftimpuls kann man gleich $K = f\tau$ setzen, wo f die mittlere Gröfse der Kraft ist, mit welcher die Wand auf das Molekül drückt, wobei sich die Gröfse und Richtung seiner Geschwindigkeit und die Dauer τ der Berührung zwischen Molekül und Wand ändert. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wirkt auf die Wand während der Zeit τ die Kraft f. Obengenanntes Gesetz ergiebt somit

Fig. 263.



$$K = f\tau = 2 m u \cos \varphi \quad . \quad (3)$$

Wenn man entsprechende Gleichungen für alle Moleküle hinschreibt, welche den gegebenen Teil s der Wandoberfläche im Laufe irgend einer Zeit t treffen, und alle diese Gleichungen summiert, so erhält man auf der linken Seite $\Sigma f\tau$. Die Gröfse $\Sigma \tau$ ist nicht gleich t, da die Stöfse nicht unmittelbar aufeinander folgen: zwischen ihnen können kleine Zeitintervalle liegen und mehrere Stöfse können wiederum gleichzeitig erfolgen. Die Summe der Kraftimpulse während der Zeit t jedoch, d. h. $\Sigma f\tau$, kann in der Form Ft dargestellt werden, wo wiederum nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung F die mittlere Gröfse der Kraft darstellt, welche in der Zeit t ununterbrochen auf den Teil s der

Wandoberfläche wirkt. Somit hat man

$$Ft = \sum_{t,s} 2\,mu\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die Buchstaben t und s, welche unter dem Summenzeichen stehen, bedeuten, dafs man die Summe der Gröfsen $2\,mu\cos\varphi$ für alle Teilchen zu bilden hat, welche in der Zeit t auf die Oberfläche s auftreffen.

Setzt man $t = 1$ und $s = 1$, so giebt die linke Seite die Spannung p des Gases, d. h. die mittlere Kraft, welche ununterbrochen auf die Oberflächeneinheit der Wand einwirkt. Da die Zahl der Stöfse aufserordentlich grofs ist, kann man diese Kraft p für eine konstante Gröfse ansehen.

Man hat also

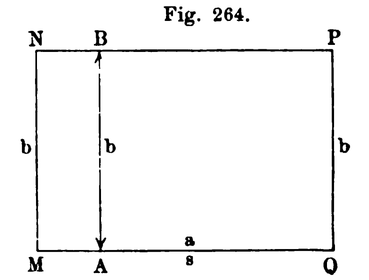
$$p = \sum_{\substack{t=1\\ s=1}} 2\,mu\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Die Spannung eines Gases wird erhalten, wenn man die Summe der Ausdrücke von der Form $2\,mu\cos\varphi$ für alle Gasmoleküle bildet, welche in der Zeiteinheit ($t = 1$) auf die Oberflächeneinheit ($s = 1$) der Wand treffen.

Es giebt verschiedene Herleitungen der Fundamentalformel (1) aus der allgemeinen Formel (5). Wir wollen zwei derartige Herleitungen folgen lassen.

I. Herleitung von Joule (1851 und 1857). Nehmen wir an, das Gefäfs, in welchem sich das Gas befindet, habe die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Seiten $a = MQ$ (Fig 264) und $b = MN$ sind, während c senkrecht zur Zeichnungsebene verläuft. Die Kante b nehmen wir als Höhe an, die Fläche $ac = s$ dagegen als Basis; das Volumen ist $v = sb$. Führen wir endlich noch folgende zwei Annahmen ein:

Fig. 264.



1. Wir nehmen an, die Gasmoleküle bewegen sich frei von einer Wand zur andern, ohne aufeinander zu prallen. Diese Annahme kann keinen Einflufs auf das Resultat haben, das man bei Berechnung der Summe der Bewegungsmengen der Moleküle erhält, welche bis an die Gefäfswand gelangen. Wie wir nämlich im Folgenden (Abschnitt VI, Kap. IV, § 7) sehen werden, überträgt sich die Bewegungsmenge beim Stofse völlig elastischer Körper — und als solche sehen wir die Gasmoleküle an — in einer gegebenen Richtung von einem Körper zum anderen derart, dafs sie sich gewissermafsen in dieser Richtung fortzupflanzen fortfährt. Die gesamte Bewegungsmenge, welche an der

Oberflächeneinheit anlangt, bleibt dieselbe, ob die Moleküle miteinander zusammenstofsen oder nicht.

2. Wir nehmen an, dafs im betrachteten Gasvolumen N Moleküle enthalten seien. Die Masse jedes Moleküls sei m, seine Geschwindigkeit u habe irgend eine beliebige Richtung, welche mit den Kanten a, b und c die Winkel α, β und γ einschliefst. Wir ersetzen jedes der Moleküle durch drei andere, die sich parallel zu den Kanten mit den Geschwindigkeiten $u \cos \alpha$, $u \cos \beta$ und $u \cos \gamma$ bewegen. Die Energie der Bewegung ändert sich hierdurch nicht, denn es ist

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m (u \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} m (u \cos \beta)^2 + \frac{1}{2} m (u \cos \gamma)^2.$$

Formel (5) zeigt uns, dafs der Druck p nur von der normalen Komponente abhängt und deshalb kann bei der Berechnung dieses Druckes, z. B. auf die Basis s, die erwähnte Substitution keinen Einflufs auf das Resultat ausüben. Nimmt man die Substitution mit allen Molekülen vor, so erhält man schliefslich drei Gruppen von Molekülen; jede Gruppe enthält N Moleküle, die sich parallel zu einer der Kanten a, b und c bewegen. Da die Zahl der Moleküle sehr grofs ist und alle Bewegungsrichtungen gleich oft vorkommen, so ist klar, dafs jede der drei Gruppen ein Drittel derjenigen Energie besitzt, welche in Wirklichkeit in der fortschreitenden Bewegung aller Moleküle enthalten ist. Man kann annehmen, dafs alle N Moleküle jeder Gruppe sich mit der Geschwindigkeit $u : \sqrt{3}$ bewegen. Eine derartige Energie würde aber jede einzelne Gruppe besitzen, wenn sie $N : 3$ Moleküle enthielte, die sich mit der Geschwindigkeit u bewegten. Eine weitere Annahme, welche Joule machte, besteht darin, dafs er bei der Berechnung von p nach Formel (5) annahm, ein Drittel aller Moleküle bewege sich senkrecht zur Basis s, die beiden anderen Drittel jedoch parallel zur Basis, ohne sich jedoch zu treffen.

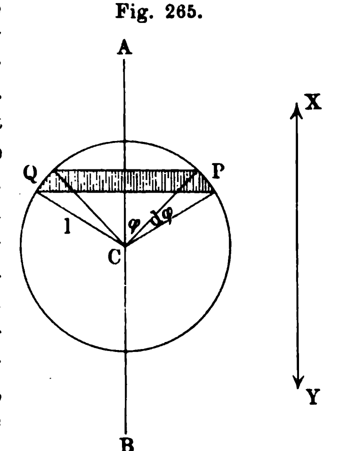
Es ist nunmehr leicht, die Summe zu berechnen, welche auf der rechten Seite von (5) steht. Jedes der $N : 3$ Moleküle trifft senkrecht auf die Grundfläche s; folglich ist $\varphi = 0$ und $\cos \varphi = 1$. Es bewegt sich zwischen den beiden Punkten A und B hin und her; in der Zeit zwischen zwei Zusammenstöfsen mit der Wand s legt es den Weg $AB + BA = 2b$ zurück; in der Zeiteinheit ($t = 1$) stöfst es mithin so viel mal gegen die Wand s, als $2b$ im durchlaufenen Wege u enthalten ist, d. h. $\frac{u}{2b}$ mal. Für ein einzelnes Molekül ist $\Sigma\, 2 m u$ gleich $\frac{u}{2b} \cdot 2 m u = \frac{m u^2}{b}$, für alle Moleküle ist diese Summe $\frac{1}{3} N$ mal gröfser, d. h. gleich

$$\frac{1}{3} N \frac{m u^2}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Um den endgültigen Ausdruck für die Summe zu erhalten, welche auf der rechten Seite der Formel (5) steht, hat man der Bedingung $s = 1$ zu genügen. Da sich (6) auf die ganze Fläche s bezieht, so erhält man für die Oberflächeneinheit $p = \frac{1}{3} N \frac{mu^2}{sb}$. Es ist aber $sb = v$, also $pv = \frac{1}{3} N m u^2$, was zu beweisen war.

II. Herleitung von Clausius (1857). Wir wollen zunächst folgende Aufgabe lösen: Wir nehmen an, es seien n (eine sehr grofse Zahl) Gasmoleküle vorhanden, die sich nach allen möglichen Richtungen bewegen und zwar derart, dafs alle Richtungen gleich oft vorkommen und keine von ihnen einen Vorzug vor den anderen hat. Sei nun XY (Fig. 265) eine beliebige derartige Richtung und werde danach gefragt, wie grofs die Zahl n_φ der Moleküle ist, deren Bewegungsrichtungen mit der Richtung XY einen Winkel einschliefsen, welcher zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ enthalten ist.

Fig. 265.



Um obige Aufgabe zu lösen, zieht man durch den beliebigen Punkt C die Gerade $AB \parallel XY$; von C aus zieht man ferner n Geraden von beliebiger, jedoch gleicher Länge l, welche den Bewegungsrichtungen von n Gasmolekülen parallel sind. Die Endpunkte dieser Geraden werden gleichmäfsig auf einer Kugeloberfläche vom Radius l verteilt sein. Beschreibt man um CA als Achse, Kegel, deren Seitenlinien mit der Achse die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ einschliefsen, so begrenzen sie auf der Kugeloberfläche eine Zone PQ, innerhalb deren die Endpunkte aller der Geraden l liegen, welche der gesuchten Zahl n_φ der Moleküle entsprechen. Da diese Endpunkte der Linien l gleichmäfsig verteilt sind, so mufs sich die Zahl n_φ zu der Gesamtzahl n ebenso verhalten, wie die Zonenoberfläche PQ, d. h. $2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi$ zur Gesamtoberfläche der Kugel $4\pi l^2$.

Sonach ist $n_\varphi : n = 2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi : 4\pi l^2$ und hieraus

$$n_\varphi = \frac{1}{2} n \sin\varphi d\varphi \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

Nachdem wir nun diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir das Flächenelement $AB = \sigma$ (Fig. 266 a. f. S.) der Gefäfswandung betrachten. Sei MN die Normale zu σ; wir wollen über σ als Grundfläche den Cylinder $ACDB$ konstruieren, dessen Seitenlinien mit der

evakuierten ein mit zerstofsenem Glase gefülltes Gefäfs; nach einiger Zeit erhöhte sich der im Gefäfse herrschende Druck, da ein Teil der Luft, welche an der Oberfläche des Glases haftete, allmählich frei wurde. Chappuis fand (1878), dafs ein Quadratmeter Oberfläche des Glases 0,27 cbcm H, 0,35 cbcm Luft, 0,63 cbcm SO_2 und 0,25 cbcm NH_3 zurückhält. An der Luft überziehen sich die Körper mit einer dünnen Schicht von Wasserdampf (Vaporisation); hieraus erklärt sich auch die bemerkenswerte, bisweilen starke Adsorption von CO_2 durch die Oberflächen fester Körper. P. Mülfarth untersuchte (1900) die Adsorption verschiedener Gase durch Glaspulver.

Die Moserschen Bilder erklären sich durch das Vorhandensein einer kondensierten Luftschicht an der Oberfläche der Körper. Bringt man auf eine gereinigte Glasfläche eine Münze oder Medaille (man kann auch umgekehrt die letztere reinigen und die Glasfläche ungereinigt lassen), so tritt eine deutliche Abbildung derselben hervor, wenn man das Glas nachher behaucht. Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dafs an den Punkten, wo innige Berührung erfolgt, ein Teil des kondensierten Gases auf den gereinigten Körper übergeht, wodurch sich die Dichte der übriggebliebenen oder neugebildeten Gasschicht auf der Glasfläche entsprechend den Erhabenheiten und Vertiefungen der Münze ändert. Dies aber wirkt auf die Gröfse und Form der kleinen Wassertröpfchen ein, welche am behauchten Glase haften bleiben, so dafs die Umrisse der Prägung sichtbar bleiben. Wenn man mit einem Holzstäbchen auf Glas oder Metall schreibt und dieses sodann behaucht, so treten die Schriftzüge ebenfalls deutlich hervor.

Einen interessanten Fall der Gasabsorption durch einen festen Körper stellt die von Divers (1873) entdeckte Absorption des Ammoniaks durch salpetersaures Ammoniak dar. Man erhält hierbei eine flüssige Lösung des Salzes im Ammoniak. Untersucht haben diese Erscheinung Raoult, Troost und Kurilow.

Das Verschlucken von Gasen durch massive Metalle (Okklusion) hängt von der Beschaffenheit des entsprechenden Metalles und Gases, sowie von der Temperatur ab. Besonders interessant ist die Okklusion von Wasserstoff durch Palladium. Ein Palladiumdraht okkludiert ein Wasserstoffvolumen, welches unter gewöhnlichem Atmosphärendruck das Volumen des Drahtes selbst bis zu 1000 mal übertreffen würde. Die Okklusionsfähigkeit des Palladiums für Wasserstoff nimmt mit steigender Temperatur bis zu 100° zu, um sich darauf zu vermindern. Während dieses Vorganges nimmt die Länge des Palladiumdrahtes bis um 1,6 Proz. zu, sein Volumen vergröfsert sich um 10 Proz. Die Rechnung zeigt, dafs der okkludierte Wasserstoff sich so stark kondensieren mufs, dafs seine Dichte gleich 1,7 wird. Die Spannung dieses okkludierten Wasserstoffs mufs eine ganz ungeheure sein und wahrscheinlich nach zehntausenden Atmosphärendrucken gemessen werden.

N. Hesehus hat die Okklusion von Wasserstoff durch Palladium und seine Legierungen mit Pt, Au und Ag (75 Proz. Pd und 25 Proz. der anderen Metalle) untersucht. Unter anderem mafs er die Längenzunahme eines Drahtes (von 500 mm Länge und 0,4 mm Dicke) durch Okklusion von Wasserstoff. Wenn der Draht als Kathode diente und Wasserstoff okkludierte, so erhielt man folgende Längenzunahmen in den ersten acht Minuten:

Pd + Ag	Pd + Pt	Pd	Pd + Au
7,2 mm	6,4 mm	5 mm	0,9 mm

Hesehus benutzte bei diesen Versuchen einen besonderen Apparat zur Messung geringer Längenzunahmen des Drahtes. Ferner untersuchte er das Freiwerden von Wasserstoff aus dem Palladium und seiner Legierungen unter verschiedenen Bedingungen und endlich den Einflufs des okkludierten Wasserstoffs auf die Elasticität der Drähte. Nickel okkludiert ebenfalls H, jedoch weit geringer als Palladium; eine ähnliche Erscheinung zeigten Kalium und Natrium. Wird Platin im Sauerstoff erhitzt, so okkludiert es geringe Mengen desselben.

Mior hat gefunden, dafs ein Volumen Pt bis zu 9,1 Volumen Sauerstoff okkludieren kann, und dafs die Geschwindigkeit, mit der die Okklusion erfolgt, sich beim Erwärmen des Pt bis zu 100° steigert. Gufseisen enthält ein wenig Wasserstoff; Eisen bis zu 12 Volumina CO; Aluminium H und CO_2. Besonders interessant ist, dafs Meteoreisen bis zu drei Volumina Gase enthält, von denen fünf Sechstel des Volumens auf den Wasserstoff kommen. Aufserdem enthält es noch Stickstoff und Kohlenoxyd. Das Vorhandensein von Gasen in den Metallen kann, wie Dumas (1878) gezeigt hat, zu Fehlern bei Bestimmung ihres specifischen Gewichtes führen.

Litteratur.

I. Daltonsches Gesetz.

Dalton: Manch. Phil. Soc. 5, 535, 1802; Gilb. Ann. **12**, 385, 1802; **15**, 21, 1803.
Henry: Nicholsons J. **8**, 297, 1804; Gilb. Ann. **21**, 393, 1805.
Gay-Lussac: Ann. ch. et phys. **95**, 314, 1815; Biot: Traité de physique I, p. 298.
Magnus: Pogg. Ann. **38**, 488, 1836.
Regnault: Ann. ch. et phys. (3) **15**, 129, 1845; Mem. de l'Acad. de sc. **26**, 679.
Andrews: Phil. Mag. (5) **1**, 84, 1876.
Cailletet: J. de phys. (1) **9**, 192, 1880.
Springmühl: Pogg. Ann. **148**, 540, 1873.
Herwig: Pogg. Ann. **137**, 592, 1869.
Wüllner u. Grotrian: Wied. Ann. **11**, 545, 1880.
Krönig: Pogg. Ann. **123**, 299, 1864.

Braun: Wied. Ann. **34**, 943, 1888.
B. Galitzin: Das Daltonsche Gesetz. Diss. Strafsburg 1890.
B. Galitzin: Wied. Ann. **41**, 588, 1890.

II. Gase und Flüssigkeiten.

Henry: Phil. Trans. **1**, 29, 1803; Gilb. Ann. **20**, 1805.
Bunsen: Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857; Liebigs Ann. **93**, 1, 1855; Phil. Mag. (4) **9**, 116, 181, 1855; Ann. ch. et phys. (3) **43**, 496, 1855.
Hüfner: Wied. Ann. **1**, 629, 1877.
Bohr u. Bock: Overs. K. Dansk. Vid. Selsk. Forhdl. **22**, 84, 1891; Wied. Ann. **44**, 318, 1891.
Bohr: Wied. Ann. **62**, 644, 1897; **68**, 500, 1899; Drud. Ann. **1**, 244, 1900.
Winkler: Chem. Ber **22**, 1772, 1889; **24**, 89, 3602, 1891; Zeitschr. f. phys. Chem. **9**, 171, 1892.
Timofejew: Zeitschr. f. phys. Chem. **6**, 141, 1890.
Carius: Liebigs Ann. **94**, 129, 1855; **99**, 129, 1856; Ann. ch. et phys. (3) **47**, 418, 1856.
Schönfeld: Lieb. Ann. **95**, 1, 1885.
Pagliani e Emo: Atti R. Acc. d. Torino **18**, 67, 1882 (Beibl. **8**, 18, 1884).
Ramsay: Ann. ch. et phys. (7) **13**, 462, 1898.
Setschenow: Mém. de l'Acad. de St. Petersb. (7) **22**, Nr. 6; **34**, Nr. 3; **35**, Nr. 7; Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 117, 1889; Ann. ch. et phys. (6) **25**, 226, 1892; Ber. chem. Gas. 1877, S. 972; Phys. Sekt. d. Ges von Freunden d. Nat. zu Moskau (russ.) **5**, Heft 2, S. 6, 1893; Ann. ch. et phys. (6) **25**, 226, 1892.
Kumpf: Absorption von Chlor durch NaCl-Lösung. Dissert. Graz 1881.
Kanowalow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **30**, Chem. Abt., 367, 1898.
Wroblewski: Wied. Ann. **8**, 29, 1880; **17**, 103, 1882; **18**, 290, 1893; J. d. phys. (2) **1**, 452, 1882.
Richard: Compt. rend. **123**, 1088, 1896.
E. Wiedemann: Wied. Ann. **17**, 349, 1882.
Khanikoff et Longuinine: Ann. ch. et phys. (4) **11**, 412, 1867.
Mackenzie und Nichols: Wied. Ann. **3**, 134, 1878.
Nichols and Wheeler: Phil. Mag. (5) **11**, 113, 1881.
Almen: Öfvers. K. Vetens. Akad. Foerh. 1898, p. 735.
Angström: Wied. Ann. **15**, 297, 1882; **17**, 297, 1882.
Blümke: Wied. Ann. **23**, 404, 1884; **30**, 243, 1887.
Steiner: Wied. Ann. **52**, 275, 1894.
Konowalow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **26**, Chem. Abt. 48, 1894.

III. Gase und feste Körper.

(Eine ausführliche Litteraturangabe über Adsorption der Gase findet sich in der unten angeführten Abhandlung von P. Mühlfarth.)

Saussure: Gilb. Ann. **47**, 1814.
Chappuis: Wied. Ann. **8**, 1 u. 671, 1879; **12**, 160, 1881; Arch. Sc. phys. (3) **3**, 439, 1878.
Jamin et Bertrand: Ann. ch. et phys. (3) **34**, 344, 1852.
Moser: Pogg. Ann. **56** u. **57**, 1842.
Dumas: Compt. rend. **86**, 65, 1878.
Quincke: Pogg. Ann. **108**, 326, 1859.
Joulin: Compt. rend. **90**, 741, 1880.

Pfeiffer: Verdichtung von Gasen durch feste Körper. Diss. Erlangen 1882.
Kayser: Wied. Ann. **12**, 528; **14**, 450, 1881; **21**, 495, 1884; **23**, 416, 1884.
Bunsen: Wied. Ann. **20**, 545, 1883; **22**, 145, 1884; **24**, 321, 1885.
O. Schumann: Wied. Ann. **27**, 91, 1886.
Troost et Hautefeuille: Compt. rend. **78**, 686, 1874 (H und Pd).
P. Mühlfarth: Drud. Ann. **3**, 328, 1900.
Divers: Compt. rend. **77**, 788, 1873.
Raoult: Compt. rend. **76**, 1261, 1887; **94**, 1117, 1882.
Troost: Compt. rend. **94**, 789, 1882.
Kurilow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **25**, Chem. Abt., 170, 1893.
N. Hesechus: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **11**, 78, 1879.
Mond, Ramsay und Shields: (Okklusion von O_2 und H_2 durch Pt und Pd) Phys. Chem. **19**, 25, 1896; **25**, 657, 1898; **26**, 109, 1898; Proc. R. Soc. **62**, 290, 1898.
Mior: (Okklusion von H_2 durch Pt) N. Cim. (4) **9**, 67, 1899; Beibl. 1899, S. 620.

Fünftes Kapitel.

Grundlagen der kinetischen Gastheorie.

§ 1. **Bewegungsart der Gasmoleküle.** Als Begründer der kinetischen Gastheorie hat man Krönig (1856) und Clausius (1857) anzusehen, wennschon die Ideen und Vorstellungen, welche derselben zu Grunde liegen, bereits früher von mehreren Forschern ausgesprochen und entwickelt worden sind.

In ihrer einfachsten Form und ohne die Ergänzungen und Verbesserungen, welche allmählich in dieselbe eingeführt worden sind, nimmt die kinetische Gastheorie an, dafs die Gasmoleküle, ohne aufeinander einzuwirken (aufser bei Zusammenstöfsen) sich vollkommen frei bewegen. Diese Bewegung erfolgt geradlinig und mit einer Geschwindigkeit, die, wie wir sehen werden, nur von der Art des Gases und von der Temperatur abhängt. Die Bewegungsrichtung ändert sich plötzlich, wenn ein Gasmolekül auf seinem Wege etwa die Wandung des Gefäfses trifft, in welchem es sich befindet oder irgend ein anderes Hindernis, oder aber, wenn zwei Moleküle aufeinander treffen.

Aufser der in jedem gegebenen Augenblick geradlinigen Bewegung des Moleküls kommen jedoch im Gase noch andere Bewegungen vor. Erstens kann sich ein Molekül als Ganzes um eine beliebige Achse drehen; derartige Bewegungen müssen auftreten, wenn die Moleküle beim Zusammenstofse einander nicht zentral treffen. Zweitens sind sogenannte intramolekulare Bewegungen möglich, d. h.

Bewegungen (Schwingungen, Rotationen) der Atome innerhalb ihres Moleküls um gewisse mittlere Lagen. Die von den Molekülen eingenommenen Volumina zieht man nicht in Betracht, sondern betrachtet erstere als Punkte, zwischen denen jedoch Zusammenstöfse möglich sind. Das heifst nun mit anderen Worten, man vernachlässigt die linearen Dimensionen der Gasmoleküle im Vergleich zu ihrem mittleren Abstande voneinander. Ferner nimmt man an, die Gasmoleküle seien keiner äufseren Kraft unterworfen — man vernachlässigt mithin die Wirkung, welche die Schwerkraft auf sie ausübt.

Die im Vorhergehenden auseinandergesetzte Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle, nämlich die Geradlinigkeit ihrer Bewegung, macht die beiden Grundeigenschaften der Gase unmittelbar verständlich. Es erklärt sich daraus ihr Bestreben, das ganze ihnen zur Verfügung stehende Volumen gleichmäfsig zu erfüllen und ihre Spannung, d. h. der Druck, welchen sie auf die jenes Volumen begrenzenden Körper ausüben. Die erstere dieser Eigenschaften hat man früher durch die gegenseitige Abstofsung der Gasmoleküle erklärt. Wenn sich neben dem Raume A, welcher von Gas erfüllt ist, ein leerer Raum B befindet, so ist es klar, dafs alle Moleküle, welche sich in der Richtung nach diesem Raume B hin bewegen, da sie keinen Widerstand finden, in denselben eindringen bis eine gleichmäfsige Verteilung der Moleküle erreicht ist, wobei in der Zeiteinheit ebensoviel Teilchen von A nach B übergehen als von B nach A. Die gleichmäfsige Verteilung ist somit die Bedingung für das Gleichgewicht, das jedoch hier nicht der Ruhe entspricht, sondern im Gegenteil dem kontinuirlichen Austausch der Moleküle ohne Verminderung ihrer Anzahl in jedem nicht allzu kleinen Teile des Raumes. In derartigen Fällen, die häufig im Bereiche verschiedener physikalischer Erscheinungen vorkommen, pflegt man vom stationären Gleichgewicht der Bewegung oder von dynamischen Gleichgewicht zu reden.

Die Spannung der Gase, welche sich als Druck auf die ihnen benachbarten Körper kundtut, erklärt sich durch die Stöfse, welche jene Körper seitens der auf sie auffliegenden und von ihnen abprallenden Moleküle — durch das „molekulare Bombardement“ dem sie ausgesetzt sind, erfahren.

Um gleich zu Anfang eine richtigere Vorstellung von der Bewegungsweise der Gasmoleküle zu erhalten, wollen wir hier einige Daten anführen, auf die wir später wieder zurückkommen werden. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist sehr grofs; sie beträgt beispielsweise für die Luftmoleküle fast 500 m pro Sekunde und nimmt für alle Gase mit der Temperatur zu. Die Zusammenstöfse der Gasmoleküle erfolgen unvorstellbar oft; ein Luftmolekül vermag z. B. bei gewöhnlichem Druck im Mittel nicht mehr als 0,0001 mm in der Zeit von einem Zusammenstofse bis zum nächstfolgenden zurückzulegen.

Zieht man die Geschwindigkeit der Gasmoleküle in Betracht, so sieht man demnach, daſs jedes Molekül in jeder Sekunde bis zu 5000 Millionen Zusammenstöſse erleidet und im allgemeinen ebenso oft seine Bewegungsrichtung ändert. Bei Kompression eines Gases muſs die Zahl dieser Zusammenstöſse proportional der Dichte zunehmen; ist die Luft durch einen Druck von 100 Atmosphären zusammengedrückt, so erhält man bereits 500000 Mill. Zusammenstöſse pro Sekunde. Alles Gesagte zusammengenommen liefert uns ein Bild von dem unvorstellbar chaotischen Zustande, in welchem sich die gewaltig groſse Zahl von Gasmolekülen befindet, die sich mit groſser Geschwindigkeit nach allen Richtungen bewegen und kontinuirlich aufeinander prallen.

§ 2. Das Boyle-Mariottesche Gesetz. Die kinetische Gastheorie erklärt nicht nur in einfacher Weise weshalb der Druck p eines Gases indirekt proportional dem Volumen v ist, sondern liefert auch einen sehr interessanten Ausdruck für das Produkt pv, welches von der Temperatur abhängt.

Eine einfache Erklärung für das Gesetz selbst ist z. B. die folgende. Verkleinert man das Volumen v eines Gases, in welchem sich n Moleküle befanden, k mal, so bleiben in dem neuen Volumen $v:k$ alle früheren n Moleküle enthalten. Die Spannung wird dabei die gleiche sein, als ob sich im Volumen v die Anzahl kn Moleküle befände, denn teilt man dieses Volumen durch Scheidewände in k gleiche Teile, so ändert man die Spannung nicht, erhält aber dabei Volumina, welche gleich $v:k$ sind und von denen ein jedes n Moleküle enthält. Hat sich aber im Volumen v die Zahl der Moleküle k mal vergröſsert, so werden dieselben auf die Oberflächeneinheit der Wandungen k mal häufiger auftreffen, das „Bombardement", mithin auch der Druck des Gases wird sich also k mal verstärken.

Eine andere Form der Erklärung ist die folgende: Vermindert man das Volumen q^3 mal, so vermindern sich die linearen Dimensionen, folglich auch der mittlere gegenseitige Abstand der Moleküle voneinander q mal; deshalb werden die längs der Einheit der Wandoberfläche in einer dünnen anliegenden Schicht befindlichen Moleküle beim Zurückprallen einen q mal kürzeren Weg zurücklegen bis zu ihrem nächsten wahrscheinlichen Zusammenstoſse mit anderen Molekülen, von denen sie zur Wand zurückgeworfen werden. Jedes Molekül wird somit q mal häufiger auf die Wand auffliegen als vorher. Die Zahl der Moleküle innerhalb der Schicht, deren Dicke man jetzt q mal kleiner anzunehmen hat, nimmt q^2 mal zu, mithin wird die Gesamtzahl der Stöſse, die auf die Oberflächeneinheit der Wand erfolgt, sich q^3 mal vergröſsern, d. h. so viel mal, als sich das Volumen verkleinert hat.

Gehen wir nun zur Herleitung der Formel über, welche man als

die Fundamentalformel der kinetischen Gastheorie bezeichnen kann. Sie hat folgende Gestalt:

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hier ist v das vom Gase eingenommene Volumen, p seine Spannung, N die Zahl der im Volumen v enthaltenen Moleküle, m die Masse eines Moleküls und u seine Geschwindigkeit.

Um obige Formel herzuleiten, müssen wir uns an folgenden auf S. 85 ausgesprochenen Lehrsatz erinnern: Der Impuls K einer Aufsenkraft ist gleich dem geometrischen Zuwachs L der Bewegungsmenge.

Nehmen wir an, das Molekül C (Fig. 263), dessen Masse m ist, bewegt sich in der Richtung von FC und stöfst an die Wandung AB mit der Geschwindigkeit $u = CD$, welche den Winkel φ mit der Normalen CN einschliefst Der geometrische Zuwachs L der Bewegungsmenge ist dann gleich $m \times DE$. Es ist nun aber $DE = 2u \cos\varphi$, folglich

$$L = 2mu \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Kraftimpuls kann man gleich $K = f\tau$ setzen, wo f die mittlere Gröfse der Kraft ist, mit welcher die Wand auf das Molekül drückt, wobei sich die Gröfse und Richtung seiner Geschwindigkeit und die Dauer τ der Berührung zwischen Molekül und Wand ändert. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wirkt auf die Wand während der Zeit τ die Kraft f. Obengenanntes Gesetz ergiebt somit

$$K = f\tau = 2mu \cos\varphi \quad . \quad (3)$$

Fig. 263.

Wenn man entsprechende Gleichungen für alle Moleküle hinschreibt, welche den gegebenen Teil s der Wandoberfläche im Laufe irgend einer Zeit t treffen, und alle diese Gleichungen summiert, so erhält man auf der linken Seite $\Sigma f\tau$. Die Gröfse $\Sigma\tau$ ist nicht gleich t, da die Stöfse nicht unmittelbar aufeinander folgen: zwischen ihnen können kleine Zeitintervalle liegen und mehrere Stöfse können wiederum gleichzeitig erfolgen. Die Summe der Kraftimpulse während der Zeit t jedoch, d. h. $\Sigma f\tau$, kann in der Form Ft dargestellt werden, wo wiederum nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung F die mittlere Gröfse der Kraft darstellt, welche in der Zeit t ununterbrochen auf den Teil s der

Wandoberfläche wirkt. Somit hat man

$$Ft = \sum_{t,s} 2\,mu \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Buchstaben t und s, welche unter dem Summenzeichen stehen, bedeuten, dafs man die Summe der Gröfsen $2\,mu \cos\varphi$ für alle Teilchen zu bilden hat, welche in der Zeit t auf die Oberfläche s auftreffen.

Setzt man $t = 1$ und $s = 1$, so giebt die linke Seite die Spannung p des Gases, d. h. die mittlere Kraft, welche ununterbrochen auf die Oberflächeneinheit der Wand einwirkt. Da die Zahl der Stöfse aufserordentlich grofs ist, kann man diese Kraft p für eine konstante Gröfse ansehen.

Man hat also

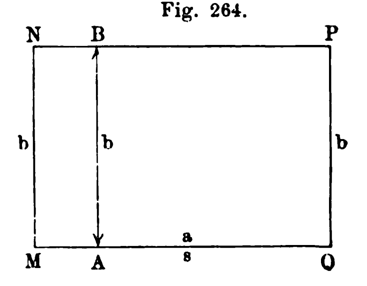
$$p = \sum_{\substack{t=1\\ s=1}} 2\,mu \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Spannung eines Gases wird erhalten, wenn man die Summe der Ausdrücke von der Form $2\,mu \cos\varphi$ für alle Gasmoleküle bildet, welche in der Zeiteinheit $(t = 1)$ auf die Oberflächeneinheit $(s = 1)$ der Wand treffen.

Es giebt verschiedene Herleitungen der Fundamentalformel (1) aus der allgemeinen Formel (5). Wir wollen zwei derartige Herleitungen folgen lassen.

I. Herleitung von Joule (1851 und 1857), Nehmen wir an, das Gefäfs, in welchem sich das Gas befindet, habe die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Seiten $a = MQ$ (Fig 264) und $b = MN$ sind, während c senkrecht zur Zeichnungsebene verläuft. Die Kante b nehmen wir als Höhe an, die Fläche $ac = s$ dagegen als Basis; das Volumen ist $v = sb$. Führen wir endlich noch folgende zwei Annahmen ein:

Fig. 264.



1. Wir nehmen an, die Gasmoleküle bewegen sich frei von einer Wand zur andern, ohne aufeinander zu prallen. Diese Annahme kann keinen Einflufs auf das Resultat haben, das man bei Berechnung der Summe der Bewegungsmengen der Moleküle erhält, welche bis an die Gefäfswand gelangen. Wie wir nämlich im Folgenden (Abschnitt VI, Kap. IV, § 7) sehen werden, überträgt sich die Bewegungsmenge beim Stofse völlig elastischer Körper — und als solche sehen wir die Gasmoleküle an — in einer gegebenen Richtung von einem Körper zum anderen derart, dafs sie sich gewissermafsen in dieser Richtung fortzupflanzen fortfährt. Die gesamte Bewegungsmenge, welche an der

Oberflächeneinheit anlangt, bleibt dieselbe, ob die Moleküle miteinander zusammenstofsen oder nicht.

2. Wir nehmen an, dafs im betrachteten Gasvolumen N Moleküle enthalten seien. Die Masse jedes Moleküls sei m, seine Geschwindigkeit u habe irgend eine beliebige Richtung, welche mit den Kanten a, b und c die Winkel α, β und γ einschliefst. Wir ersetzen jedes der Moleküle durch drei andere, die sich parallel zu den Kanten mit den Geschwindigkeiten $u \cos\alpha$, $u \cos\beta$ und $u \cos\gamma$ bewegen. Die Energie der Bewegung ändert sich hierdurch nicht, denn es ist

$$\frac{1}{2}\, m u^2 = \frac{1}{2}\, m (u \cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}\, m (u \cos\beta)^2 + \frac{1}{2}\, m (u \cos\gamma)^2.$$

Formel (5) zeigt uns, dafs der Druck p nur von der normalen Komponente abhängt und deshalb kann bei der Berechnung dieses Druckes, z. B. auf die Basis s, die erwähnte Substitution keinen Einflufs auf das Resultat ausüben. Nimmt man die Substitution mit allen Molekülen vor, so erhält man schliefslich drei Gruppen von Molekülen; jede Gruppe enthält N Moleküle, die sich parallel zu einer der Kanten a, b und c bewegen. Da die Zahl der Moleküle sehr grofs ist und alle Bewegungsrichtungen gleich oft vorkommen, so ist klar, dafs jede der drei Gruppen ein Drittel derjenigen Energie besitzt, welche in Wirklichkeit in der fortschreitenden Bewegung aller Moleküle enthalten ist. Man kann annehmen, dafs alle N Moleküle jeder Gruppe sich mit der Geschwindigkeit $u : \sqrt{3}$ bewegen. Eine derartige Energie würde aber jede einzelne Gruppe besitzen, wenn sie $N : 3$ Moleküle enthielte, die sich mit der Geschwindigkeit u bewegten. Eine weitere Annahme, welche Joule machte, besteht darin, dafs er bei der Berechnung von p nach Formel (5) annahm, ein Drittel aller Moleküle bewege sich senkrecht zur Basis s, die beiden anderen Drittel jedoch parallel zur Basis, ohne sich jedoch zu treffen.

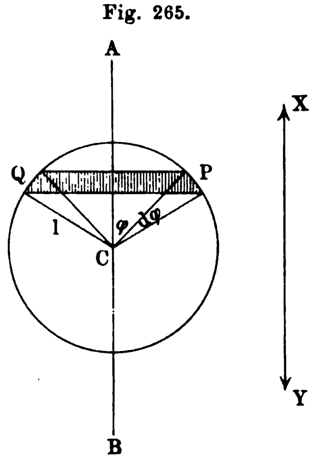
Es ist nunmehr leicht, die Summe zu berechnen, welche auf der rechten Seite von (5) steht. Jedes der $N : 3$ Moleküle trifft senkrecht auf die Grundfläche s; folglich ist $\varphi = 0$ und $\cos\varphi = 1$. Es bewegt sich zwischen den beiden Punkten A und B hin und her; in der Zeit zwischen zwei Zusammenstöfsen mit der Wand s legt es den Weg $AB + BA = 2b$ zurück; in der Zeiteinheit ($t = 1$) stöfst es mithin so viel mal gegen die Wand s, als $2b$ im durchlaufenen Wege u enthalten ist, d. h. $\frac{u}{2b}$ mal. Für ein einzelnes Molekül ist $\Sigma\, 2mu$ gleich $\frac{u}{2b} \cdot 2mu = \frac{mu^2}{b}$, für alle Moleküle ist diese Summe $\frac{1}{3}\, N$ mal gröfser, d. h. gleich

$$\frac{1}{3}\, N \frac{mu^2}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Um den endgültigen Ausdruck für die Summe zu erhalten, welche auf der rechten Seite der Formel (5) steht, hat man der Bedingung $s = 1$ zu genügen. Da sich (6) auf die ganze Fläche s bezieht, so erhält man für die Oberflächeneinheit $p = \frac{1}{3} N \frac{mu^2}{sb}$. Es ist aber $sb = v$, also $pv = \frac{1}{3} Nmu^2$, was zu beweisen war.

II. Herleitung von Clausius (1857). Wir wollen zunächst folgende Aufgabe lösen: Wir nehmen an, es seien n (eine sehr grofse Zahl) Gasmoleküle vorhanden, die sich nach allen möglichen Richtungen bewegen und zwar derart, dafs alle Richtungen gleich oft vorkommen und keine von ihnen einen Vorzug vor den anderen hat. Sei nun XY (Fig. 265) eine beliebige derartige Richtung und werde danach gefragt, wie grofs die Zahl n_φ der Moleküle ist, deren Bewegungsrichtungen mit der Richtung XY einen Winkel einschliefsen, welcher zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ enthalten ist.

Fig. 265.



Um obige Aufgabe zu lösen, zieht man durch den beliebigen Punkt C die Gerade $AB \parallel XY$; von C aus zieht man ferner n Geraden von beliebiger, jedoch gleicher Länge l, welche den Bewegungsrichtungen von n Gasmolekülen parallel sind. Die Endpunkte dieser Geraden werden gleichmäfsig auf einer Kugeloberfläche vom Radius l verteilt sein. Beschreibt man um CA als Achse, Kegel, deren Seitenlinien mit der Achse die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ einschliefsen, so begrenzen sie auf der Kugeloberfläche eine Zone PQ, innerhalb deren die Endpunkte aller der Geraden l liegen, welche der gesuchten Zahl n_φ der Moleküle entsprechen. Da diese Endpunkte der Linien l gleichmäfsig verteilt sind, so mufs sich die Zahl n_φ zu der Gesamtzahl n ebenso verhalten, wie die Zonenoberfläche PQ, d. h. $2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi$ zur Gesamtoberfläche der Kugel $4\pi l^2$.

Sonach ist $n_\varphi : n = 2\pi l^2 \sin\varphi d\varphi : 4\pi l^2$ und hieraus

$$n_\varphi = \frac{1}{2} n \sin\varphi d\varphi \cdot \quad \cdots \cdots \quad (7)$$

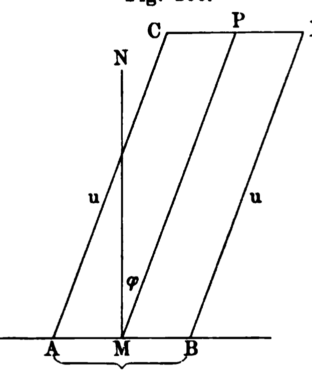
Nachdem wir nun diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir das Flächenelement $AB = \sigma$ (Fig. 266 a. f. S.) der Gefäfswandung betrachten. Sei MN die Normale zu σ; wir wollen über σ als Grundfläche den Cylinder $ACDB$ konstruieren, dessen Seitenlinien mit der

Normalen den Winkel φ bilden und eine Länge haben, die gleich der Geschwindigkeit u der Gasmoleküle ist. Die Höhe des Cylinders ist $u \cos \varphi$, sein Volumen $\sigma u \cos \varphi$; die Anzahl n der in ihm eingeschlossenen Moleküle ist gleich $n = \frac{N}{v} \sigma u \cos \varphi$, wenn im Gesamtvolumen v die Anzahl N von Gasmolekülen, also in der Volumeneinheit $\frac{N}{v}$ Moleküle enthalten sind. Diese Moleküle bewegen sich nach allen möglichen Richtungen, folglich ist

$$n_\varphi = \frac{1}{2} n \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{N}{v} \sigma u \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad \cdots \quad (8)$$

die Zahl der Moleküle, welche im Cylinder $ACDB$ enthalten sind und sich nach denjenigen Richtungen bewegen, welche mit der Normalen MN einen zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegenden Winkel bilden.

Fig. 266.



Bestimmen wir jetzt diejenige Zahl n'_φ dieser Moleküle, welche sich nach Richtungen bewegen, deren mit der Achse MP des Cylinders gebildete Winkel unendlich klein sind. Es möge die Ebene NMP mit irgend einer Anfangsebene, welche durch die Normale MN geht, den Winkel ψ bilden. Die zu σ normalen Ebenen, welche durch die Bewegungsrichtungen der n_φ Moleküle gehen, bilden mit der Anfangsebene alle möglichen Winkel von 0 bis zu 2π. Damit diese Moleküle sich nur unendlich wenig von der Ebene NPM entfernen, ist es erforderlich, dafs die erwähnten normalen Ebenen mit der Anfangsebene Winkel einschliefsen, welche zwischen ψ und $\psi + d\psi$ enthalten sind. Hieraus folgt, dafs sich n'_φ zu n_φ ebenso verhält, wie $d\psi$ zu 2π, d. h.

$$n'_\varphi = \frac{d\psi}{2\pi} n_\varphi = \frac{N\sigma}{4\pi v} u \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi \quad . \quad . \quad (9)$$

Alle diese n'_φ Moleküle stofsen offenbar auf das Flächenelement σ in der Zeiteinheit, am Ende welcher diejenigen von ihnen bis nach AB gelangen, welche sich zu Beginn derselben in CD befanden. Wir lassen auch hier aufser acht, dafs die Teilchen miteinander zusammenprallen; dafs dies geschehen darf, war oben gezeigt worden. Der Einwand, dafs der Cylinder $ACDB$ nicht vollständig im gaserfüllten Volumen v enthalten sein kann, ist offenbar belanglos. Die Strömung der Bewegungsmenge, welche während der Zeiteinheit im Innern des Cylinders in der Richtung nach AB hin erfolgt, ist von der Gröfse

des Volumens v unabhängig. Man könnte übrigens auch einen Cylinder von beliebiger Länge l wählen, welche von den Gasmolekülen in der Zeit $t = l : u$ durchlaufen wird. Geht man dann zur Bestimmung der Summe (5) für $t = 1$ über, so erhält man dasselbe Resultat wie hier. Jedes der n'_φ Moleküle liefert eines von den Gliedern der Summe (5) und da φ allen gemeinsam ist, so geben sie einen Teil der Gesamtsumme, der gleich

$$n'_\varphi . 2\, m\, u \cos\varphi = \frac{N m \sigma}{2 \pi v} u^2 \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi \text{ ist.}$$

Integriert man diesen Ausdruck nach ψ von 0 bis 2π und nach φ von 0 bis $\pi : 2$, so erhält man die Summe (5) für $t = 1$ und $s = \sigma$; um nun noch p zu erhalten, hat man von $s = \sigma$ zu $s = 1$ überzugehen, d. h. das erhaltene Resultat durch σ zu dividieren. Danach ist

$$p = \frac{N m u^2}{2 \pi v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi$$

$$= \frac{N m u^2}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3} \frac{N m u^2}{v}.$$

Hieraus erhält man

$$p v = \frac{1}{3} N m u^2 \quad \text{. . . . .} \quad (10)$$

d. h. die Formel (1). Am meisten zu beanstanden ist in obiger Herleitung die Annahme, daſs sich alle Moleküle mit derselben Geschwindigkeit u bewegen, was, wie wir sehen werden, nicht zutrifft.

Die Gröſsen p, v, m und u in Formel (10) müssen durch die einander entsprechenden Einheiten gemessen werden. Will man C. G. S. Einheiten einführen, so ist p in Dynen pro Quadratcentimeter Oberfläche, v in Kubikcentimetern, m in Grammen zu messen und als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde anzunehmen. Häufiger wählt man indes als Einheit der Kraft das Kilogramm, als Längeneinheit das Meter und als Zeiteinheit die Sekunde. In diesem Falle wird p in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche, v in Kubikmetern ausgedrückt; als Masseneinheit hat man dann die Masse von $g = 9{,}81$ kg und als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 m pro Sekunde anzunehmen.

§ 3. Folgerungen aus der Grundformel. Die Clapeyronsche Formel (5) auf S. 430), lautete

$$p v = R T \quad \text{. . . . .} \quad (11)$$

wo T die absolute Temperatur, R eine für ein gegebenes Volumen eines gegebenen Gases konstante Gröfse war. Wir wollen hier die Wucht J der fortschreitenden Bewegung unserer Gasmoleküle einführen; dieselbe war gleich

$$J = \frac{1}{2} N m u^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Sei $M = Nm$ die Masse des Gases, $Q = gM$ sein Gewicht und δ die Gasdichte und zwar bezogen auf Luft vom selben Druck und derselben Temperatur.

Kombiniert man die Formeln (10), (11) und (12), so erhält man folgende bemerkenswerte Relationen

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2 = \frac{1}{3} M u^2 = R T = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Bei konstanter Temperatur ist das Produkt pv nach dem B.-M. Gesetz eine für ein gegebenes Gasquantum konstante Gröfse. Wir sehen hier, dafs diese Konstante ($pv = Const.$) gleich zwei Dritteln der Energie der fortschreitenden Bewegung der Gasmoleküle ist. Für $v = 1$ erhält man

$$p = \frac{2}{3} J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13, a)$$

d. h. der Druck eines Gases ist gleich zwei Dritteln der Energie der fortschreitenden Bewegung jener Gasmoleküle, welche sich in der Einheit des Gasvolumens vorfinden.

Die Gleichung $RT = \frac{2}{3} J$ zeigt ferner, dafs die Energie der fortschreitenden Bewegung der Gasmoleküle proportional der absoluten Temperatur des Gases ist.

§ 4. Geschwindigkeit der Gasmoleküle. Die Gleichungen (13) ergeben

$$u = \sqrt{\frac{3pv}{M}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nehmen wir an, wir hätten es mit der Gewichtseinheit des Gases zu thun, dann ist das Gewicht $Q = gM = 1$, woraus $M = 1:g$ folgt. Sei ferner v_0 das Volumen der Gewichtseinheit, also eines Kilogramms Luft bei der für das Gas gegebenen Temperatur T und dem Drucke p; dann ist $v = v_0 : \delta$ und nach Formel (14)

$$u = \sqrt{3gpv} = \sqrt{\frac{3gpv_0}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Sei endlich R_0 die Konstante der Clapeyronschen Formel für 1 kg Luft; dann ist $pv_0 = R_0 T$. Wir sahen (vergl. (6) auf S. 431), dafs $R_0 = 29{,}27$ ist, wenn man Kilogramm, Meter und Sekunde als

Einheiten der Kraft, Länge und Zeit annimmt; Formel (15) giebt alsdann

$$u = \sqrt{3\,g\,R_0\,\frac{T}{\delta}} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Aus dieser Formel ergeben sich zwei überaus wichtige Gesetze:

I. Die Geschwindigkeit der Moleküle eines gegebenen Gases ist der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur des Gases direkt proportional.

II. Die Geschwindigkeiten der Moleküle verschiedener Gase sind bei gleicher Temperatur den Quadratwurzeln aus den Gasdichten indirekt proportional.

Je geringer die Dichte eines Gases ist, um so schneller bewegen sich seine Moleküle. Von der Spannung hängt, wie zu erwarten war, die Geschwindigkeit der Moleküle nicht ab. Komprimiert man ein Gas bei konstanter Temperatur, so nähern sich seine Moleküle, was aber auf ihre Geschwindigkeit keinen Einfluſs haben kann. Bei der Kompression ändert sich zwar die auf Wasser bezogene Dichte D des Gases, seine Dichte δ in Bezug auf Luft bleibt aber in den Gültigkeitsgrenzen des B.-M. Gesetzes ungeändert (S. 405).

Formel (16) setzt uns in den Stand, auch die absoluten Gröſsen für die Geschwindigkeit u der Gasmoleküle zu berechnen. Wir wollen dies für die Temperatur von 0°, d. h. für $T = 273$ ausführen und setzen daher $g = 9{,}81$ und $R = 29{,}27$ ein; dann ist

$$u = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}81 \times 29{,}27 \times 273}{\delta}} = \frac{485 \text{ Meter}}{\sqrt{\delta} \text{ Sekunden}} \quad . \quad (17)$$

Wir würden natürlich dasselbe erhalten, wenn wir in Formel (15) $p = 10\,333$ (den Druck von einer Atmosphäre in Kilogrammen pro Quadratmeter Oberfläche) und $v_0 = 0{,}7733$ (das Volumen eines Kilogramms Luft bei 0° und dem Drucke von einer Atmosphäre in Kubikmetern) setzen würden. Für Luft ist $\delta = 1$, mithin hat die Geschwindigkeit der Gasmoleküle bei 0° den beträchtlichen Wert von 485 m pro Sekunde. Sie ist gröſser als die Schallgeschwindigkeit.

Setzt man für Wasserstoff die Dichte $\delta = 0{,}0693$, für Kohlensäure $\delta = 1{,}529$, so erhält man

für H_2 . . . . . . $u = 1843$ m pro Sekunde,
für CO_2 . . . . . . $u = 392$ m „ „ .

Bei 100° sind die entsprechenden Geschwindigkeiten $\sqrt{\frac{373}{273}} = 1{,}169$ mal gröſser, bei 200° bereits $\sqrt{\frac{473}{273}} = 1{,}316$ mal gröſser. Danach erhält man folgende Werte für die Geschwindigkeiten u:

31*

	0°	100°	200°
Sauerstoff . . .	461 m/sec	539 m/sec	604 m/sec
Wasserstoff . . .	1843 „	2153 „	2424 „
CO_2	392 „	458 „	515 „

Die Geschwindigkeit der Wasserstoffmoleküle bei gewöhnlicher Temperatur ist nahezu gleich 2 km in der Sekunde.

Für $T = 0$, also $t = -273^0$ ist $u = 0$; somit entspricht dem absoluten Nullpunkt der Temperatur völliger Mangel an fortschreitender Bewegung der Moleküle. Wir nehmen an, daſs bei dieser Temperatur auch keine anderen Bewegungen existieren wie Rotationen der Moleküle und intramolekulare Bewegungen (S. 473). Die Gröſsen für die Geschwindigkeiten u, welche wir fanden, sind unter der Voraussetzung erhalten worden, daſs alle Gasmoleküle die gleiche Geschwindigkeit besitzen. Wir werden im späteren sehen, welche Bedeutung in Wirklichkeit die Geschwindigkeit hat, welche in den Formeln (10) und (13) vorkommt und deren Gröſse durch die Formeln (14), (15), (16) und (17) ausgedrückt ist.

§ 5. **Avogadrosches Gesetz.** Dieses Gesetz kann, wenn auch nicht streng, aus den von uns erhaltenen Formeln abgeleitet werden. Nehmen wir an, es seien zwei gleiche Volumina v zweier verschiedener Gase beim gleichen Drucke p und der gleichen Temperatur T gegeben. Seien ferner in diesen gleichen Volumina N Moleküle des einen und N_1 Moleküle des anderen Gases enthalten, dann besagt das Avogadrosche Gesetz, daſs $N = N_1$ ist.

Bezeichnet man die Massen der Moleküle zweier Gase mit m und m_1, so giebt Formel (10) $pv = \frac{1}{3} Nmu^2$ und $pv = \frac{1}{3} N_1 \; m_1 \; u_1^2$ mithin

$$Nmu^2 = N_1 m_1 u_1^2 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Der Umstand, daſs sich beim Mischen zweier Gase ihre Temperatur nicht ändert, führt Clausius zu dem Schlusse, daſs die Energie der fortschreitenden Bewegung der Moleküle des einen wie des anderen Gases ungeändert bleibt. Dies ist aber nur in dem Falle möglich, wenn die Bewegungsenergie der einzelnen Moleküle in beiden Gasen die gleiche ist, wenn also

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

ist. Wenn diese Gleichung nicht gelten würde, müſste sich bei den Zusammenstöſsen der Moleküle verschiedener Gase die Energie der einen Art von Molekülen vermehren, die der anderen vermindern. Wir erhielten dann das sehr unwahrscheinliche Resultat, daſs in einem aus zwei Gasen bestehenden Gemische ein jedes von ihnen gewisser-

maſsen seine eigene Temperatur hätte, welche indes gleich der gemeinsamen Temperatur der Gase vor ihrer Mischung wäre, unabhängig davon in welchem Verhältnisse die Gase gemischt wären. Läſst man sonach Formel (19) gelten, so erhält man aus (18) unmittelbar $N = N_1$, worin sich das Avogadrosche Gesetz ausspricht. Eine strengere Herleitung des Avogadroschen Gesetzes findet man in den Arbeiten von Tait, Maxwell und Boltzmann.

§ 6. **Das Daltonsche Gesetz.** In § 1 von Kapitel IV (auf S. 460) haben wir gesehen, daſs der Druck eines aus mehreren Gasen bestehenden Gemisches gleich der Summe der sogenannten Partialdrucke seiner Bestandteile ist. Dieses Gesetz kann folgendermaſsen erläutert werden. Bei Herleitung der Formel (10) für ein homogenes Gas hatten wir die Summe der geometrischen Zunahmen jener Bewegungsmengen berechnet, welche von den Molekülen beim Stoſse erworben werden. In einem Gemisch aus mehreren Gasen werden die Moleküle irgend eines derselben auf die Gefäſswand in derselben Zahl und mit denselben Geschwindigkeiten auffliegen, als ob die Moleküle der übrigen Gase gar nicht vorhanden wären. Wir sahen, daſs die Zusammenstöſse der Moleküle untereinander auf den seitens des Gases ausgeübten Wanddruck keinen Einfluſs haben können. Hieraus folgt nun auch, daſs der Druck p eines Gemisches gleich der Summe der Partialdrucke $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ ist.

Man kann auch folgende Überlegung anstellen: sei v das Volumen des Gemisches, J die Energie desselben, welche gleich der Summe $J_1 + J_2 + J_3 + \cdots$ der Energien aller Gemengteile ist. Analog der Herleitung von (13) erhält man $pv = \frac{2}{3}(J_1 + J_2 + J_3 + \cdots)$. Nun ist $p_1 v = \frac{2}{3} J_1$, $p_2 v = \frac{2}{3} J_2$ u. s. w., folglich ist $p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ Diese Herleitung fügt zu dem oben Gesagten nichts neues hinzu.

§ 7. **Das Gay-Lussacsche Gesetz.** Daſs der Koeffizient α der Wärmeausdehnung für alle Gase derselbe ist, ergiebt sich direkt aus den Formeln der kinetischen Gastheorie. Nehmen wir an, ein gewisses Gas nehme unter dem Drucke p das Volumen v_0 bei 0^0 und unter demselben Drucke p das Volumen v bei t^0 ein. Dann ist

$$v = v_0(1 + \alpha t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Sind u_0 und u die Geschwindigkeiten der Moleküle bei 0^0 und t^0, so giebt Formel (10) die Relationen

$$pv_0 = \frac{1}{3} Nmu_0^2, \qquad pv = \frac{1}{3} Nmu^2.$$

Vergleicht man dies mit Formel (20), so erhält man

$$u^2 = u_0^2(1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Für ein anderes Gas bezeichnen wir die Masse eines Moleküls mit m_1, die Geschwindigkeiten bei 0^0 und t^0 mit $u_{1,0}$ und u_1 und den Ausdehnungskoeffizienten mit α_1. Nach Analogie von (21) ist dann

$$u_1^2 = u_{1,0}^2 (1 + \alpha_1 t) \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Nach dem in § 6 Gesagten mufs die Wucht der fortschreitenden Bewegungen eines Moleküls des einen Gases bei allen Temperaturen gleich derjenigen des anderen Gases sein, d. h.

$$\frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_{1,0}^2, \qquad \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2.$$

Hieraus folgt $\frac{u^2}{u_0^2} = \frac{u_1^2}{u_{1,0}^2}$; vergleicht man diesen Ausdruck mit (21) und (22), so ist $1 + \alpha t = 1 + \alpha_1 t$, d. h. $\alpha = \alpha_1$, worin sich das Gay-Lussacsche Gesetz ausspricht.

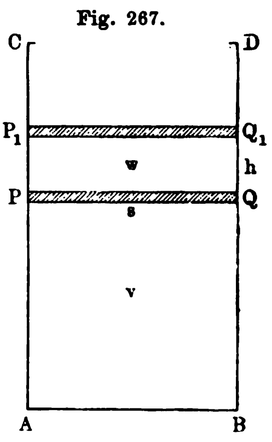
§ 8. **Wärmekapazität der Gase.** Bevor wir in diesem Kapitel weitergehen, haben wir uns zunächst mit der Wärmekapazität der Gase etwas näher bekannt zu machen. Die Wärmekapazität ist im allgemeinen eine Gröfse besonderer Art (sui generis), die für ein gegebenes Gas und diejenigen Umstände, unter denen es sich befindet, charakteristisch ist. Bei einer bestimmten Auswahl der Einheit für die Wärmemenge (Kalorie) und der Einheit der Wärmekapazität (Wasser), wird die Wärmekapazität eines „Körpers" durch diejenige Wärmemenge gemessen, welche dazu erforderlich ist, ihn um 1^0 zu erwärmen, die Wärmekapazität eines Stoffes jedoch — durch diejenige Wärmemenge, welche dazu erforderlich ist, die Gewichtseinheit dieses Stoffes um 1^0 zu erwärmen. Nimmt man an, dafs die idealen Gase keine innere Arbeit leisten (S. 405), so folgt daraus, dafs die von ihnen absorbierte Wärme teils zur Erwärmung des Gases, d. h. zur Erhöhung seiner Temperatur, teils zur Leistung äufserer Arbeit verbraucht wird. Die letztere wird vom Gase geleistet, wenn es sich ausdehnt und dadurch die Körper verdrängt, welche auf dasselbe einen Druck ausüben. Wir setzen voraus, dafs sich dieser Druck während der Ausdehnung in jedem gegebenen Augenblicke nur um eine unendlich kleine Gröfse von der Spannung des Gases unterscheidet.

Wenn das Gas in ein Gefäfs eingeschlossen ist, welches sich nicht ausdehnt, so ist während der Erwärmung des Gases eine äufsere Arbeit überhaupt nicht vorhanden; die Wärme wird ausschliefslich zur Erhöhung der Temperatur T verbraucht, also wenigstens zum Teil zur Erhöhung des Vorrats an kinetischer Energie J der

fortschreitenden Bewegung der Moleküle, wie aus (13) ersichtlich ist. Wir bezeichnen die Wärmekapazität in diesem Falle mit c_v, sie heifst **Wärmekapazität bei konstantem Volumen.** Wenn ein Gas bei konstantem Volumen erwärmt wird, so nimmt seine Spannung p zu.

Nehmen wir jetzt an, dafs das Gas, welches das Volumen v erfüllt, sich unter dem Drucke p befindet, welcher sich bei der Erwärmung nicht ändert; das Gas dehnt sich dann unter dem konstanten äufseren Drucke p frei aus. Ein solcher Fall liegt vor, wenn sich das Gas in einem Cylinder $ABCD$ (Fig. 267) unterhalb eines beweglichen Kolbens PQ befindet. Wir bezeichnen die Wärmekapazität in diesem Falle mit c_p; sie heifst **Wärmekapazität bei konstantem Drucke.** Es ist leicht einzusehen, dafs $c_p > c_v$ ist, denn c_v ist numerisch nur gleich der Wärme, welche zur Erwärmung des Gases verbraucht wird, dagegen ist c_p gleich der Wärme, welche zu **derselben** Erwärmung und aufserdem zum Leisten äufserer Arbeit, die wir mit r bezeichnen wollen verbraucht wird.

Fig. 267.



Sei E das mechanische Wärmeäquivalent und A sein reciproker Wert, d. h. das thermische Arbeitsäquivalent (S. 122). Zum Leisten der Arbeit r ist die Wärmemenge Ar erforderlich; hieraus folgt, dafs

$$c_p = c_v + Ar \quad \ldots\ldots \quad (22, a)$$

ist.

Um die äufsere Arbeit r zu berechnen, welche von der Gewichtseinheit des Gases bei Erwärmung um 1° unter **konstantem** Drucke p geleistet wird, nehmen wir an, das Gas nehme bei $(t + 1)^0$ das Volumen AP_1Q_1B, welches gleich $v + w$ ist, ein. Der Volumenzuwachs sei gleich $w = sh$, wo s die Oberfläche des Kolbens, h die Höhe, um welche er gehoben wurde, bedeutet. Der Druck auf den Kolben ist gleich ps; hieraus folgt für die Arbeit

$$r = psh = pw \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

Das Volumen des Gases ist bei 0° gleich $\frac{v}{1 + \alpha t}$ und bei $(t + 1)^0$

$$\frac{v}{1 + \alpha t}[1 + \alpha(t + 1)] = \frac{v(1 + \alpha t + \alpha)}{1 + \alpha t} = v + \frac{v\alpha}{1 + \alpha t}.$$

Die letztere Gröfse mufs gleich $v + w$ sein, also ist

$$w = \frac{v\alpha}{1 + \alpha t} = \frac{v}{\frac{1}{\alpha} + t} = \frac{v}{273 + t} = \frac{v}{T}.$$

Ferner ergiebt (23)

$$r = \frac{pv}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

oder, da nach der Clapeyronschen Formel $pv = RT$ (S. 431) ist,

$$r = R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Diese interessante Beziehung zeigt, dafs die Konstante der Clapeyronschen Formel numerisch gleich der bei der Ausdehnung des Gases geleisteten Arbeit ist, wenn sich dasselbe bei konstantem äufseren Drucke um 1° erwärmt.

Formel (22) giebt

$$c_p - c_v = AR \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

oder

$$E(c_p - c_v) = R \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

und endlich, vergl. (24)

$$pv = E(c_p - c_v)T \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Allgemein üblich ist die Bezeichnung

$$\frac{c_p}{c_v} = k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Die Gröfse k kann für ein gegebenes Gas unmittelbar aus der Beobachtung der Schallgeschwindigkeit in demselben bestimmt werden, da, wie wir in der Lehre vom Schall sehen werden, die Gröfse k in der Formel für jene Geschwindigkeit enthalten ist. Ferner wird c_p auf experimentellem Wege gefunden und ist es daher bequemer, wenn wir die Gröfse c_v aus unseren Formeln fortschaffen und statt ihrer k einführen.

Wir haben

$$c_p - c_v = c_p - \frac{c_p}{k} = c_p\left(1 - \frac{1}{k}\right) = c_p\frac{k-1}{k} \quad . \quad (30)$$

Anstatt (27) und (28) erhält man dann

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{Rk}{c_p(k-1)} = \frac{pvk}{c_pT(k-1)} \\ pv &= \frac{k-1}{k}c_pTE \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Für Sauerstoff, Stickstoff und Luft ist	$k = 1{,}41$	(32)
„ Wasserstoff	$k = 1{,}41$	
„ Kohlensäure	$k = 1{,}30$	
„ Quecksilberdämpfe	$k = 1{,}67$	
„ Argon und Helium (?)	$k = 1{,}65$	

§ 9. Die Energie eines Gases. In § 1 (auf S. 473) waren drei Bewegungsarten angeführt worden, die in den Gasen vorkommen

können: fortschreitende und Drehungsbewegungen der Moleküle, und intramolekulare oder Atombewegungen. Der vollständige Vorrat an Energie J, welcher in der Volumeneinheit des Gases enthalten ist, besteht somit aus drei Teilen, von denen wir indes die beiden letzteren unter der Bezeichnung molekulare Energie J_m in einen zusammenfassen. Den ersten Teil, die Energie der fortschreitenden Bewegung der Moleküle, bezeichnen wir jetzt mit J_u. Diese Gröfse erhalten wir aus (13, a); es ist danach

$$J_u = \frac{3}{2} p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Um den vollen Energievorrat J, welcher bei der Temperatur T in der Volumeneinheit des Gases enthalten ist, zu bestimmen, nehmen wir an, die Gewichtseinheit des Gases erwärme sich bei konstantem Volumen von der Temperatur des absoluten Nullpunktes, bei welcher $J = 0$ ist, bis auf die Temperatur T. Hierzu wird die Wärmemenge $c_v T$ verbraucht, welche die gesuchte Energiemenge J giebt, wenn man sie mit E multipliziert und durch v dividiert. Es ist also

$$J = \frac{E c_v T}{v} = \frac{E T c_p}{v k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Dividiert man (33) durch (34), so kommt $\frac{J_u}{J} = \frac{3}{2} \frac{p v k}{c_p E T}$. Die zweite der Formeln (31) giebt dann schliefslich

$$\frac{J_u}{J} = \frac{3}{2}(k - 1) = \frac{3}{2} \frac{c_p - c_v}{c_v} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Diese bemerkenswerte Formel stammt von Clausius. Sie zeigt uns, dafs für ein gegebenes Gas die Energie der fortschreitenden Bewegung der Moleküle bei allen Temperaturen den gleichen Teil des gesamten Vorrates an Energie ausmacht. Dasselbe bezieht sich natürlich auch auf die molekulare Energie J_m.

Da $J = J_u + J_m$ ist, so folgt aus Formel (36)

$$\left.\begin{aligned} J_u &= \frac{3}{2}(k - 1) J \\ J_m &= \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - k\right) J \\ \frac{J_m}{J_u} &= \frac{\frac{5}{3} - k}{k - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Diese Formeln zeigen deutlich, in welchem konstanten, d. h. von der Temperatur unabhängigen Verhältnis sich der Gesamtvorrat J der Energie eines Gases zwischen der

Energie J_u der fortschreitenden Bewegung der Moleküle und der molekularen Energie J_m verteilt. Die Formeln (36) führen aufserdem zu einem bemerkenswerten Resultate. Die Energie J_m kann entweder gleich Null sein, oder sie ist eine positive Gröfse; hieraus folgt, dafs k kleiner als $\frac{5}{3}$ oder im äufserten Falle gleich $\frac{5}{3}$ ist. Somit haben wir für k folgende Grenzwerte

$$1 < k \leqslant \frac{5}{3} \qquad (37)$$

Der Grenzwert $k = \frac{5}{3}$ wird für $J_m = 0$ erreicht; man könnte vermuten, dafs sich dieser Grenze die einatomigen Gase nähern, welche gar keine intramolekulare Energie besitzen, für welche somit J_m nur aus der Drehungsenergie der Moleküle bestehen könnte. Zu den einatomigen Gasen gehört der Quecksilberdampf und für diesen haben Kundt und Warburg (1876) in der Tat $k = 1,67$ [vergl. (32)] gefunden.

Die Formeln (36) geben, wenn man für k die Werte aus (32) einsetzt:

	$\frac{J_u}{J}$	$\frac{J_m}{J_u}$
Luft	0,608	0,645
Wasserstoff	0,578	0,731
Kohlensäure	0,458	1,184
Quecksilberdampf	1	0

§ 10. Wahre Geschwindigkeiten der Moleküle. Gesetz von Maxwell. In allen vorhergehenden Herleitungen hatten wir vorausgesetzt, dafs alle Moleküle sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen. In Wirklichkeit müssen die Moleküle jedoch verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, welche sich für ein gegebenes Molekül bei seinen Zusammenstöfsen mit den anderen kontinuierlich ändert.

Clerk Maxwell hat die Frage gelöst, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten sich unter den Molekülen einer gegebenen Gasmenge verteilen. Wir wollen hier blofs das von ihm gefundene Resultat mitteilen. In einem gegebenen Gasvolumen, welches eine sehr grofse Zahl N Moleküle enthält, kommen der Theorie nach alle möglichen Geschwindigkeiten von $u = 0$ bis $u = \infty$ vor. Die Zahl n von Molekülen, deren Geschwindigkeit zwischen u und $u + du$ liegt, hängt von u ab; sie ist grofs für solche Werte von u, welche einem gewissen Mittelwerte nahe liegen und verschwindend klein für diejenigen Geschwindigkeiten u, welche von diesem Mittelwerte bedeutend abweichen. Mit anderen Worten: die Zahl der Moleküle mit sehr geringer oder aber sehr grofser Geschwindigkeit ist verschwindend klein. Maxwell

fand für n folgende Formel

$$n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N (km)^{\frac{3}{2}} e^{-kmu^2} u^2 du \cdot \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Hier bedeutet N die Anzahl aller Moleküle, n die Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeiten zwischen u und $u + du$ enthalten ist; m bedeutet die Masse eines Moleküls. Die Gröfse k hat die im folgenden erläuterte Bedeutung. Sei G^2 der mittlere Wert aller Gröfsen u^2; G heifst dann das mittlere Geschwindigkeitsquadrat. Wenn alle Moleküle die Geschwindigkeit G hätten, so hätte die Energie J_u der fortschreitenden Bewegung denselben Wert, den sie auch in Wirklichkeit besitzt. Mithin ist

$$J_u = \sum \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} NmG^2 \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

Die Gröfse

$$i = \frac{1}{2} mG^2$$

stellt die mittlere Energie der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls dar. Die Gröfse k in Formel (38), deren Sinn wir erläutern wollten, wird durch folgende Gleichung gegeben

$$k = \frac{3}{4i} = \frac{3}{2mG^2} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Das zweimal in (38) vorkommende Produkt km ist somit

$$km = \frac{3}{2G^2} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Es ist übrigens leicht den Ausdruck (41) unmittelbar aus (38) und (39) abzuleiten. Wir wollen zu diesem Zwecke zunächst die Energie J_u des Gases berechnen. Hierzu haben wir die Zahl n der Moleküle mit $\frac{1}{2} mu^2$ zu multiplizieren, um die Energie dieser Gruppe von n Molekülen zu erhalten und hierauf das erhaltene Resultat für alle u von $u = 0$ bis $u = \infty$ zu bilden und zu summieren. Wir erhalten dabei

$$J_u = \frac{2Nm}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-kmu^2} u^4 du \quad \ldots \quad (42)$$

Setzen wir in das Integral $kmu^2 = x^2$ ein, so erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-kmu^2} u^4 du = \frac{1}{(km)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^4 dx.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^4\, dx = \frac{3}{4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi},$$

da das letzte Integral gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist. Schliefslich erhalten wir

$$J_u = \frac{2\,Nm}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{8(km)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\,N}{4\,k}.$$

Vergleicht man dies Resultat mit Formel (39), so erhält man $\frac{3\,N}{4\,k} = \frac{1}{2} Nm\,G^2$ oder $\frac{3}{2\,k\,m} = G^2$, woraus sich dann Formel (41) ergiebt.

Da die Gesamtzahl der Moleküle gleich N ist, so mufs die Summe der Ausdrücke (38) gleich N sein. Und in der That ist sehr leicht zu zeigen, dafs

$$\int_0^\infty \frac{4\,N}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} e^{-kmu^2} u^2\, du = N$$

ist.

Wir wollen nun den Wert der **mittleren Geschwindigkeit** Ω aller Gasmoleküle finden; er ist offenbar gleich

$$\Omega = \frac{\Sigma\, nu}{\Sigma\, n} = \frac{\Sigma\, nu}{N} \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Setzt man hier n aus (38) ein und ersetzt die Summe durch das Integral, so ist

$$\Omega = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-kmu^2} u^3\, du.$$

Führt man die neue Variable $u^2 = x$ ein, so kommt

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-kmx} x\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{k^2 m^2}.$$

Das letztere Integral wird leicht durch teilweise Integration gefunden. Wir haben also

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{km}} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Setzt man den Wert aus (41) ein, so kommt

$$\Omega = G \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = 0{,}9212\ldots G \quad \ldots \quad (45)$$

Es ist dies die sehr bemerkenswerte Relation zwischen der mittleren arithmetischen Geschwindigkeit Ω und der mittleren quadratischen G.

Wir wollen zum Schlufs noch die Gröfse derjenigen Geschwindigkeit U bestimmen, in deren Nähe sich die Werte für die Mehrzahl der Geschwindigkeiten befinden; sie heifst die wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Wir erhalten sie, wenn wir die Bedingung festsetzen, unter welcher der Ausdruck (38) das Maximum seines Wertes erhält. Setzt man die Ableitung von $e^{-kmu^2}u^2$ gleich Null und U statt u, so erhält man

$$e^{-kmU^2}\,2\,U - e^{-kmU^2}\,2\,km\,U^3 = 0,$$

woraus

$$U = \frac{1}{\sqrt{km}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

folgt.

Die Formeln (41) und (44) liefern uns

$$\left.\begin{aligned} G &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,U \\ \Omega &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,U \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Somit ist

$$U < \Omega < G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Wir hatten die Formel (13) $pv = \frac{1}{3}Nmu^2$ und $pv = \frac{2}{3}J$ unter der Voraussetzung abgeleitet, dafs alle Moleküle dieselbe gemeinsame Geschwindigkeit u besitzen. Wenn man aber von der Maxwellschen Formel für die Geschwindigkeitsverteilung unter den Molekülen ausgeht und den Gasdruck auf die Gefäfswand berechnet, so sieht man, dafs die Formel $pv = \frac{2}{3}J$ richtig bleibt und man mit Zuhülfenahme von (39) die folgende Relation erhält:

$$pv = \frac{2}{3}\,J = \frac{1}{3}\,Nm\,G^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Somit hat man in den Formeln (1), (10) und (13) an Stelle von u nicht die mittlere arithmetische Geschwindigkeit Ω, sondern die mittlere quadratische Geschwindigkeit G zu setzen.

Führt man Ω ein [vergl. (45)], so ist

$$pv = \frac{\pi}{8}\,Nm\,\Omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Formel (16) behält ihre Geltung für G und wir erhalten

und nach (45)

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{485 \text{ Meter}}{\sqrt{\delta} \text{ Sekunden}} \\ \Omega &= \frac{447 \text{ Meter}}{\sqrt{\delta} \text{ Sekunden}} \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Die mittlere arithmetische und die mittlere quadratische Geschwindigkeit sind indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte δ des Gases. Bei 0° erhält man

für Sauerstoff . . .	$G = 461$ m	$\Omega = 425$ m	$U = 410$ m
„ Wasserstoff . .	$G = 1843$ m	$\Omega = 1698$ m	$U = 1640$ m

Formel (21), in welcher man G anstatt u zu setzen hat, und (45) zeigen, dafs

$$\left.\begin{aligned} G &= G_0 \sqrt{1 + \alpha t} \\ \Omega &= \Omega_0 \sqrt{1 + \alpha t} \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

ist, wenn sich G_0 und Ω_0 auf 0° beziehen.

§ 11. Die Geschwindigkeit chemisch reagierender Moleküle. M. Cantor hat (1897) in scharfsinniger Weise die mittlere Geschwindigkeit v derjenigen Chlormoleküle, welche von einer Kupferoberfläche absorbiert werden, bestimmt. Diese Moleküle werden nicht reflektiert, daher ist der von diesen Molekülen auf eine Kupferfläche ausgeübte Druck geringer als derjenige Druck, welchen sie bei Reflexion von einem indifferenten Körper ausüben würden. Sei p der Druck, welchen das Chlor auf die Oberfläche eines indifferenten Körpers ausübt, p' der Druck desselben auf eine Kupferfläche, dann ist

$$p' = p - \frac{2\mu v}{3} \qquad (52, \text{a})$$

wo μ die Masse des Chlors ist, welches in einer Sekunde von einem Quadratcentimeter der Kupferfläche absorbiert worden ist; p' und p sind in Dynen pro Quadratcentimeter ausgedrückt. Durch Messung von μ und $p - p'$ konnte Cantor die Gröfse v bestimmen. Die Gröfse μ wurde durch die Gewichtszunahme einer kleinen Kupferplatte, welche im Chlor hing, bestimmt. Hierauf wurde ein kleines vertikales Glasplättchen bifilar aufgehängt, dessen linke vordere und rechte hintere Seite mit Kupfer bedeckt waren. Als die Luft, welche das Plättchen umgab, durch Chlor ersetzt wurde, drehte es sich, wobei die mit Kupfer bedeckten Flächen voran gingen. Aus der Gröfse der Drehung des Plättchens konnte man die Druckdifferenz $p - p'$ bestimmen. Es war $\mu = \frac{1}{3}\, 10^{-6}\,\text{g}$; $p - p' = 10{,}7 \cdot 10^{-4}\, \frac{\text{Dynen}}{\text{qcm}}$ für einen, $p - p'$

$= 17{,}6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Dynen}}{\text{qcm}}$ für einen anderen Apparat, woraus sich $v = 48 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $v = 79{,}2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ergab. Durch diese Versuche ist zuerst ein experimenteller Beweis für die Richtigkeit der Grundvorstellungen der kinetischen Gastheorie erbracht worden.

§ 12. **Mittlere Weglänge.** Die Weglänge l, welche ein Molekül in der Zeit zwischen zwei Zusammenstöfsen mit anderen Molekülen zurücklegt, mufs offenbar eine Gröfse sein, die für ein gegebenes Gas zwischen weiten Grenzen schwankt. Bisweilen legt ein Molekül, nachdem es mit einem anderen zusammengetroffen, einen weiten Weg zurück und trifft auf demselben zufälliger Weise kein anderes Molekül; bisweilen folgt auf den einen Zusammenstofs sogleich ein zweiter. Alles dies hängt vom Zufall ab. Aber überall, wo man es mit einer sehr grofsen Zahl von Ereignissen zu thun hat, entspringen aus der scheinbaren Zufälligkeit genaue Gesetze.

Im Verlaufe einer Sekunde erfolgen in einem Kubikcentimeter Luft unzählig viele Zusammenstöfse der Gasmoleküle; noch gröfser aber ist die Zahl der verschiedenen Weglängen, welche zwischen zwei Zusammenstöfsen zurückgelegt werden. Das Mittel aus allen diesen Weglängen l wollen wir mit L bezeichnen und die mittlere Weglänge der Moleküle (zwischen zwei Zusammenstöfsen) nennen. Diese Gröfse darf nur von der Dichtigkeit in der Verteilung der Moleküle, d. h. von dem Grade der Kompression oder von der Spannung des Gases und von den Dimensionen der Moleküle abhängen. Je stärker ein Gas komprimiert ist und je gröfser die Dimensionen der Moleküle sind, um so häufiger müssen sie sich begegnen und um so kleiner mufs die mittlere Weglänge L sein.

Unter der Voraussetzung, dafs sich alle Moleküle mit derselben Geschwindigkeit bewegen, hat Clausius folgende Formel für die mittlere Weglänge L gefunden

$$L = \frac{3}{4} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2} \quad \text{. . . . .} \quad (53)$$

wo λ der mittlere Abstand der Molekülzentren voneinander ist, also λ^3 derjenige Raum, auf welchen im Mittel ein Molekül kommt. Ist N die Zahl der Moleküle im Volumen v, so ist

$$v = N \lambda^3 \quad \text{. . . . .} \quad (54)$$

Die Gröfse ϱ ist dem Abstande der Mittelpunkte zweier Moleküle im Augenblicke des Zusammenstofses gleich, also gleich dem geringsten Abstande, bis zu welchem sich diese Mittelpunkte einander nähern können. Die Gröfse $r = \varrho : 2$ kann man demnach in gewissem Sinne

als Radius eines Moleküls betrachten. Führt man r in Formel (53) ein, so erhält man aus dem Ausdrucke für L folgende Proportion

$$\frac{L}{\frac{1}{4}r} = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{N\lambda^3}{\frac{4}{3}N\pi r^3} = \frac{v}{v'} \quad \cdots \cdots (55)$$

da $N\lambda^3 = v$ ist; ferner kann man $\frac{4}{3}\pi r^3$ das Molekülvolumen nennen; daher ist dann $\frac{4}{3}N\pi r^3$ gleich dem Volumen v', welches gewissermafsen faktisch von den Molekülen eingenommen wird. Man erhält dann folgendes Resultat: Die mittlere Weglänge ist sovielmal gröfser als ein Viertel des Molekülradius, als das vom Gase eingenommene Volumen v gröfser ist als das von den Molekülen eingenommene Volumen v'.

Da v indirekt proportional der Spannung p ist, v und v' jedoch von p nicht abhängen, so ist die mittlere freie Weglänge indirekt proportional der Spannung des Gases oder seiner (auf Wasser bezogenen) Dichte D.

Zieht man das Maxwell'sche Gesetz über die Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Gasmolekülen in Betracht, so erhält man für L einen von (53) etwas verschiedenen Ausdruck, nämlich

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2} \cdot \cdots \cdots (56)$$

Anstatt $\frac{3}{4} = 0{,}75$ erhält man $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$

Bei Ableitung der Formeln (53) und (56) wird vorausgesetzt, dafs ϱ sehr klein gegen L ist, d. h. dafs v' sehr klein im Vergleich zu v ist. Macht man diese Voraussetzung nicht, so erhält man die genauere Formel

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2} - \frac{2}{3}\varrho \cdot \cdots \cdots (57)$$

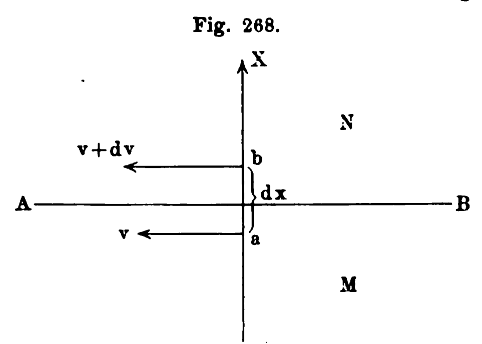
Da λ und ϱ unbekannt sind, so ist es auch nicht möglich, aus den vorhergehenden Formeln L zu finden. Führt man in (56) den Molekülradius $r = \varrho : 2$ ein und nimmt an, in der Volumeneinheit seien n Moleküle enthalten, so ist $n\lambda^3 = 1$, also $\lambda^3 = 1 : n$; Formel (56) giebt uns $L = \frac{1}{4\sqrt{2}\, n\pi r^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}\, Q}$. Die Gröfse $Q = n\pi r^2$ ist die Summe des Flächeninhaltes der Querschnitte aller Moleküle, welche in der Volumeneinheit des Gases enthalten sind. Die letzte Formel giebt

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\, L} \cdot \cdots \cdots (58)$$

Diese bemerkenswerte Formel stellt den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt Q und der mittleren freien Weglänge L her.

§ 13. Innere Reibung der Gase. Wenn sich zwei einander berührende Schichten M und N (Fig. 268) irgend eines Stoffes parallel zu ihrer geometrischen Trennungsfläche (Berührungsfläche) mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, so entsteht eine Wechselwirkung zwischen diesen Schichten. Auf die schneller bewegte Schicht wirkt eine gewisse Kraft f ein, welche der Bewegung entgegenwirkt, d. h. eine verzögernde Kraft, auf die sich langsamer bewegende Schicht aber eine ebensolche die Bewegung beschleunigende Kraft. Wir wollen die Kraft f auf eine bestimmte Berührungsfläche s der Schichten beziehen; offenbar ist f proportional s. Ferner mufs f um so gröfser sein, je gröfser die Differenz der Geschwindigkeiten beider Schichten ist. Ziehen wir die X-Achse senkrecht zur Oberfläche s, und sei v die Geschwindigkeit des Punktes a der einen, $v + dv$ die Geschwindigkeit des Punktes b der anderen Gasschicht; der Abstand beider Punkte sei $ab = dx$. Die Kraft f ist proportional der Verminderung von v, welche man beobachtet, wenn man in Gedanken längs der x-Achse weiter schreitet, also proportional der Ableitung $\frac{dv}{dx}$, welche man erhält, wenn man die Geschwindigkeiten v der Schichten als Funktionen der x-Koordinate, d. h. ihres Abstandes von irgend einer Anfangsebene betrachtet. Somit erhält man

Fig. 268.



$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Die Gröfse η heifst der Koeffizient der inneren Reibung oder Viskosität eines Gases. Es ist dies eine Gröfse sui generis, welche für ein gegebenes Gas charakteristisch ist. Sie ist numerisch gleich derjenigen Kraft, welche auf die Oberflächeneinheit der Schicht wirkt ($s = 1$), wenn sich die Geschwindigkeit auf die senkrecht zu den Schichten genommene Einheit der Länge um Eins ändert $\left(\frac{dv}{dx} = 1\right)$. Als Einheit der Viskosität ($\eta = 1$) ist hierbei die Viskosität eines solchen Stoffes angenommen, bei welchem auf die Oberflächeneinheit des Stoffes ($s = 1$) die Krafteinheit ($f = 1$) unter der erwähnten Be-

dingung, dafs $\frac{dv}{dx} = 1$ ist, einwirkt. Es ist demnach auch nicht schwer, die C. G. S.-Einheit der Viskosität zu definieren (f = einer Dyne pro $s = 1$ qcm, wenn auf jeden Centimeter die Geschwindigkeit sich um 1 cm pro Sekunde ändert).

Das Zustandekommen einer Reibung in Gasen kann man sich folgendermafsen erklären. Bei ihren Bewegungen nach allen möglichen Richtungen gelangen die Moleküle der Schicht M in die Schicht N hinein, wo sie Molekülen begegnen, deren Geschwindigkeit $v + dv$ parallel zur Ebene AB gröfser ist, als ihre eigene Geschwindigkeit v in dieser Richtung. Bei Zusammenstöfsen werden sie offenbar verzögernd auf die Bewegung der Schicht N einwirken. Umgekehrt werden die Moleküle, welche von N nach M geraten, die Geschwindigkeit vergröfsern müssen, mit welcher sich die in M enthaltenen Moleküle parallel zu AB bewegen. Durch Rechnung findet man für η folgenden Ausdruck

$$\eta = \frac{1}{3} n m L \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Hier ist n die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, m die Masse eines Moleküls, L die mittlere Weglänge (§ 12) und Ω die mittlere Bewegungsgeschwindigkeit der Moleküle. Anstatt $\frac{1}{3}$ finden einige Forscher $\frac{\pi}{8}$ oder auch $\frac{1}{\pi} = 0,318$. Setzt man (56) in (60) ein und bedenkt, dafs $n\lambda^3 = 1$ ist, so erhält man

$$\eta = \frac{m\Omega}{3\sqrt{2}\pi\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

wo ϱ den Moleküldurchmesser bedeutet. Die Gröfsen m, ϱ und Ω hängen blofs von der Art des Gases und seiner Temperatur, nicht aber von seiner Spannung, also von seiner Dichte D ab. Hieraus folgt dann das wichtige Maxwellsche Gesetz:

Die innere Reibung eines gegebenen Gases ist von seiner Dichte D unabhängig, sie ist also die gleiche für ein im verdichteten, wie für ein im verdünnten Zustande befindliches Gas. Das scheinbar Paradoxe in obigem Gesetze erklärt sich damit, dafs bei Verdoppelung der Dichte zwar die doppelte Zahl von Molekülen aus einer Schicht in die andere übertreten wird, diese aber nur halb so tief in die betreffende Schicht eindringen werden, wodurch dann der Einflufs, den die Vermehrung der Moleküle hervorgerufen hatte, wieder aufgehoben wird.

G. Jäger hat (1900) gezeigt, dafs, wenn man die Gröfse der Moleküle nicht mehr gegen die mittlere Weglänge vernachlässigen kann, für η ein Ausdruck von der Form

$$\eta = \eta_0 \left\{1 + \frac{11}{2} \frac{b}{v}\right\}$$

erhalten wird. Hier entspricht η_0 dem gewöhnlichen Werte (bei Vernachlässigung des Molekularvolumens), während b die Konstante der van der Waalsschen Formel, v das Volumen ist.

Der Koeffizient η kann experimentell durch Beobachtung des logarithmischen Dekrements (S. 158) der Schwingungen eines Körpers gefunden werden, der sich im gegebenen Gase befindet. Man befestigt zu diesem Zwecke z. B. den Mittelpunkt eines runden horizontalen Scheibchens an einem Faden, um welchen es sich, wie um eine Achse, drehen kann. Ferner wird η durch die Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas durch sehr enge Röhren strömt, bestimmt. Die Versuche bestätigen vollkommen den Satz, daſs η in weiten Grenzen von p oder D unabhängig ist; bei sehr geringen und sehr hohen Drucken jedoch verliert das Maxwellsche Gesetz seine Gültigkeit.

Die Formeln (60) und (52) zeigen, daſs η von der Temperatur abhängt und daſs, wenn man den Wert der Viskosität für 0^0 mit η_0 bezeichnet, für t^0 folgender Ausdruck gilt

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Für die Versuchsresultate sind folgende empirische Formeln aufgestellt worden:

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n, \; \eta = \eta_0 (1 + \beta t), \; \eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} (1 + \gamma t)^2,$$

wo n, α, β und γ Konstante sind. Breitenbach findet (1899), daſs man η in der Form $\eta = C T^n$ darstellen kann, wo C eine Konstante, T die absolute Temperatur und n eine zwischen 0,6 und 1 enthaltene Zahl bedeutet, die sich bei Zunahme der Temperatur ein wenig vermindert. (In der betreffenden Arbeit von Breitenbach findet sich auch die gesamte Litteratur, welche sich auf die Bestimmung des Koeffizienten η bezieht). Nach der Theorie von Sutherland ist η von der Form

$$\eta = \frac{A T^{\frac{3}{2}}}{T + C},$$

wo A und C Konstante sind. In einer späteren Arbeit (1901) zeigte Breitenbach, daſs die Resultate seiner Messungen mit dieser Formel im Einklang stehen.

Puluj hat eine recht komplizierte Formel gegeben, nach der man den Koeffizienten η für ein Gemisch von zwei Gasen bestimmen kann, wenn η_1 und η_2 für die betreffenden Gase bekannt sind; man erhält jedoch nach dieser Formel zu kleine Werte.

Aus den Versuchen hat man für η in C. G. S.-Einheiten folgende numerische Werte erhalten:

	20°	180°
Wasserstoff . . .	0,000 092	0,000 123
Sauerstoff	0,000 212	0,000 281
Stickstoff	0,000 184	0,000 240
Kohlensäure . . .	0,000 161	0,000 215

Noyes und Goodwin geben für H_2, CO_2 und Quecksilberdampf bei 357° folgende Verhältnisse

$$\frac{\eta(Hg)}{\eta(CO_2)} = 2{,}08; \qquad \frac{\eta(Hg)}{\eta H_2} = 4{,}04.$$

Ch. Fabry und A. Perot finden für Luft $\eta = 0{,}000\,173$. Wenn eine Schicht wärmeren und leichteren Gases an der Oberfläche einer Schicht kälteren und schwereren Gases dahingleitet, so müssen, wie Helmholtz gezeigt hat, an der Oberfläche der unteren Schicht Wellen entstehen, ähnlich wie die an einer Wasserfläche durch den Wind hervorgerufenen. Ebensolche Gaswellen müssen sich unter den erwähnten Bedingungen auch in der Atmosphäre bilden. Die Länge dieser Wellen (die man, wie immer quer zu den Wellen, letztere im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnet, rechnet) mufs eine sehr bedeutende sein. Bewegt sich z. B. die obere Schicht über der unteren mit einer Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde dahin, und ist die Temperatur der oberen Schicht um 10° höher, so beträgt die Wellenlänge etwa 550 m. Emden gelang es auf einer Ballonfahrt, solche Wellenlängen in den sogenannten Wogenwolken zu beobachten. Scheiner erklärt die Granulationen der Sonnenoberfläche durch Bildung ähnlicher Wogenwolken an der Grenze zwischen der Chromosphäre und Photosphäre der Sonne.

§ 14. **Die Gröfse der mittleren Weglänge.** Kennt man η, so kann man nach Formel (60) auch die mittlere Weglänge L der Gasmoleküle berechnen. Das Produkt nm ist gleich der Masse eines Kubikcentimeters des Gases; bei 0° und 760 mm Druck ist nm für Luft gleich 0,001 29 g, folglich ist für ein beliebiges Gas $nm = 0{,}00129\,\delta$, wo δ, wie immer, die auf Luft bezogene Gasdichte bezeichnet. Ferner hatten wir [vergl. (51)]

$$\Omega = \frac{44700}{\sqrt{\delta}}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Formel (60) giebt, wenn man anstatt $\frac{1}{3}$ den Faktor $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ (vergl. S. 498) setzt,

$$L = \frac{\eta}{0{,}318\,nm\,\Omega} = \frac{\eta\sqrt{\delta}}{0{,}318 \times 0{,}001\,29\,\delta \times 44700}\,\text{cm}$$

oder schliefslich

$$L = \frac{\eta}{19{,}6\sqrt{\delta}} \text{ cm.}$$

Für Luft ist $\eta = 0{,}000\,175$, $\delta = 1$ und folglich

$$L = 0{,}000\,009 \text{ cm} = 0{,}000\,09 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Somit ist die mittlere Weglänge ungefähr gleich ein Zehntausendstel Millimeter. Die Anzahl ν der Zusammenstöfse, welche pro Sekunde unter den Molekülen stattfinden, erhält man, wenn man die mittlere Geschwindigkeit Ω durch die mittlere Weglänge L dividiert

$$\nu = \frac{\Omega}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Für Luft ist

$$\nu = \frac{44\,700}{0{,}000\,009} = 4980 \text{ Millionen.}$$

Endlich setzt uns (58) in den Stand die Summe Q der Flächeninhalte für die Querschnitte der Moleküle zu finden, welche in 1 ccm des Gases enthalten sind:

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\,L} = \frac{19{,}6}{4\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\delta}}{\eta} = \frac{4{,}9}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\delta}}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Setzt man hier den für Luft gefundenen Wert von L ein, so erhält man den erstaunlich grofsen Wert $Q = 18\,500$ qcm $= 1{,}85$ qm.

Es mögen hier einige Werte für L, ν und Q (bezogen auf 760 mm Druck und ungefähr 20°) folgen:

	L	ν	Q
	cm	Millionen	qcm
Wasserstoff	0,000 018 5	9480	8 500
Stickstoff	0,000 009 9	4760	17 900
Sauerstoff	0,000 010 6	4065	16 700
Kohlensäure	0,000 006 8	5510	26 000

Im dritten Bande werden wir uns mit einer anderen Methode zur Bestimmung der Gröfse L bekannt machen, welche auf Messung der Wärmeleitung des Gases beruht.

§ 15. Dimensionen und Anzahl der Moleküle. Es existiert gegenwärtig eine ganze Reihe von Methoden, die Dimensionen der Moleküle angenähert zu bestimmen. Einige von diesen Methoden stützen sich auf Formeln der kinetischen Gastheorie, andere ergeben sich wiederum aus den Erscheinungen der Elektrolyse, den optischen, elektrostatischen Erscheinungen u. s. w. Es möge hier auf zwei Methoden hingewiesen werden.

Die Formel (56) kann man in analoger Weise umformen, wie wir

aus (53) die Formel (55) hergeleitet hatten, indem man mit N die Zahl der Moleküle im Volumen v ($N\lambda^3 = v$) und mit $v' = \frac{4}{3} N\pi \left(\frac{\varrho}{2}\right)^3$ das von den Molekülen eingenommene Volumen bezeichnet. Es ist

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2} = \frac{N\lambda^3 \varrho}{6\sqrt{2}\,\frac{4}{3}\,N\pi \left(\frac{\varrho}{2}\right)^3} = \frac{\varrho\, v}{6 v' \sqrt{2}}.$$

Führt man die Gröfse

$$w = \frac{v'}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

ein, so erhält man für den Durchmesser ϱ eines Moleküls den Ausdruck

$$\varrho = 6\sqrt{2}\, w L \quad \ldots \ldots \quad (67)$$

Ist ein Gas in den flüssigen Zustand übergeführt, so übertrifft das Volumen der erhaltenen Flüssigkeit aller Wahrscheinlichkeit nach die Gröfse v' nur um ein Geringes, daher ist w nicht gröfser als das Verhältnis der Dichte des Stoffes im Gaszustande zur Dichte desselben Stoffes im flüssigen Zustande. Die Dichte des flüssigen Sauerstoffes ist z. B. ungefähr gleich 0,9, die Dichte des gasförmigen Sauerstoffes bei 0° und 760 mm Druck ist gleich 0,001 43; hieraus folgt $w = 0{,}0016$. Setzt man $L = 0{,}000\,01$ cm, so ist

$$\varrho = 6\sqrt{2} \times 0{,}0016 \times 0{,}000\,01 \text{ cm} = 1{,}3 \,.\, 10^{-6} \text{ mm}.$$

Somit beträgt die obere Grenze für den Durchmesser eines Sauerstoffmoleküls ungefähr ein Milliontel Millimeter.

Ein anderer Weg zur Bestimmung von ϱ besteht darin, dafs man die Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze nach der Formel von van der Waals (S. 433) bestimmt. Die Gröfse b hängt von dem von den Gasmolekülen eingenommenen Volumen v' in einfacher Weise ab. Wir sahen, dafs nach van der Waals $b = 4v'$, nach O. E. Meyer $b = 4\sqrt{2}\, v'$ ist. Man kann also v', folglich auch w berechnen, wenn man b bestimmt. Es möge hier nur das Resultat mitgeteilt werden: Für Luft erhält man angenähert $\varrho = 0{,}3$ Milliontel Millimeter, was mit dem Vorhergehenden ziemlich gut übereinstimmt. Andere Methoden zur Bestimmung von w gehen auf die Formel

$$w = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{K - 1}{K + 2} \quad \ldots \ldots \quad (67, a)$$

zurück; hier bedeutet n den Brechungsexponenten von Strahlen von grofser Wellenlänge. K die Dielektrizitätskonstante, mit der wir uns zunächst im II. Bande, und hernach eingehender im IV. Bande bekannt machen werden. Ausführlicheres wird über die Formel (67, a) im II. Bande mitgeteilt werden. Wendet man (67, a) auf Luft an, so kommt $\varrho = 0{,}5 \,.\, 10^{-6}$ mm. Offenbar ist also der Durchmesser

eines Moleküls eine Gröfse, deren Ordnung durch einige Zehnmilliontel eines Millimeters bestimmt wird.

In § 14 sahen wir, wie die Gröfse $Q = n\pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$ bestimmt wird, wo n die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit bedeutet. Wir erhalten hieraus

$$n = \frac{4Q}{\pi\varrho^2} \quad \text{. . . . . (68)}$$

Setzt man für den Sauerstoff $Q = 16\,700$ qcm und $\varrho = 0{,}3 \,.\, 10^{-6}$ mm ein, so erhält man

$$n = 2 \,.\, 10^{19} = 20 \,.\, 10^{18} \quad \text{. . . . . . (69)}$$

In einem Kubikcentimeter Luft oder (nach dem Avogadroschen Gesetze) auch eines anderen Gases sind bei 0° und 760 mm Druck ungefähr 20 Trillionen Moleküle enthalten.

Hieraus erhält man für die Zahl N der Moleküle in einem Gramm-Molekül Gas (z. B. in 2 g Wasserstoff)

$$N = 4{,}5 \,.\, 10^{23} \quad \text{. . . . . (70)}$$

O. E. Meyer giebt die Zahl $N = 6{,}4 \,.\, 10^{23}$ an.

Die Gleichung $n\lambda^3 = 1$ giebt für den mittleren Abstand λ der Moleküle voneinander einen Wert:

λ zwischen 3 und 4 Millionstel Millimeter.

Würde man die in einem Kubikcentimeter Luft enthaltenen Moleküle aneinander reihen, so erhielte man einen Faden, dessen Länge 50 mal die Länge des Erdäquators übertrifft. Die Gröfse eines Moleküls verhält sich zur Gröfse eines gewöhnlichen gröfseren Schrotkorns wie beispielsweise 1 cbcm zur Gröfse der Erdkugel.

Wir haben in diesem Kapitel nur die wichtigsten Umrisse jenes umfangreichen und stattlichen Gebäudes kennen gelernt, welches man unter dem Namen der kinetischen Gastheorie versteht. Im folgenden werden wir uns wiederholt auf die Sätze berufen, die hier auseinandergesetzt und abgeleitet worden sind.

Litteratur.

Kinetische Gastheorie.

Dan. Bernouilli: Hydrodynamica. 1738. Vergl. Pogg. Ann. **107**, 490, 1859.

Herapath: Annals of philosophy, New series, Vol. I, p. 273, 340, 401, 1821.

Joule: Phil. Mag. (4) **14**, 211, 1857.

A. Kroenig: Pogg. Ann. **99**, 315, 1856.

Clausius: Pogg. Ann. **100**, 353, 1857; **105**, 239, 1858; **115**, 1, 1862. Phil. Mag. (4) **14**, 108; **17**, 81; **23**, 417 und 512, 1862.

als **Radius eines Moleküls** betrachten. Führt man r in Formel (53) ein, so erhält man aus dem Ausdrucke für L folgende Proportion

$$\frac{L}{\frac{1}{4}r} = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{N\lambda^3}{\frac{4}{3}N\pi r^3} = \frac{v}{v'} \quad \dots \dots \quad (55)$$

da $N\lambda^3 = v$ ist; ferner kann man $\frac{4}{3}\pi r^3$ das **Molekülvolumen** nennen; daher ist dann $\frac{4}{3}N\pi r^3$ gleich dem Volumen v', welches gewissermafsen faktisch von den Molekülen eingenommen wird. Man erhält dann folgendes Resultat: **Die mittlere Weglänge ist sovielmal gröfser als ein Viertel des Molekülradius, als das vom Gase eingenommene Volumen v gröfser ist als das von den Molekülen eingenommene Volumen v'.**

Da v indirekt proportional der Spannung p ist, v und v' jedoch von p nicht abhängen, so ist **die mittlere freie Weglänge indirekt proportional der Spannung des Gases oder seiner (auf Wasser bezogenen) Dichte D.**

Zieht man das **Maxwell'sche** Gesetz über die Verteilung der Geschwindigkeiten unter den Gasmolekülen in Betracht, so erhält man für L einen von (53) etwas verschiedenen Ausdruck, nämlich

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^3}{\pi\varrho^2} \quad \dots \dots \dots \quad (56)$$

Anstatt $\frac{3}{4} = 0{,}75$ erhält man $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\dots$

Bei Ableitung der Formeln (53) und (56) wird vorausgesetzt, dafs ϱ sehr klein gegen L ist, d. h. dafs v' sehr klein im Vergleich zu v ist. Macht man diese Voraussetzung nicht, so erhält man die genauere Formel

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^3}{\pi\varrho^2} - \frac{2}{3}\varrho \quad \dots \dots \dots \quad (57)$$

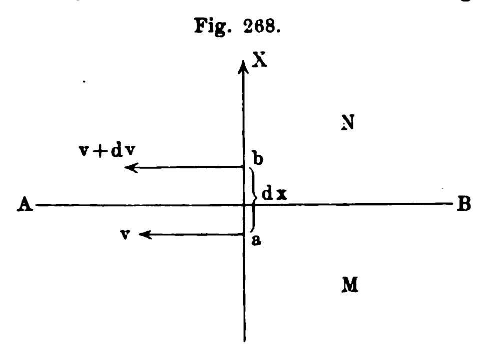
Da λ und ϱ unbekannt sind, so ist es auch nicht möglich, aus den vorhergehenden Formeln L zu finden. Führt man in (56) den Molekülradius $r = \varrho : 2$ ein und nimmt an, in der Volumeneinheit seien n Moleküle enthalten, so ist $n\lambda^3 = 1$, also $\lambda^3 = 1 : n$; Formel (56) giebt uns $L = \frac{1}{4\sqrt{2}\,n\pi r^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}\,Q}$. Die Gröfse $Q = n\pi r^2$ ist die **Summe des Flächeninhaltes der Querschnitte aller Moleküle, welche in der Volumeneinheit des Gases enthalten sind.** Die letzte Formel giebt

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\,L} \quad \dots \dots \dots \quad (58)$$

Diese bemerkenswerte Formel stellt den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt Q und der mittleren freien Weglänge L her.

§ 13. Innere Reibung der Gase. Wenn sich zwei einander berührende Schichten M und N (Fig. 268) irgend eines Stoffes parallel zu ihrer geometrischen Trennungsfläche (Berührungsfläche) mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, so entsteht eine Wechselwirkung zwischen diesen Schichten. Auf die schneller bewegte Schicht wirkt eine gewisse Kraft f ein, welche der Bewegung entgegenwirkt, d. h. eine verzögernde Kraft, auf die sich langsamer bewegende Schicht aber eine ebensolche die Bewegung beschleunigende Kraft. Wir wollen die Kraft f auf eine bestimmte Berührungsfläche s der Schichten beziehen; offenbar ist f proportional s. Ferner mufs f um so gröfser sein, je gröfser die Differenz der Geschwindigkeiten beider Schichten ist. Ziehen wir die X-Achse senkrecht zur Oberfläche s, und sei v die Geschwindigkeit des Punktes a der einen, $v + dv$ die Geschwindigkeit des Punktes b der anderen Gasschicht; der Abstand beider Punkte sei $ab = dx$. Die Kraft f ist proportional der Verminderung von v, welche man beobachtet, wenn man in Gedanken längs der x-Achse weiter schreitet, also proportional der Ableitung $\frac{dv}{dx}$, welche man erhält, wenn man die Geschwindigkeiten v der Schichten als Funktionen der x-Koordinate, d. h. ihres Abstandes von irgend einer Anfangsebene betrachtet. Somit erhält man

Fig. 268.



$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

Die Gröfse η heifst der Koeffizient der inneren Reibung oder Viskosität eines Gases. Es ist dies eine Gröfse sui generis, welche für ein gegebenes Gas charakteristisch ist. Sie ist numerisch gleich derjenigen Kraft, welche auf die Oberflächeneinheit der Schicht wirkt ($s = 1$), wenn sich die Geschwindigkeit auf die senkrecht zu den Schichten genommene Einheit der Länge um Eins ändert $\left(\frac{dv}{dx} = 1\right)$. Als Einheit der Viskosität ($\eta = 1$) ist hierbei die Viskosität eines solchen Stoffes angenommen, bei welchem auf die Oberflächeneinheit des Stoffes ($s = 1$) die Krafteinheit ($f = 1$) unter der erwähnten Be-

dingung, dafs $\frac{dv}{dx} = 1$ ist, einwirkt. Es ist demnach auch nicht schwer, die C. G. S.-Einheit der Viskosität zu definieren ($f =$ einer Dyne pro $s = 1$ qcm, wenn auf jeden Centimeter die Geschwindigkeit sich um 1 cm pro Sekunde ändert).

Das Zustandekommen einer Reibung in Gasen kann man sich folgendermafsen erklären. Bei ihren Bewegungen nach allen möglichen Richtungen gelangen die Moleküle der Schicht M in die Schicht N hinein, wo sie Molekülen begegnen, deren Geschwindigkeit $v + dv$ parallel zur Ebene AB gröfser ist, als ihre eigene Geschwindigkeit v in dieser Richtung. Bei Zusammenstöfsen werden sie offenbar verzögernd auf die Bewegung der Schicht N einwirken. Umgekehrt werden die Moleküle, welche von N nach M geraten, die Geschwindigkeit vergröfsern müssen, mit welcher sich die in M enthaltenen Moleküle parallel zu AB bewegen. Durch Rechnung findet man für η folgenden Ausdruck

$$\eta = \frac{1}{3} nmL\Omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

Hier ist n die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, m die Masse eines Moleküls, L die mittlere Weglänge (§ 12) und Ω die mittlere Bewegungsgeschwindigkeit der Moleküle. Anstatt $\frac{1}{3}$ finden einige Forscher $\frac{\pi}{8}$ oder auch $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$. Setzt man (56) in (60) ein und bedenkt, dafs $n\lambda^3 = 1$ ist, so erhält man

$$\eta = \frac{m\Omega}{3\sqrt{2}\pi\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

wo ϱ den Moleküldurchmesser bedeutet. Die Gröfsen m, ϱ und Ω hängen blofs von der Art des Gases und seiner Temperatur, nicht aber von seiner Spannung, also von seiner Dichte D ab. Hieraus folgt dann das wichtige Maxwellsche Gesetz:

Die innere Reibung eines gegebenen Gases ist von seiner Dichte D unabhängig, sie ist also die gleiche für ein im verdichteten, wie für ein im verdünnten Zustande befindliches Gas. Das scheinbar Paradoxe in obigem Gesetze erklärt sich damit, dafs bei Verdoppelung der Dichte zwar die doppelte Zahl von Molekülen aus einer Schicht in die andere übertreten wird, diese aber nur halb so tief in die betreffende Schicht eindringen werden, wodurch dann der Einflufs, den die Vermehrung der Moleküle hervorgerufen hatte, wieder aufgehoben wird.

G. Jäger hat (1900) gezeigt, dafs, wenn man die Gröfse der Moleküle nicht mehr gegen die mittlere Weglänge vernachlässigen kann, für η ein Ausdruck von der Form

$$\eta = \eta_0 \left\{ 1 + \frac{11}{2} \frac{b}{v} \right\}$$

erhalten wird. Hier entspricht η_0 dem gewöhnlichen Werte (bei Vernachlässigung des Molekularvolumens), während b die Konstante der van der Waalsschen Formel, v das Volumen ist.

Der Koeffizient η kann experimentell durch Beobachtung des logarithmischen Dekrements (S. 158) der Schwingungen eines Körpers gefunden werden, der sich im gegebenen Gase befindet. Man befestigt zu diesem Zwecke z. B. den Mittelpunkt eines runden horizontalen Scheibchens an einem Faden, um welchen es sich, wie um eine Achse, drehen kann. Ferner wird η durch die Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas durch sehr enge Röhren strömt, bestimmt. Die Versuche bestätigen vollkommen den Satz, dafs η in weiten Grenzen von p oder D unabhängig ist; bei sehr geringen und sehr hohen Drucken jedoch verliert das Maxwellsche Gesetz seine Gültigkeit.

Die Formeln (60) und (52) zeigen, dafs η von der Temperatur abhängt und dafs, wenn man den Wert der Viskosität für 0° mit η_0 bezeichnet, für t^0 folgender Ausdruck gilt

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Für die Versuchsresultate sind folgende empirische Formeln aufgestellt worden:

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n, \ \eta = \eta_0 (1 + \beta t), \ \eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} (1 + \gamma t)^2,$$

wo n, α, β und γ Konstante sind. Breitenbach findet (1899), dafs man η in der Form $\eta = C T^n$ darstellen kann, wo C eine Konstante, T die absolute Temperatur und n eine zwischen 0,6 und 1 enthaltene Zahl bedeutet, die sich bei Zunahme der Temperatur ein wenig vermindert. (In der betreffenden Arbeit von Breitenbach findet sich auch die gesamte Litteratur, welche sich auf die Bestimmung des Koeffizienten η bezieht). Nach der Theorie von Sutherland ist η von der Form

$$\eta = \frac{A T^{\frac{3}{2}}}{T + C},$$

wo A und C Konstante sind. In einer späteren Arbeit (1901) zeigte Breitenbach, dafs die Resultate seiner Messungen mit dieser Formel im Einklang stehen.

Puluj hat eine recht komplizierte Formel gegeben, nach der man den Koeffizienten η für ein Gemisch von zwei Gasen bestimmen kann, wenn η_1 und η_2 für die betreffenden Gase bekannt sind; man erhält jedoch nach dieser Formel zu kleine Werte.

Aus den Versuchen hat man für η in C. G. S.-Einheiten folgende numerische Werte erhalten:

	20°	180°
Wasserstoff . . .	0,000 092	0,000 123
Sauerstoff	0,000 212	0,000 281
Stickstoff	0,000 184	0,000 240
Kohlensäure . . .	0,000 161	0,000 215

Noyes und Goodwin geben für H_2, CO_2 und Quecksilberdampf bei 357° folgende Verhältnisse

$$\frac{\eta(\mathrm{Hg})}{\eta(\mathrm{CO_2})} = 2{,}08; \qquad \frac{\eta(\mathrm{Hg})}{\eta\,\mathrm{H_2}} = 4{,}04.$$

Ch. Fabry und A. Perot finden für Luft $\eta = 0{,}000\,173$. Wenn eine Schicht wärmeren und leichteren Gases an der Oberfläche einer Schicht kälteren und schwereren Gases dahingleitet, so müssen, wie Helmholtz gezeigt hat, an der Oberfläche der unteren Schicht Wellen entstehen, ähnlich wie die an einer Wasserfläche durch den Wind hervorgerufenen. Ebensolche Gaswellen müssen sich unter den erwähnten Bedingungen auch in der Atmosphäre bilden. Die Länge dieser Wellen (die man, wie immer quer zu den Wellen, letztere im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnet, rechnet) muſs eine sehr bedeutende sein. Bewegt sich z. B. die obere Schicht über der unteren mit einer Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde dahin, und ist die Temperatur der oberen Schicht um 10° höher, so beträgt die Wellenlänge etwa 550 m. Emden gelang es auf einer Ballonfahrt, solche Wellenlängen in den sogenannten Wogenwolken zu beobachten. Scheiner erklärt die Granulationen der Sonnenoberfläche durch Bildung ähnlicher Wogenwolken an der Grenze zwischen der Chromosphäre und Photosphäre der Sonne.

§ 14. Die Gröſse der mittleren Weglänge. Kennt man η, so kann man nach Formel (60) auch die mittlere Weglänge L der Gasmoleküle berechnen. Das Produkt nm ist gleich der Masse eines Kubikcentimeters des Gases; bei 0° und 760 mm Druck ist nm für Luft gleich 0,001 29 g, folglich ist für ein beliebiges Gas $nm = 0{,}00129\,\delta$, wo δ, wie immer, die auf Luft bezogene Gasdichte bezeichnet. Ferner hatten wir [vergl. (51)]

$$\Omega = \frac{44700}{\sqrt{\delta}}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}.$$

Formel (60) giebt, wenn man anstatt $\frac{1}{3}$ den Faktor $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ (vergl. S. 498) setzt,

$$L = \frac{\eta}{0{,}318\,nm\,\Omega} = \frac{\eta\sqrt{\delta}}{0{,}318 \times 0{,}001\,29\,\delta \times 44700}\,\mathrm{cm}$$

oder schlieſslich

$$L = \frac{\eta}{19{,}6\sqrt{\delta}} \text{ cm.}$$

Für Luft ist $\eta = 0{,}000\,175$, $\delta = 1$ und folglich

$$L = 0{,}000\,009 \text{ cm} = 0{,}000\,09 \text{ mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Somit ist die mittlere Weglänge ungefähr gleich ein Zehntausendstel Millimeter. Die Anzahl ν der Zusammenstöfse, welche pro Sekunde unter den Molekülen stattfinden, erhält man, wenn man die mittlere Geschwindigkeit Ω durch die mittlere Weglänge L dividiert

$$\nu = \frac{\Omega}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Für Luft ist

$$\nu = \frac{44\,700}{0{,}000\,009} = 4980 \text{ Millionen.}$$

Endlich setzt uns (58) in den Stand die Summe Q der Flächeninhalte für die Querschnitte der Moleküle zu finden, welche in 1 ccm des Gases enthalten sind:

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{2}\,L} = \frac{19{,}6}{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\eta} = \frac{4{,}9}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Setzt man hier den für Luft gefundenen Wert von L ein, so erhält man den erstaunlich grofsen Wert $Q = 18\,500$ qcm $= 1{,}85$ qm.

Es mögen hier einige Werte für L, ν und Q (bezogen auf 760 mm Druck und ungefähr 20°) folgen:

	L	ν	Q
	cm	Millionen	qcm
Wasserstoff	0,000 018 5	9480	8 500
Stickstoff	0,000 009 9	4760	17 900
Sauerstoff	0,000 010 6	4065	16 700
Kohlensäure	0,000 006 8	5510	26 000

Im dritten Bande werden wir uns mit einer anderen Methode zur Bestimmung der Gröfse L bekannt machen, welche auf Messung der Wärmeleitung des Gases beruht.

§ 15. Dimensionen und Anzahl der Moleküle. Es existiert gegenwärtig eine ganze Reihe von Methoden, die Dimensionen der Moleküle angenähert zu bestimmen. Einige von diesen Methoden stützen sich auf Formeln der kinetischen Gastheorie, andere ergeben sich wiederum aus den Erscheinungen der Elektrolyse, den optischen, elektrostatischen Erscheinungen u. s. w. Es möge hier auf zwei Methoden hingewiesen werden.

Die Formel (56) kann man in analoger Weise umformen, wie wir

aus (53) die Formel (55) hergeleitet hatten, indem man mit N die Zahl der Moleküle im Volumen v ($N\lambda^3 = v$) und mit $v' = \frac{4}{3} N\pi \left(\frac{\varrho}{2}\right)^3$ das von den Molekülen eingenommene Volumen bezeichnet. Es ist

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2} = \frac{N\lambda^3 \varrho}{6\sqrt{2}\,\frac{4}{3}\,N\pi \left(\frac{\varrho}{2}\right)^3} = \frac{\varrho v}{6 v' \sqrt{2}}.$$

Führt man die Gröfse

$$w = \frac{v'}{v} \qquad (66)$$

ein, so erhält man für den Durchmesser ϱ eines Moleküls den Ausdruck

$$\varrho = 6\sqrt{2}\, w L \qquad (67)$$

Ist ein Gas in den flüssigen Zustand übergeführt, so übertrifft das Volumen der erhaltenen Flüssigkeit aller Wahrscheinlichkeit nach die Gröfse v' nur um ein Geringes, daher ist w nicht gröfser als das Verhältnis der Dichte des Stoffes im Gaszustande zur Dichte desselben Stoffes im flüssigen Zustande. Die Dichte des flüssigen Sauerstoffes ist z. B. ungefähr gleich 0,9, die Dichte des gasförmigen Sauerstoffes bei 0^0 und 760 mm Druck ist gleich 0,001 43; hieraus folgt $w = 0{,}0016$. Setzt man $L = 0{,}000\,01$ cm, so ist

$$\varrho = 6\sqrt{2} \times 0{,}0016 \times 0{,}000\,01 \text{ cm} = 1{,}3 \,.\, 10^{-6} \text{ mm}.$$

Somit beträgt die obere Grenze für den Durchmesser eines Sauerstoffmoleküls ungefähr ein Milliontel Millimeter.

Ein anderer Weg zur Bestimmung von ϱ besteht darin, dafs man die Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze nach der Formel von van der Waals (S. 433) bestimmt. Die Gröfse b hängt von dem von den Gasmolekülen eingenommenen Volumen v' in einfacher Weise ab. Wir sahen, dafs nach van der Waals $b = 4v'$, nach O. E. Meyer $b = 4\sqrt{2}\, v'$ ist. Man kann also v', folglich auch w berechnen, wenn man b bestimmt. Es möge hier nur das Resultat mitgeteilt werden: Für Luft erhält man angenähert $\varrho = 0{,}3$ Milliontel Millimeter, was mit dem Vorhergehenden ziemlich gut übereinstimmt. Andere Methoden zur Bestimmung von w gehen auf die Formel

$$w = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{K - 1}{K + 2} \qquad (67,\text{a})$$

zurück; hier bedeutet n den Brechungsexponenten von Strahlen von grofser Wellenlänge. K die Dielektrizitätskonstante, mit der wir uns zunächst im II. Bande, und hernach eingehender im IV. Bande bekannt machen werden. Ausführlicheres wird über die Formel (67, a) im II. Bande mitgeteilt werden. Wendet man (67, a) auf Luft an, so kommt $\varrho = 0{,}5 \,.\, 10^{-6}$ mm. Offenbar ist also der Durchmesser

eines Moleküls eine Gröfse, deren Ordnung durch einige Zehnmilliontel eines Millimeters bestimmt wird.

In § 14 sahen wir, wie die Gröfse $Q = n\pi\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$ bestimmt wird, wo n die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit bedeutet. Wir erhalten hieraus

$$n = \frac{4\,Q}{\pi\,\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Setzt man für den Sauerstoff $Q = 16\,700$ qcm und $\varrho = 0{,}3 \,.\, 10^{-6}$ mm ein, so erhält man

$$n = 2 \,.\, 10^{19} = 20 \,.\, 10^{18} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

In einem Kubikcentimeter Luft oder (nach dem Avogadroschen Gesetze) auch eines anderen Gases sind bei 0° und 760 mm Druck ungefähr 20 Trillionen Moleküle enthalten.

Hieraus erhält man für die Zahl N der Moleküle in einem Gramm-Molekül Gas (z. B. in 2 g Wasserstoff)

$$N = 4{,}5 \,.\, 10^{23} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

O. E. Meyer giebt die Zahl $N = 6{,}4 \,.\, 10^{23}$ an.

Die Gleichung $n\lambda^3 = 1$ giebt für den mittleren Abstand λ der Moleküle voneinander einen Wert:

λ zwischen 3 und 4 Millionstel Millimeter.

Würde man die in einem Kubikcentimeter Luft enthaltenen Moleküle aneinander reihen, so erhielte man einen Faden, dessen Länge 50 mal die Länge des Erdäquators übertrifft. Die Gröfse eines Moleküls verhält sich zur Gröfse eines gewöhnlichen gröfseren Schrotkorns wie beispielsweise 1 cbcm zur Gröfse der Erdkugel.

Wir haben in diesem Kapitel nur die wichtigsten Umrisse jenes umfangreichen und stattlichen Gebäudes kennen gelernt, welches man unter dem Namen der kinetischen Gastheorie versteht. Im folgenden werden wir uns wiederholt auf die Sätze berufen, die hier auseinandergesetzt und abgeleitet worden sind.

Litteratur.

Kinetische Gastheorie.

Dan. Bernouilli: Hydrodynamica, 1738. Vergl. Pogg. Ann. **107**, 490, 1859.
Herapath: Annals of philosophy, New series, Vol. I, p. 273, 340, 401, 1821.
Joule: Phil. Mag. (4) **14**, 211, 1857.
A. Kroenig: Pogg. Ann. **99**, 315, 1856.
Clausius: Pogg. Ann. **100**, 353, 1857; **105**, 239, 1858; **115**, 1, 1862. Phil. Mag. (4) **14**, 108; **17**, 81; **23**, 417 und 512, 1862.

Clausius: Die kinetische Theorie der Gase. (Mechanische Wärmetheorie, 2. Aufl., Bd. III.) Braunschweig 1889 bis 1891.
Maxwell: Phil. Mag. (4) **19**, 22, 1860; **35**, 129, 185, 1868. Cambridge. Phil. Trans. **13**, part. 3, p. 547.
Boltzmann: Wien. Ber. **58**, 63, 66, 72, 74, 77, 78, 84, 94, 1868 bis 1886; Wied. Ann. **8**, 653, 1879; **11**, 529, 1880; **57**, 773, 1896.
Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig 1895.
O. E. Meyer: Kinetische Theorie der Gase. Breslau, 2. Aufl., 1895.
O. E. Meyer: Wied. Ann. **7**, 317, 1879; **10**, 296, 1889.
N. Pirogow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **17**, 114, 281, 1883; **18**, 93, 295, 1884; **21**, 44, 76, 1889; **22**, 44, 1890; Exners Rep. **27**, 515, 1891.
Watson: A treatise on the kinetic theory of Gases. Oxford 1876.
H. A. Lorenz: Wied. Ann. **12**, 127, 660, 1881.
Stefan: Wien. Ber. **65**, 360, 1872.
M. Cantor: Wied. Ann. **62**, 482, 1897; Zeitschr. phys. Chem. **26**, 568, 1898.
P. Breitenbach: Wied. Ann. **67**, 803, 1899; Diss. Erlangen, Leipzig 1898. (Übersicht über die Litteratur der Gasreibung); Drud. Ann. **5**, 166, 1901.
G. Jäger: Wien. Ber. **108**. 447, 1900; **109**, 74, 1900,
Puluj: Carls Repert. **15**, 578, 633, 1897.
Noyes and Goodwin: Phys. Review IV, p. 207, 1896.
Ch. Fabry et A. Perot: Compt. rend. **124**, 281, 1897; Ann. chim. et phys. (7) **13**, 275, 1898.
Helmholtz: Ges. Abh. III, p. 309; Berl. Ber. 1889, S. 761.
Emden: Wied. Ann. **62**, 374, 1897.
Stankewitsch: Wied. Ann. **29**, 153, 1886.
Stankewitsch: Kinetische Gastheorie (russ.). Moskau 1884.
Stankewitsch: Theorie der mehratomigen Gase (russ.). Warschau 1893.
Stoletow: Kurze Darstellung der Entwicklung unserer Kenntnisse von den Gasen (russ.). Moskau 1879.

Avogadrosches Gesetz:

Tait: Phil. Mag. (5) **21**, 343, 1886.
Maxwell: Phil. Trans. **12**, part. 3, p. 547, Cambridge 1872.
Boltzmannn: Wien. Ber. **58**, 1868; **63**, 1871; **66**, 1872; **94**, 1886.
In Bezug auf das Maxwellsche Gesetz vergl. die interessante Polemik zwischen Bertrand und Boltzmann in den Compt. rend. **123**, 1896.

Sechstes Kapitel.

Die Gase im Zustande der Bewegung und des Zerfalls.

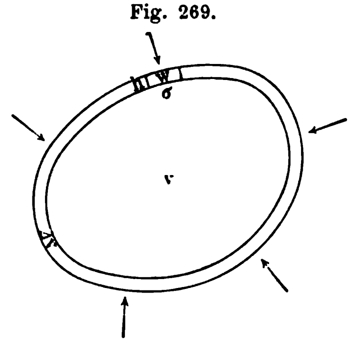
§ 1. **Die Arbeit, welche bei der Ausdehnung oder Kompression eines Gases geleistet wird.** Nehmen wir an, das Volumen v_1 eines Gases, welches sich unter dem Drucke p_1 befindet, habe sich bis zum Volumen v_2 vergröſsert resp. verkleinert, weil sich

der Druck p_1 kontinuierlich (nicht etwa sprungweise) bis zum neuen Werte p_2 vermindert resp. vergröfsert hat. Es sei nun diejenige Arbeit r zu berechnen, welche im ersten Falle das Gas, im zweiten Falle diejenige äufsere Ursache geleistet hat, durch welche das Gas komprimiert worden ist. So lange sich das Volumen des Gases ändert, kann es in sehr verschiedener Weise von den umgebenden Körpern Wärme empfangen oder aber Wärme abgeben, welche auf diese Körper übergeht. Hieraus entspringt die Möglichkeit, dafs ein Gas von einem gewissen Anfangszustande (p_1, v_1) zu einem neuen Zustande (p_2, v_2) auf unendlich viele verschiedene Arten übergehen kann.

Wir wollen voraussetzen, dafs der Ausdehnungsvorgang eines Gases die Eigenschaft besitzt, die wir in Band III unter dem Namen der Reversibilität kennen lernen werden. Hier begnügen wir uns mit der Bemerkung, dafs die Ausdehnung reversibel ist, wenn der äufsere Druck sich in jedem gegebenen Moment unendlich wenig von der Spannung, d. h. dem Gegendruck des Gases unterscheidet. Mechanisch unterscheidet sich also der Zustand des Gases stets nur unendlich wenig von dem Gleichgewichtszustande. Eine Ausdehnung des Gases in einen leeren Raum, oder auch nur in einen Raum, in welchem ein um eine endliche Gröfse geringerer Druck herrscht, als der Druck des Gases, ist ein irreversibler Vorgang, für den die hier zu entwickelnden Formeln keine Gültigkeit haben.

Wir können den ganzen Übergang des Volumens von v_1 nach v_2 in eine sehr grofse Zahl sehr kleiner Volumenänderungen zerlegt denken und die Annahme machen, dafs jede von ihnen bei einem gewissen konstanten Drucke vor sich geht. Bestimmen wir zunächst die Arbeit Δr, welche vom Gase bei der sehr geringen Änderung Δv seines Volumens v (Fig. 269) geleistet wird, während der äufsere Druck gleich p ist. Sei σ ein Element der Gasoberfläche; auf demselben lastet der Druck $p\sigma$. Nehmen wir an, das Element σ habe sich um die Strecke h (siehe Fig. 269) verschoben und sei $\sigma h = w$ ein sehr kleiner Teil der gesamten Volumenzunahme Δv. Die vom Gase bei Verschiebung des Elements σ geleistete Arbeit ist gleich $p\sigma . h = pw$. Die ganze gesuchte Arbeit Δr ist gleich der Summe der Gröfsen pw, für alle Elemente σ der Gasoberfläche. Somit ist $\Delta r = \Sigma pw = p\Sigma w = p . \Delta v$ oder genauer: das Differential dr der Arbeit des Gases bei Zunahme des Volumens um das Differential dv des Volumens ist gleich

Fig. 269.



$$dr = p\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die gesamte vom Gase bei seiner Ausdehnung geleistete Arbeit r ist gleich

$$r = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Offenbar bezieht sich Formel (2) in gleicher Weise auf flüssige und feste Körper. Um die Arbeit r zu leisten, muſs das Gas eine äquivalente Energiemenge verbrauchen, welche ihm von auſsen her, z. B. in Form von Wärme, zuströmen kann, oder die das Gas aus seinem eigenen Energievorrat entnehmen kann, der, wie wir gesehen, proportional der absoluten Temperatur des Gases ist. Um das Integral (2) zu berechnen, müssen wir den Zusammenhang zwischen p und v kennen.

Von besonderem Interesse ist die isothermische Volumenänderung eines Gases, d. h. die Änderung, bei welcher sich die Temperatur des Gases nicht ändert. Bezeichnen wir die absolute Temperatur des Gases mit T und nehmen wir an, das Gas sei von einer sehr groſsen sich kontinuierlich erneuernden Menge eines Stoffes umgeben, dessen Temperatur T ist, z. B. von schmelzendem Eis, den Dämpfen irgend einer siedenden Flüssigkeit oder einem Wasserstrom von konstanter Temperatur. Die gesamte Energie, welche zur Leistung der Arbeit r für die Ausdehnung erforderlich ist, strömt dann von diesem Körper dem Gase zu, so daſs sich also die Temperatur T des Gases nicht ändert. Der Druck p und das Volumen v sind in diesem Falle durch das Boyle-Mariottesche Gesetz miteinander verknüpft und wir haben die Relationen

$$pv = p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo R die Konstante der Clapeyronschen Formel (S. 430) ist. Formel (3) giebt uns $p = \frac{RT}{v}$; setzt man diesen Wert in (2) ein, so erhält man, da T konstant ist,

$$r = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT\,lg\,\frac{v_2}{v_1}.$$

Nach Formel (3) erhalten wir für r folgende Ausdrücke:

$$r = RT\,lg\,\frac{v_2}{v_1} = RT\,lg\,\frac{p_1}{p_2} = p_1 v_1\,lg\,\frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2\,lg\,\frac{v_2}{v_1} \qquad (4)$$

Hier bedeutet das Zeichen lg den natürlichen Logarithmus. Dieselben Formeln liefern uns auch die Arbeit, welche man zu leisten hat, um das Gasvolumen bei konstanter Temperatur von v_2 bis auf v_1 zu verkleinern. Hierbei geht eine äquivalente Wärmemenge $q = Ar$, wo A

das thermische Arbeitsäquivalent ist (vergl. S. 122), vom komprimierten Gas auf den dasselbe umgebenden Stoff über.

§ 2. Plötzliche reversible Ausdehnung oder Kompression eines Gases; adiabatische oder isentropische Zustandsänderung. Nehmen wir an, das Volumen v_1 eines Gases gehe in so kurzer Zeit in das Volumen v_2 über, daſs das Gas innerhalb dieser Zeit weder von den Körpern seiner Umgebung Wärme zu empfangen, noch auch an diese Wärme abzugeben im stande ist. In diesem Falle muſs die gesamte Energie, welche die Arbeit der Ausdehnung leistet, aus dem Gase selbst entnommen werden, das sich dabei abkühlt. Umgekehrt verbleibt bei Kompression des Gases eine der Arbeit der Auſsenkräfte äquivalente Wärmemenge im Gase selbst und dieses erwärmt sich. Eine solche reversible Zustandsänderung, bei welcher kein Wärmeaustausch zwischen dem Körper und der Auſsenwelt stattfindet, heiſst adiabatische oder isentropische Zustandsänderung. Könnte man ein Gas von absoluten Nichtleitern der Wärme umgeben, so würde auch bei langsamen Volumänderungen eine adiabatische Änderung seines Zustandes erfolgen. Wir wollen nun zunächst den Zusammenhang zwischen v und p bei adiabatischen Zustandsänderungen eines idealen Gases suchen. Wenn sich das Volumen eines Gases, auf welchem der Druck p lastet, um dv vergröſsert, so wird die Arbeit pdv [vergl. (1)] geleistet und hierzu die Wärmemenge $q = Apdv$ verbraucht. Diese Wärme wird aus dem Gase selbst entnommen, dessen Temperatur t^0 sich dabei um dt Grade erniedrigt. Um aber das Gas bloſs um 1^0 zu erwärmen, ist die Wärmemenge c_v erforderlich (S. 486), folglich ist $q = -c_v dt$. Mithin ist

$$Apdv = -c_v dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Clapeyronsche Formel $pv = RT$ giebt uns $pdv + vdp = RdT$.

Es ist aber

$$dT = d(273 + t) = dt,$$

folglich

$$dt = \frac{1}{R}(pdv + vdp).$$

Setzt man diesen Wert in Formel (5) ein, so erhält man

$$\left(A + \frac{c_v}{R}\right) pdv = -\frac{c_v}{R} vdp,$$

$$(AR + c_v)\, pdv = -c_v vdp.$$

Wir hatten aber (Formel 22a, S. 487)

$$c_p - c_v = AR \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

[vergl. (26) auf S. 488], also $AR + c_v = c_p$. **Führt man die Gröfse** $k = c_p : c_v$ [vergl. (29) auf S. 488] ein, so ergiebt sich $kp\,dv = -v\,dp$ oder

$$k\,\frac{dv}{v} = -\,\frac{dp}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Bezeichnen wir ferner die Anfangswerte des Volumens und Druckes mit v_1 und p_1, ihre Endwerte mit v_2 und p_2, so giebt uns Formel (7)

$$k\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = -\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p},$$

d. h. $k\,lg\,\frac{v_2}{v_1} = -\,lg\,\frac{p_2}{p_1} = lg\,\frac{p_1}{p_2}$ oder $lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k = lg\,\frac{p_1}{p_2}$, mithin $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_2}$ oder endlich

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da die Anfangs- und Endwerte für Druck und Volumen willkürlich gewählt werden können, so zeigt uns Gleichung (8), dafs bei der adiabatischen Zustandsänderung eines Gases sein Volumen v und Druck p durch folgende Gleichung zusammenhängen

$$\left.\begin{aligned} pv^k &= \text{Const.} \\ k &= \frac{c_p}{c_v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Obige Gleichung wurde von Poisson gefunden. Für isotherme Volumenänderungen hatten wir die Boyle-Mariottesche Formel $pv = \text{Const.}$, woraus sich $p = \frac{\text{Const.}}{v}$ ergiebt, d. h. die Spannung ist indirekt proportional dem Volumen. Hier haben wir $p\,v^k = \text{Const.}$, wo für einige Gase, wie N, O, H, CO die Gröfse $k = 1{,}41$ und für alle $k > 1$ ist; hieraus folgt $p = \frac{\text{Const.}}{v^k}$, d. h. die Spannung ändert sich in höherem Grade, als es der indirekten Proportionalität zum Volumen entspricht. Ist $k = 1{,}41$ und vermindert sich das Volumen um das 10fache, so nimmt die Spannung $10^{1,41} = 25{,}7$ mal zu.

Betrachten wir nun die Temperatur eines Gases, welches adiabatischen Änderungen unterworfen ist. Setzt man in (5) anstatt p seinen aus der Formel $pv = RT$ entnommenen Wert ein, so erhält man $\frac{ART}{v}\,dv = -\,c_v\,dt$; Formel (6) giebt, hiermit kombiniert, $\frac{(c_p - c_v)\,T\,dv}{v} = -\,c_v\,dt$. Setzt man dT anstatt dt, divi-

diert die ganze Gleichung durch $c_v T$ und führt $k = c_p : c_v$ ein, so ergiebt sich

$$(k - 1)\frac{dv}{v} = -\frac{dT}{T} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Sind v_1 und T_1 Anfangsvolumen und -temperatur, v_2 und T_2 Endvolumen und Endtemperatur, so ist nach Formel (10)

$$(k - 1)\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = -\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}$$

$$(k - 1)\, lg\,\frac{v_2}{v_1} = -\, lg\,\frac{T_2}{T_1} = lg\,\frac{T_1}{T_2}$$

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$T_1 v_1^{k-1} = T_2 v_2^{k-1} \quad \ldots \ldots \quad (11, a)$$

Hieraus folgt, dafs bei adiabatischer Zustandsänderung eines Gases sein Volumen v und seine absolute Temperatur T durch folgende Gleichung zusammenhängen

$$T v^{k-1} = \text{Const.} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Die absoluten Temperaturen eines Gases sind bei adiabatischen Zustandsänderungen desselben den $(k - 1)$-ten Potenzen seines Volumens indirekt proportional.

Sei die Anfangstemperatur $t_1 = 0^0$, d. h. $T_1 = 273^0$; wir wollen die Temperatur t_2 des Gases finden, welche es annimmt, wenn sein Volumen plötzlich auf die Hälfte vermindert wird. Formel (11) giebt, da $\frac{v_1}{v_2} = 2$ ist,

$$T_2 = 273 \,.\, 2^{k-1} = 273 \,.\, 2^{0,41} = 362,7^0 = t_2 + 273;\ t_2 = 89,7^0.$$

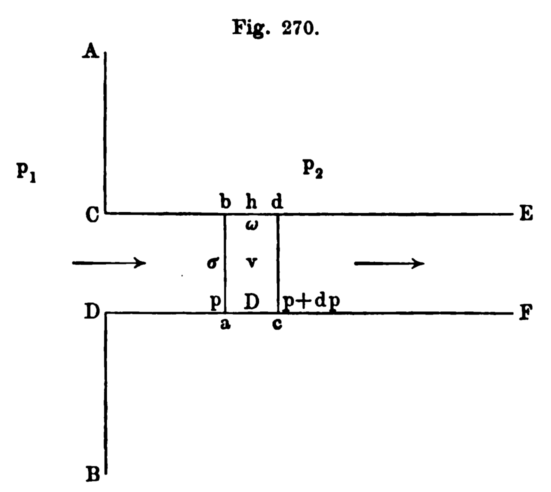
Das Gas erwärmt sich also von 0^0 bis auf $89,7^0$.

Vermindert man das Volumen v_1 plötzlich bis auf $v_2 = 0,1\, v_1$, so erwärmt sich das Gas von 0^0 bis auf 429^0; macht man $v_2 = 0,01\, v_1$, so erwärmt es sich bis auf 1530^0. Ist ein Gas bei 0^0 durch den Druck von 200 Atmosphären komprimiert und dehnt es sich dann unter gewöhnlichem Atmosphärendruck aus, so kühlt es sich bis auf -242^0 ab.

§ 3. Das Ausströmen eines Gases aus einer kleinen Öffnung und aus einer dünnen Röhre. Die elementare und wie wir sehen werden durchaus nicht strenge Theorie des Ausströmens von Gasen aus kleinen Öffnungen besteht im folgenden. Sei AB (Fig. 270 a. f. S.) die Wandung, welche den Raum links, wo der Gasdruck p_1 herrscht, von dem Raume rechts trennt, wo der Gasdruck p_2 beträgt; sei ferner $p_2 < p_1$. In der Wandung befinde sich die Öffnung CD, durch

welche das Gas von links nach rechts hin in Form des Gasstrahles $CDEF$ strömt. Das Element $abdc$ dieses Gasstrahles habe den Querschnitt σ, die Höhe $h = bd$, das Volumen $v = \sigma h$ und enthalte die Gasmasse $\mu = vD = \sigma h D$, wo D die auf Wasser bezogene Dichte des Gases ist. Die Geschwindigkeit, mit welcher das Element ausströmt sei ω, der Druck auf die Fläche ab gleich p, auf die Fläche dc gleich $p + dp$, wo dp offenbar negativ ist. Während sich das Element um seine eigene Länge verschiebt, nimmt seine Geschwindigkeit um einiges zu. Nach dem Gesetze von der Wucht ist der Wuchtzuwachs unseres Elementes gleich der Arbeit der Aufsenkräfte. Die erstere Gröfse ist gleich

Fig. 270.



$$d\left(\frac{1}{2}\mu\omega^2\right) = \frac{1}{2}\mu d(\omega^2) = \frac{1}{2}\sigma h D d(\omega^2);$$

die andere ist gleich

$$p\sigma h - (p + dp)\sigma h = -\sigma h dp.$$

Somit ist

$$\frac{1}{2}\sigma h D d(\omega^2) = -\sigma h dp$$

oder

$$d(\omega^2) = -\frac{2\,dp}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $\omega = 0$, die Endgeschwindigkeit (wenn $p = p_2$ ist) gleich Ω, so giebt Formel (13)

$$\Omega^2 = -\frac{2}{D}\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{2(p_1 - p_2)}{D}$$

oder

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese Formel wird gewöhnlich in den Lehrbüchern der Elementar-

physik gegeben. Sie zeigt, dafs bei gegebenem p_1 und p_2 die Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Gasdichte ist.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit Ω ist es bequemer, das Gewicht P der Volumeneinheit des Gases einzuführen. Dasselbe ist gleich Dg, folglich ist $D = \frac{P}{g} = \frac{P_0 \delta}{g}$, wenn P_0 das Gewicht der Volumeneinheit von Luft und δ die auf Luft bezogene Gasdichte bezeichnet. Es ist dann

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{P_0 \delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ist $p_1 = 1$ Atm. $= 10\,333$ kg pro Quadratmeter, $p_2 = 0$, so giebt Formel (15), wenn man noch für g den Wert $g = 9{,}81$ m und das Gewicht von einem Kubikmeter Luft gleich 1,29 kg einführt

$$\Omega = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times 10\,333}{1{,}29\,\delta}} = \frac{396}{\sqrt{\delta}} \text{ Meter.}$$

Die Ungenauigkeiten in unserer Herleitung bestehen zunächst darin, dafs wir in Formel (13) die Gröfse D als konstant angesehen haben; diese Annahme kann wohl für Flüssigkeiten gelten, nicht aber für Gase. Ferner hatten wir vorausgesetzt, dafs der Gasstrahl überall denselben Durchschnitt hat, während er sich in Wirklichkeit zuerst kontrahiert und darauf verbreitert; innerhalb des Raumes links ist der Strahl sehr breit und kontrahiert sich darauf bis auf einen Querschnitt gleich demjenigen der Ausflufsöffnung. Ohne auf hierhergehörige Einzelheiten einzugehen, wollen wir blofs den Einflufs betrachten, welchen die Veränderlichkeit der Gröfse D ausübt. Die Abhängigkeit der Dichte D vom veränderlichen Drucke p_1 kann sehr verschieden sein, je nach dem Wärmeaustausch, welcher zwischen dem ausströmenden Gase und den umgebenden Körpern stattfindet. Betrachten wir zwei Grenzfälle.

1. Isothermisches Ausströmen eines Gases. Das sich ausdehnende Gas leistet Arbeit und verliert somit einen Teil seiner Wärmeenergie. Wir machen jedoch die Annahme, das Ausströmen erfolge so langsam, dafs alle erforderliche Wärme von aufsen hinzuströmen kann, so dafs also die Temperatur des Gases konstant bleibt. In diesem Falle ist nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze

$$\frac{D}{D_1} = \frac{p}{p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wo D_1 die Dichte des Gases im linken Raume bedeutet. Setzt man D aus (16) in Formel (13) ein, so erhält man

$$d(\omega^2) = -\,2\,\frac{p_1}{D_1} \cdot \frac{dp}{p};$$

hieraus folgt, wenn bei $p = p_1$ die Geschwindigkeit $\omega = 0$ ist, für $p = p_2$ dagegen $\omega = \Omega$,

$$\Omega^2 = -\frac{2p_1}{D_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = \frac{2p_1}{D_1}\,lg\,\frac{p_1}{p_2}.$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{2p_1}{D_1}\,lg\,\frac{p_1}{p_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Ist die Gastemperatur gleich t, seine auf Luft bezogene Dichte gleich δ, so ist

$$D_1 = \frac{1{,}29\,p_1\,\delta}{10\,333\,g\,(1+\alpha t)} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Formel (17) ein, so kommt

$$\Omega = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times 10\,333\,(1+\alpha t)}{1{,}29\,\delta}\,lg\,\frac{p_1}{p_2}}$$

$$= 396\sqrt{\frac{1+\alpha t}{\delta}\,lg\,\frac{p_1}{p_2}}\ \text{Meter} \quad \ldots \quad (19)$$

Auch nach dieser Formel ist die Geschwindigkeit Ω indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Gasdichte δ.

Strömt Luft bei $t = 0^0$ aus einem Raume, wo $p_1 = 2$ Atm. ist in die freie Luft aus ($p_2 = 1$ Atm.), so ist $\Omega = 396\sqrt{lg\,2} = 330$ m. Für $p_2 = 0$ ist $\Omega = \infty$; hieraus ist ersichtlich, dafs das Ausströmen ins Vakuum kein isothermischer Vorgang sein kann.

2. Adiabatisches Ausströmen eines Gases. Viel mehr nähert sich der Wirklichkeit die Annahme, dafs während des Ausströmens des Gases gar kein Wärmeaustausch zwischen ihm und anderen Körpern stattfindet, dafs sich also während des Ausströmens der Zustand des Gases adiabatisch ändert. Das Volumen v einer gegebenen Gasmenge und der Druck p sind durch die Formel (9) $pv^k =$ Const. miteinander verknüpft. Hieraus folgt

$$\left(\frac{D}{D_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \quad \text{oder} \quad \frac{D}{D_1} = \frac{p^{\frac{1}{k}}}{p_1^{\frac{1}{k}}}.$$

Ferner giebt (13)

$$d(\omega^2) = -\frac{2p_1^{\frac{1}{k}}}{D_1}\frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}}$$

und folglich

$$\Omega^2 = -\frac{2p_1^{\frac{1}{k}}}{D_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = \frac{2kp_1^{\frac{1}{k}}}{(k-1)D_1}\left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}}\right)$$

und

$$\Omega = \sqrt{\frac{2kp_1^{\frac{1}{k}}}{(k-1)D_1}\left(p_1^{\frac{k-1}{k}} - p_2^{\frac{k-1}{k}}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Auch hier erhalten wir den Satz, dafs die **Geschwindigkeit** Ω **indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Gasdichte** δ **ist**, wenn man (18) einsetzt. Formel (20) giebt dann

$$\Omega = 396\sqrt{\frac{k}{k-1}\cdot\frac{1+\alpha t}{\delta}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad . \quad (21)$$

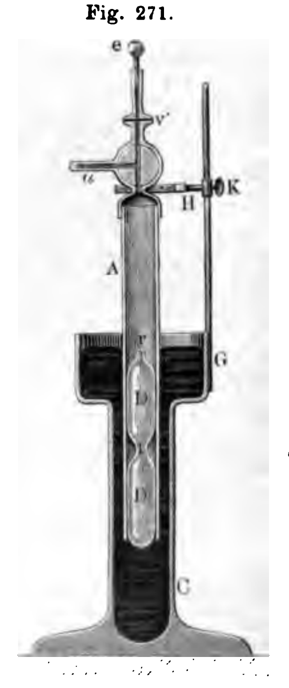
Beim Übergang zum Vakuum ($p_2 = 0$) erhält man eine endliche Geschwindigkeit, welche vom Anfangsdruck p_1 nicht abhängig ist; für Luft von $t = 0^0$ ist dieselbe, wenn $k = 1{,}41$ gesetzt wird, gleich

$$\Omega = 396\sqrt{3{,}44} = 734{,}5 \text{ m}.$$

Sind Ω und Ω_1 die Ausströmungsgeschwindigkeiten für zwei Gase unter denselben Verhältnissen, δ und δ_1 ihre Dichten, und kann man annehmen, die Werte von k seien für sie die gleichen, so ist

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Fig. 271.



Bunsen hat einen speziellen Apparat zum Vergleichen der Ausflufsgeschwindigkeiten Ω für verschiedene Gase konstruiert, der es ihm auch ermöglichte, ihre auf Luft bezogenen Dichten zu bestimmen.

Dieser Apparat ist in etwas veränderter Form in der Fig. 271 abgebildet. An das Glasrohr A ist oben ein eiserner Dreiweghahn angekittet. In der Erweiterung v' befindet sich ein dünnes, horizontales Platinblech, in welches ein sehr feines Loch gebohrt ist. Der Stöpsel e schützt das Blech vor Staub, wenn der Apparat nicht benutzt wird. Die Röhre A taucht in in einen mit Quecksilber gefüllten Holz- oder Eisencylinder C, in dessen oben erweiterten Teil an zwei einander gegenüberliegenden Stellen Spiegelglasplatten eingesetzt sind. DD ist ein Schwimmer, der bei l zwei Marken trägt. Durch die Röhre a wird das Rohr A mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt, indem A abwechselnd mehreremale in das Quecksilber

heruntergedrückt und wieder gehoben wird. Dann wird durch Drehung des Hahnes das Rohr A mit v' verbunden, A in das Quecksilber herabgedrückt und durch den Ständer HKG festgehalten. Nun werden mit einem Chronoskop die Zeitmomente bestimmt, in welchen beim Visieren über die Quecksilberoberfläche zuerst die Spitze r und dann die untere von den beiden Marken bei l sichtbar werden (die obere Marke dient nur dazu, auf das Erscheinen der unteren vorzubereiten). Es seien für zwei verschiedene Gase t und t_1 die zwischen den beiden beobachteten Momenten verfliefsenden Zeiten; δ und δ_1 die Dichtigkeiten dieser Gase. Dann haben wir offenbar

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22, a)$$

Bunsen erhielt mit diesem Apparat recht gute Resultate, z. B. für Knallgas $\delta = 0{,}413$ anstatt $0{,}415$. Der Gasstrom, welcher mit bedeutender Geschwindigkeit aus der Öffnung hervorströmt, reifst das ihn umgebende Gas mit sich fort und verdünnt es auf diese Weise. Auf demselben Prinzip beruhen auch die Pulverisatore.

Den Bau des aus einer kleinen Öffnung hervorströmenden Gasstrahles haben Mach und Salcher (1889), sowie Mach allein (1897) untersucht. Genannte Autoren bedienten sich des Schlierenapparates (Band II) oder des Interferenzrefraktometers (Band II) und photographierten den Gasstrahl, wobei die von ihnen erhaltenen interessanten Aufnahmen zeigten, dafs derselbe einen sehr komplizierten Bau hat. Den Bau des Gasstrahles hat Emden später (1899) sorgfältig untersucht und gezeigt, dafs die gröfstmögliche Ausflufsgeschwindigkeit eines Gases gleich der Schallgeschwindigkeit in demjenigen Gase ist, welches sich unmittelbar an der Ausflufsöffnung befindet. Man erhält diese Maximalgeschwindigkeit bei einem bestimmten Werte des Verhältnisses $p_1 : p_2$, der angenähert gleich 1,9 ist und von der Art des Gases fast unabhängig ist. So erhält man bei $p_2 = 1$ Atm. für p_1 den speziellen Wert $p_1' = 1{,}9$ Atm. Ist der Druck p_1 gröfser als p_1', so bilden sich im Gasstrahl stehende Wellen, d. h. periodische Dichteänderungen, die sich im Raume nicht verschieben. Die ihnen entsprechende Wellenlänge λ wird aus der Formel

$$\lambda = 0{,}88\, d \sqrt{\frac{p_1 - p_1'}{p_2}} = 0{,}88\, d \sqrt{\frac{p_1}{p_2} - 1{,}9}$$

gefunden, wo d der Durchmesser der Ausflufsöffnung ist. W. Wolff hat (1899) die Luftbewegungen bei heftigen Explosionen untersucht.

Das Ausströmen von Gasen aus Öffnungen haben Grashof, Zenner, Fliegner, H. Wilde, Hirn, Hugoniot, Haton de la Gonpillière, Salcher und Whitehead, Parenty, A. N. Mitinsky u. a. sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht.

Wenn ein Gas unter Druck durch eine sehr dünne Röhre hindurchströmt, so spielt die innere Reibung eine überwiegende Rolle. Man nennt dieses Strömen Transpiration. Wir wollen hier nur die entsprechende Formel anführen. Sei p_1 die Spannung des Gases am einen, p_2 am anderen Ende der Kapillarröhre, deren Länge L, deren Querschnitt σ ist. Ist dann η der Koeffizient der inneren Reibung (S. 497), so ist das Volumen V des in t Sekunden die Röhre durchströmenden Gases reduziert auf den Druck $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, gleich

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\,\sigma^2 t}{8\pi\eta L} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Nach dieser Formel kann man η finden.

Strömt ein Gas an einer festen Wand entlang, so nimmt man an, dafs die der Wand unmittelbar anliegende Gasschicht (vergl. S. 469) unbeweglich bleibt, dafs also ein Gleiten längs der Wand nicht stattfindet. Die Versuche von Kundt und Warburg (1895), sowie von Warburg allein haben gezeigt, dafs bei einem stark verdünnten Gase ein merkliches Gleiten desselben längs der Oberfläche fester Körper stattfindet.

§ 4. Gegenseitige Diffusion der Gase. Mit dem Worte „Diffusion“ bezeichnet man im allgemeinen eine ganze Gruppe von Erscheinungen, bei welchen ein Stoff in den anderen eindringt oder ihn durchdringt. Je nach der Art der Stoffe unterscheidet man verschiedene Arten Diffusion von Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern.

Wir wollen zunächst die gegenseitige Diffusion zweier Gase betrachten. Denken wir uns zwei Gefäfse, welche zwei verschiedene sich chemisch nicht beeinflussende Gase unter demselben Druck p enthalten, vertikal übereinander aufgestellt, so dafs sich das leichtere Gas im oberen Gefäfse befindet. Verbindet man dann diese Gefäfse durch eine Röhre, so beginnen sich die Gase allmählich miteinander zu vermengen; das leichtere Gas senkt sich und dringt in das schwerere ein, während letzteres aufsteigt und sich mit dem leichteren Gase vermengt. Man sagt in diesem Falle, das eine Gas „diffundiert“ in das andere. Nach Verlauf einer gewissen Zeit enthalten beide Gefäfse ein gleichartiges Gemisch aus beiden Gasen.

Die Erscheinung der Diffusion selbst erklärt sich vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie ganz ungezwungen. Da sich die Moleküle des einen Gases nach allen Richtungen frei bewegen, so dringen sie allmählich in das Innere des anderen Gases ein; dafs die Diffusion ziemlich langsam erfolgt, erklärt sich durch das ununterbrochene Aufeinanderprallen der Moleküle beider Gasarten. So lange die Diffusion noch nicht beendet ist, sind in verschiedenen Höhen x, die man etwa

vom Boden des unteren Gefäfses aus rechnen kann, Gemische mit verschiedenem Prozentgehalt beider Gase oder verschiedenen Partialdrucken p_1 und p_2 dieser Gase vorhanden, wobei indes für alle Werte von x, d. h. in allen Horizontalschichten $p_1 + p_2 = p$ ist.

Die Gasmenge, welche in der Zeit t durch den horizontalen Querschnitt s in der Richtung von x hindurchströmt, ist der Geschwindigkeit proportional, mit welcher der Partialdruck p_1 dieses Gases in der Richtung von x abnimmt. Setzt man für einen gegebenen Moment $p_1 = f(x)$, so erhält man für das Volumen v dieser Gasmenge, reduziert auf die Druckeinheit, folgenden Ausdruck

$$v = - kst \frac{dp_1}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Der Faktor k heifst der Diffusionskoeffizient. Derselbe ist numerisch gleich dem Volumen, welches bei der Einheit des Druckes von einer Gasmenge eingenommen wird, die in der Zeiteinheit ($t = 1$) durch die Einheit des horizontalen Querschnitts ($s = 1$) hindurchströmt, falls sich der Partialdruck dieses Gases im Gemisch bei vertikaler Verschiebung um die Einheit der Länge um Eins ändert $\left(\frac{dp_1}{dx} = 1\right)$. Der Koeffizient k hängt von der Beschaffenheit der beiden gewählten Gase und von ihrer Temperatur ab. Es mögen hier einige Werte desselben folgen:

	k
H—O	0,722 $\frac{(\mathrm{cm})^2}{\mathrm{sec}}$
H—CO	0,642
H—CO_2	0,558
O—CO_2	0,141
O—CO	0,180.

Hierbei ist s in Quadratcentimetern, die Zeit in Sekunden ausgedrückt. Der Koeffizient k ist angenähert proportional dem Quadrate der absoluten Temperatur der ineinander diffundirenden Gase.

Waitz (1882) und Obermayer (1880 bis 1883) haben speziell die Diffusion von Luft und Kohlensäure experimentell untersucht. M. Brillouin folgert aus diesen Versuchen, dafs k von dem augenblicklichen Mischungsverhältnis der beiden Gase unabhängig ist. Die mathematische Theorie der Diffusion ist von verschiedenen Forschern, z. B. von Hausmaniger (1882) und in letzter Zeit Brillouin (1900) entwickelt worden.

§ 5. Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände; Effusion. Befinden sich zu beiden Seiten einer porösen Scheidewand

zwei verschiedene Gase, so beginnen sie sich ebenfalls zu mischen, indem sie die Scheidewand durchdringen. Dieses Durchdringen einer porösen Scheidewand seitens der Gase bezeichnet man bisweilen im Gegensatz zu anderen Diffusionserscheinungen als Effusion. Besonders haben sich mit dieser Erscheinung Graham (1834 und 1846), Bunsen (1857), Parenty (1896 bis 1897) und Donnan (1900) beschäftigt.

Graham leitete aus seinen Versuchen das folgende Gesetz ab. Die Geschwindigkeit, mit welcher Gase durch eine poröse Scheidewand diffundieren, ist proportional dem Druck, unter welchem sich die Gase befinden und indirekt proportional der Quadratwurzel aus ihrer Dichte δ. Vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie ist dieses Gesetz leicht zu verstehen. Da sich bei gleichem Druck und Temperatur in gleichen Volumina die gleiche Anzahl Moleküle verschiedener Gase befinden, so mufs die Geschwindigkeit, mit welcher die Gase poröse Scheidewände durchdringen, vorzugsweise von der mittleren Geschwindigkeit Ω abhängen, mit welcher sich die Moleküle fortschreitend bewegen. Wir haben aber gesehen, dafs die Geschwindigkeit Ω indirekt proportional $\sqrt{\delta}$ ist [vergl. (51) auf S. 494] und damit erklärt sich das Diffusionsgesetz.

Die poröse Scheidewand kann aus ungebranntem Thon, Graphit, Gips, Kreide, Hydrophan, geprefstem Kalkhydratpulver, Magnesia u. s. w. bestehen. Der Grahamsche Apparat ist in Fig. 272 abgebildet. In den Cylinder CD ragt die weite Röhre AB, die mit einer Skalenteilung versehen ist, hinein; sie ist unten offen, oben durch die poröse Scheidewand B verschlossen. Der Cylinder CD ist mit einem durchbohrten Stopfen verschlossen, durch welchen die Röhren E und F hindurchführen. Durch letztere strömt in der Pfeilrichtung ein kontinuierlicher Gasstrom. Die Röhre AB füllt man zunächst mit Quecksilber und taucht sie mit ihrem unteren Ende in eine tiefe Quecksilberwanne. Sobald das Gas die Scheidewand B zu durchdringen beginnt, fängt das Quecksilber an zu fallen. Ist dasselbe bis auf eine bestimmte Höhe gesunken, so hebt man die Röhre ganz allmählich, so dafs die Höhe der Quecksilbersäule in ihr unverändert bleibt; die Spannung des Gases in AB wird dann konstant, obgleich sich das Gasvolumen ununterbrochen vergröfsert. Man bestimmt nun die Zeit t, während welcher sich das Gasvolumen in AB um einen bestimmten

Fig. 272.



Betrag vergröfsert (in den Versuchen von Graham um 2,2 ccm). Die nachstehende Tabelle zeigt, dafs diese Zeiten t direkt proportional $\sqrt{\delta}$ sind, woraus dann folgt, dafs die Geschwindigkeit der Diffusion indirekt proportional $\sqrt{\delta}$ ist.

	t	$\sqrt{\delta}$
Sauerstoff	1	1
Luft	0,9501	0,9507
Kohlensäure	1,1860	1,1760
Wasserstoff	0,2505	0,2502.

Ferner zeigte sich, dafs die Zeitdauer t indirekt proportional der Druckdifferenz des Gases zu beiden Seiten der porösen Scheidewand ist.

Füllt man die Röhre AB vorher mit irgend einem Gase und läfst durch CD ein anderes Gas hindurchströmen, so beginnt das erstere aus AB auszuströmen, während das andere einströmt. Nach einiger Zeit enthält AB nur das zweite Gas, doch nicht mehr in der Menge, in der das erste Gas vorhanden war; diese Gasmengen sind vielmehr indirekt proportional den Quadratwurzeln aus den Dichten der beiden entsprechenden Gase. Dufour fand, dafs die Diffusion von einer Temperaturänderung begleitet ist; auf derjenigen Seite der Scheidewand, von der aus das leichtere Gas einströmt, das also schneller diffundiert, erfolgt eine Erhöhung, auf der anderen Seite eine Erniedrigung der Temperatur. Feddersen beobachtete auch die entgegengesetzte Erscheinung, die man als Thermodiffusion bezeichnet: befindet sich zu beiden Seiten der porösen Scheidewand ein und dasselbe Gas unter demselben Druck, und erwärmt man die eine Seite der Scheidewand, so beginnt das Gas in der Richtung von der wärmeren nach der kälteren Seite zu diffundieren.

Eine sehr genaue theoretische und experimentelle (Helium und Argon) Untersuchung der Effusionsgesetze hat Donnan (1900) ausgeführt. Es zeigt sich, dafs die Effusionsdauer t, welche, wie wir sahen, proportional $\sqrt{\delta}$ ist, aufserdem abhängt von dem Verhältnis $k = c_p : c_v$ der beiden specifischen Wärmen und von dem Reibungskoeffizienten η des Gases.

Befindet sich auf der einen Seite der porösen Scheidewand ein Gemisch aus Gasen von ungleicher Dichte, so durchdringen diese die Scheidewand mit verschiedener Geschwindigkeit, infolgedessen sich die Zusammensetzung des Gasgemisches während der Diffusion ändert. Wiederholt man diesen Vorgang mehrmals, so kann man bisweilen ein Gas vollkommen von dem anderen trennen; hierauf beruht eine besondere Art der Gasanalyse, die man Atmolyse nennt.

Aus der grofsen Zahl von Versuchen, welche die verschiedene Diffusionsfähigkeit der Gase darthun, wollen wir hier nur einen be-

schreiben. Der poröse Thoncylinder A (Fig. 273) — wie er etwa in den galvanischen Elementen von Daniell u. a. vorkommt — ist mit dem Boden nach oben gekehrt und unten durch einen Kork verschlossen, durch welchen die Röhren b und c führen. Erstere reicht mit ihrem unteren Ende in ein Gefäfs mit gefärbtem Wasser, durch letztere strömt Wasserstoff oder Leuchtgas ein. So lange das Gas in A einströmt und die dort vorhandene Luft durch b verdrängt, steigen im unteren Gefäfse Luftblasen auf, sobald man aber den Gaszuflufs abstellt, steigt das Wasser in b, da das Gas schneller aus dem Thoncylinder A austritt, als die Luft von aufsen eindringt.

Fig. 273.



§ 6. Diffusion der Gase durch Kautschuk und durch glühende Metalle. Mitchell hat (1831) zuerst gezeigt, dafs Gase durch dünne Kautschukplatten hindurchdringen können. Graham beobachtete die Diffusion von Gasen durch Kautschuk ins Vakuum. Dabei erwies sich, dafs die Geschwindigkeit dieser Diffusion für die verschiedenen Gase überaus verschieden ist und nicht in der Weise von der Gasdichte δ abhängt, wie dies bei der Diffusion durch poröse Scheidewände der Fall ist. Für die Diffusionsgeschwindigkeit v fand Graham folgende relative Werte:

	N	CO	CH_4	O	H	CO_2
$v =$	1	1,113	2,15	2,56	5,50	13,59.

Bemerkenswert ist die Diffusionsgeschwindigkeit für O im Vergleich zu N. Hat Luft die Kautschukplatte passiert, so enthält sie nicht mehr 21 Proz., sondern 40 Proz. Sauerstoff. Auch Wroblewski hat (1877) die Diffusion der Gase durch Kautschuk untersucht.

Durch rotglühendes Platin und Eisen diffundiert Wasserstoff; 1 qcm Oberfläche einer Platinröhre, deren Wanddicke 1,1 mm beträgt, läfst bei Rotglut in einer Minute 490 ccm Wasserstoff hindurch. Eine glühend gemachte Palladiumröhre, durch welche ein Gemisch aus H und CO strömt, trennt diese Gase vollkommen voneinander; nur der Wasserstoff durchdringt ihre Wandungen. Glühendes Platin oder Palladium spielt also die Rolle einer halbdurchlässigen (semipermeabeln) Wand. Wir werden weiter unten, besonders aber in Band III (osmotischer Druck) sehen, welche grofse Rolle solche halbdurchlässige Wände in der Lehre von den Flüssigkeiten (Lösungen) spielen. Silber

läfst bei hoher Temperatur bedeutende Mengen von Sauerstoff hindurch. Man mufs glauben, dafs man es in allen diesen Fällen mit einer Absorption des Gases durch das Kautschuk oder Metall zu thun hat; an der Seite, welche nicht mit dem Gase in Berührung steht, scheidet sich dann das absorbierte Gas wieder aus. Gleichzeitig mit diesem Vorgange findet auch innerhalb der Platte eine faktische Diffusion statt.

§ 7. Diffusion der Gase durch Flüssigkeiten. Das eben Gesagte bezieht sich aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die Diffusion der Gase durch Flüssigkeitsschichten; auf der einen Seite der Schicht wird das Gas von der Flüssigkeit absorbiert, auf der anderen Seite scheidet es sich aus ihr wieder aus. Gleichzeitig aber erfolgt auch eine Diffusion des Gases im Innern der Flüssigkeitsschicht.

Eine Seifenblase, die in einem offenen Glase auf Kohlensäure schwimmt, wird allmählich schwerer und nimmt an Volumen zu, da die Kohlensäure in sie eindringt. Befindet sich im Innern einer langen, angefeuchteten Glasröhre, die einseitig verschlossen ist, eine Seifenwasserlamelle und läfst man darauf zu beiden Seiten derselben verschiedene Gase einströmen, so beginnt die Lamelle an der Röhre entlang zu gleiten, da die Gase sie mit ungleicher Geschwindigkeit durchsetzen und sich daher der Druck im verschlossenen Röhrenende steigert oder vermindert.

Wroblewski hat die allmähliche Absorption eines Gases durch eine Flüssigkeitssäule untersucht, über der sich das Gas befand. Er fand, dafs die absorbierte Gasmenge dem Löslichkeitskoeffizienten des Gases proportional ist, ebenso dem Diffusionskoeffizienten, dem Gasdrucke und der Quadratwurzel aus der Diffusionsdauer. Mit derselben Frage haben sich auch Stefan, Joh. Müller und andere beschäftigt. Exners Versuche haben gezeigt, dafs die Geschwindigkeit der Diffusion eines Gases durch eine flüssige Lamelle direkt proportional dem Löslichkeitskoeffizienten des Gases in der Flüssigkeit und indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Gasdichte ist. Pranghe hat die Exnerschen Versuche wiederholt und gezeigt, dafs obiges Gesetz für eine Lamelle aus Leinöl nicht gilt. Hagenbach hat die Diffusion von Gasen durch eine Gelatineschicht und Huefner durch Wasser und eine Schicht von Agar-Agar (pflanzliche Gelatine) untersucht. Die Hagenbachschen Versuche haben dabei keine Bestätigung des Exnerschen Gesetzes erbracht.

§ 8. Widerstand der Gase gegen die Bewegung fester Körper. Da das vorliegende Kapitel den in Bewegung befindlichen Gasen gewidmet ist, so können wir hier auch den Einflufs betrachten, den ein Gas und ein sich in demselben bewegender Körper aufeinander

ausüben und dieses um so mehr, als auch das den Körper umgebende Gas hierbei nicht in Ruhe bleibt. Ein sich in einem Gase bewegender fester Körper ruft vor sich her eine Verdichtung, hinter sich eine Verdünnung des Gases hervor. Führt der Körper schnelle Schwingungen aus, so ruft er in dem Gase Verdichtungen und Verdünnungen hervor, die sich nach allen Seiten hin ausbreiten; diese Erscheinung werden wir in der Lehre vom Schall eingehender betrachten. Dreht sich eine Kugel, Cylinder, Scheibe, Ring oder ein ähnlicher Rotationskörper um seine Achse, so gleiten die Oberflächen des Körpers und Gases blofs aneinander vorbei, wobei indes eine gewisse zunächst befindliche Gasschicht von dem Körper mit fortgerissen wird und in Bewegung gerät. Zwischen dem festen Körper und dem Gase findet also eine Reibung statt, die auf den Körper wie eine seine Geschwindigkeit verzögernde Kraft einwirkt. Bei fortschreitender Bewegung eines festen Körpers in einem Gase summieren sich die Wirkungen der vor ihm entstehenden Verdichtung, hinter ihm sich bildenden Verdünnung, die unmittelbare Reibung und die Übertragung eines Teils seiner Energie an die nächsten, ebenfalls in Bewegung geratenden Gasschichten und ergeben eine Kraft, die man als Widerstand des Gases gegen die Bewegung eines in ihm befindlichen festen Körpers bezeichnet. Übrigens unterscheiden sich die eben genannten Komponenten dieses Widerstandes nicht wesentlich voneinander; nach der kinetischen Gastheorie hat man die ursprüngliche Ursache aller dieser Komponenten des Widerstandes darin zu suchen, dafs die Zahl und Stärke der Stöfse, welche der Körper durch die Gasmoleküle erfährt, gröfser auf der Seite, nach welcher er sich bewegt, als auf der entgegengesetzten Seite ist.

Der Widerstand eines Gases gegen die Bewegung eines Körpers ist eine Funktion der Geschwindigkeit v dieser Bewegung; die Form dieser Funktion ist jedoch unbekannt. Newton kam zu dem Schlufs, der Widerstand f sei proportional v^2; verschiedene Beobachtungen weisen darauf hin, dafs f angenähert durch folgende Formel dargestellt wird

$$f = av + bv^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

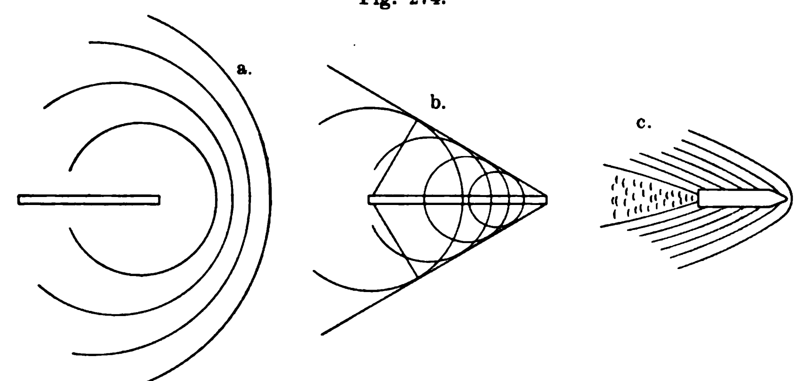
Es ist dies eine empirische Formel; für sehr grofse v wächst der Widerstand f stärker als das Quadrat der Geschwindigkeit, so dafs man die Formel $f = av + bv^2 + cv^3$ verwenden mufs, d. h. die drei ersten Glieder der nach der Maclaurinschen Reihe entwickelten Funktion $f = F(v)$. Der Luftwiderstand hängt von der Gröfse der Oberfläche ab, welche der sich bewegende Körper besitzt. Ein ebenes, in schnelle Rotation versetztes Rad bewegt sich auch im lufterfüllten Raume recht lange, während ein solches mit quergestellten Flügeln sehr bald zur Ruhe gelangt; unter dem Rezipienten der Luftpumpe drehen sich beide Räder nahezu gleich lange. Schellbach, M. Rykatschew, Mannes-

mann u. a. haben die Gröfse des Widerstandes untersucht, den verschiedenartige Körper, namentlich Scheiben bei ihrer Bewegung in der Luft erfahren. Mannesmann findet, dafs, wenn sich eine ebene Scheibe senkrecht zu ihrer Oberfläche durch die Luft bewegt, die Newtonsche Formel für Geschwindigkeiten zwischen $v = 2{,}45$ m und $v = 24$ m in Geltung bleibt. Bei gleicher Oberfläche erfährt eine runde Scheibe den geringsten Widerstand. Mit Zunahme der Temperatur nimmt der Luftwiderstand nicht, wie man früher glaubte, ab. Der Luftwiderstand vermindert die Beschleunigung beim freien Fall der Körper, da die Kraft f dem Gewichte p entgegengewirkt. Ist g die Beschleunigung im Vakuum, g' in der Luft, so ist $g' : g = (p - f) : p$; hieraus folgt

$$g' = g\left(1 - \frac{f}{p}\right) \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Je geringer das Gewicht p eines Körpers ist, um so kleiner ist auch g' bei gleicher Geschwindigkeit und Körperform; das ist auch der Grund, weshalb leichte Körper in der Luft langsamer fallen als

Fig. 274.

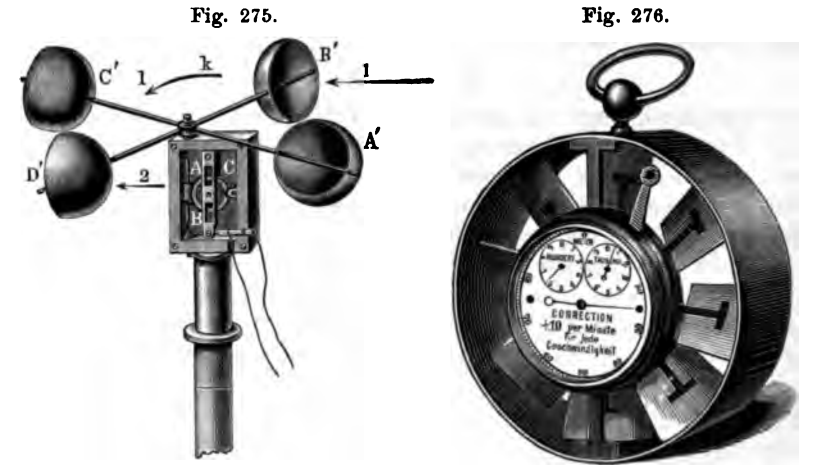


schwere. Besonders interessant sind die Erscheinungen, welche bei den Bewegungen von Geschossen auftreten, welche mit ungeheurer Geschwindigkeit aus den Geschützen neuerer Konstruktion hervorgeschleudert werden. Mach ist es zuerst (1887) gelungen, diese Erscheinungen zu studieren und sogar im photographischen Bilde festzuhalten. Dabei hat sich denn gezeigt, dafs ein cylindrisches Geschofs bei seinem Fluge kontinuierlich vor sich her vereinzelte Verdichtungen hervorruft, die sich nacheinander nach allen Seiten mit der Schallgeschwindigkeit, d. h. mit etwa 340 m pro Sekunde ausbreiten. Ist die Geschofsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit, so schreiten diese Wellen vor dem Geschosse her, wie in Fig. 274 a ersichtlich; bei einer Geschwindigkeit dagegen, welche gröfser als die Schallgeschwindigkeit ist, mufs für einen gegebenen Moment, der Theorie

nach, eine Verteilung der verdichteten Wellenflächen auftreten, wie sie Fig. 274 b zeigt; die Verdichtungen müssen von einem Kegelmantel eingehüllt sein, dessen Form dadurch bestimmt wird, dafs der Sinus des halben an seiner Spitze gebildeten Winkels gleich dem Verhältnisse zwischen Schall- und Geschofsgeschwindigkeit ist. Wie die Fig. 274 c zeigt, haben die Beobachtungen gelehrt, dafs die Erscheinung in Wirklichkeit komplizierter ist. Die äufsere Grenze des Verdichtungsgebiets wird durch die Oberfläche eines Rotationsparaboloids gebildet; im Innern dieses Gebiets treten Streifen auf und hinter dem Geschofs bilden sich komplizierte Wirbel der in diesen Raum von allen Seiten einströmenden Luft. Die Frage nach dem Luftwiderstande gegen die Bewegung von Geschossen gehört in die Ballistik. Dort wird gezeigt, dafs, wenn man die Formel $f = av^2$ anwendet, für $v < V$ (wo V die Schallgeschwindigkeit ist) der Koeffizient a ziemlich konstant bleibt, ist jedoch $v > V$, so wächst a sehr schnell auf das 2,8 fache und bleibt dann bei weiterer Zunahme von v wieder fast konstant. R. Emden hat versucht, diese Erscheinung durch die von Mach entdeckte Bildung einer Verdichtung vor dem Geschofs zu erklären.

Ein in Bewegung befindliches Gas übt auf die Körper einen Druck aus und kann sie in Bewegung versetzen; man benutzt letztere Be-

Fig. 275. Fig. 276.



wegung zur Messung der Geschwindigkeit, mit welcher sich das Gas selbst bewegt. Hierher gehören die Apparate, welche zur Messung der Windgeschwindigkeit oder der Geschwindigkeit dienen, mit welcher Luft und andere Gase durch Röhren hindurchströmen. Die Beschreibung der verschiedenartigen Anemometer und Anemographen gehört in die Meteorologie. Wir wollen hier zuerst auf das Anemometer von Robinson verweisen. Dasselbe ist in Fig. 275 abgebildet; es besteht aus einer vertikalen Achse AB, an welcher

zwei zu einander senkrechte Stangen befestigt sind, die an ihren Enden die hohlen Halbkugeln A', B', C' und D' tragen. Hat der Wind die Richtung der Pfeile 1 und 2, so dreht sich die Achse AB und die Halbkugeln in der Richtung des Pfeiles kl. Eine endlose Schraube an der Achse AB und die Zählvorrichtung C erlauben die Geschwindigkeit v' zu bestimmen, mit welcher sich die Halbkugeln drehen. Die Windgeschwindigkeit wird dann nach der Formel $v = kv'$ gefunden, wo k ein konstanter Faktor ist, den man leicht ein für allemal für den gegebenen Apparat bestimmen kann.

In Fig. 276 (a. v. S.) ist ein Anemometer abgebildet, welches sich um eine horizontale Achse dreht. Es dient ebenfalls zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit, kann aber auch benutzt werden, um die Geschwindigkeit eines Gasstromes in einer Röhre zu messen. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich hier die schräg gestellten Schaufeln drehen, dient auch hier als Mafs für die Geschwindigkeit des Gasstroms oder des Windes.

Mit dem Studium des Luftwiderstandes gegen bewegte Körper hat sich unter anderen auch M. A. Rykatschew befafst.

§ 9. Dissociation der Gase. Wir haben gesehen, dafs das Molekulargewicht μ eines Gases oder Dampfes und seine auf Luft bezogene Dichte δ durch die Formel

$$\mu = 28{,}9\,\delta \qquad (27)$$

verknüpft sind, vergl. (1) auf S. 407. Auf dieser Formel beruht eine der Methoden zur Bestimmung des Molekulargewichts eines Gases oder Dampfes und ferner auch der chemischen Konstitutionsformel, wenn der Prozentgehalt der in einer Verbindung vorkommenden Elemente durch qualitative Analyse festgestellt ist.

Indes ist schon seit lange bekannt, dafs man nach Formel (27) in einigen Fällen einen Wert für das Molekulargewicht erhält, welcher mit dem auf anderem Wege sicher bestimmten Werte durchaus nicht übereinstimmt. So haben die Dämpfe von Salmiak eine Dichte, die bei hohen Temperaturen fast zweimal kleiner ist, als die der Formel NH_4Cl entsprechende; die Dämpfe des karbaminsauren Ammons NH_2COONH_4 haben eine Dichte, welche dreimal kleiner als die theoretische ist, dagegen ist diejenige der Dämpfe von Essigsäure gröfser als sie nach der Formel CH_3COOH erhalten wird. Ähnliche anomale Dichten beobachtet man bei höheren Temperaturen für

N_2O_4, PCl_5, NHO_3, PBr_3, NH_5S, $SbCl_5$, PH_4Cl u. s. w.

In analoger Weise zeigen auch die Dämpfe mancher Elemente, wie z. B. des Jods und Schwefels, bei Erwärmung bedeutende Änderungen der Dampfdichte.

Diese Abweichungen könnte man damit erklären, dafs das Avo-

gadrosche Gesetz (S. 406), nach welchem wir Formel (27) abgeleitet hatten, für einige Gase oder Dämpfe keine Geltung hat. Diese Erklärung ist aber nicht richtig. Cannizaro, Kopp und Kekulé haben (1858) fast gleichzeitig gezeigt, dafs die anomalen Dampfdichten durch einen Zerfall des Dampfmoleküls in zwei oder mehrere Teile erklärt werden müssen. Eine ähnliche Art des Zerfalls der Moleküle wird auch in festen und flüssigen Körpern beobachtet; man bezeichnet derartige Vorgänge nach dem Vorschlage von St. Claire-Deville als Dissociation.

Es ist leicht verständlich, weshalb die Dichte δ eines Dampfes sich beim Zerfall seiner Moleküle verringern mufs. Nehmen wir an, im Volumen v seien zunächst N nicht dissociierte Moleküle enthalten, jedes derselben habe die Masse m; die Temperatur bezeichnen wir mit t, den Druck mit p. Auf S. 481 hatten wir, vergl. Formel (10), den folgenden Ausdruck erhalten

$$pv = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Wenn jedes Molekül in Teile zerfällt, deren Massen m_1, m_2, m_3, ... m_n, deren Geschwindigkeiten u_1, u_2, ... u_n sind, so werden im Volumen v nunmehr nN Moleküle enthalten sein. Die Wucht eines jeden von ihnen ist gleich derjenigen des nicht dissociierten Moleküls (vergl. S. 485) und hieraus folgt, dafs der neue Druck p_1 sich aus der Gleichung

$$p_1 v = \frac{1}{3} N m_1 u_1^2 + \frac{1}{3} N m_2 u_2^2 + \cdots + \frac{1}{3} N m_n u_n^2 = npv$$

finden läfst, denn es ist

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \cdots = \frac{1}{2} m_n u_n^2 = \frac{1}{2} m u^2,$$

somit ist

$$p_1 = np.$$

Betrachtet man jetzt ein Volumen v des zerlegten Dampfes bei der Temperatur t und dem Drucke p, so müssen in ihm wiederum N Moleküle enthalten sein, also $N:n$ Moleküle jeder Art. Hieraus ist ersichtlich, dafs die Masse dieses Dampfes, mithin auch seine Dichte δ jetzt n mal kleiner sein müssen als Masse und Dichte des nicht dissociierten Dampfes. Sind alle Moleküle zerfallen, so sagt man, die Dissociation sei beendet.

Die anomale Dichte der Chlorammoniumdämpfe NH_4Cl erklärt sich nach obigem durch den Zerfall seiner Moleküle in NH_3 und HCl; das karbaminsaure Ammon NH_2COONH_4 zerfällt in $NH_3 + NH_3 + CO_2$; N_2O_4 in $NO_2 + NO_2$; PCl_5 in $PCl_3 + Cl_2$; PBr_5 in $PBr + Br_2$; NH_5S in $NH_3 + H_2S$; PH_4Cl in $PH_3 + HCl$ u. s. w. Umgekehrt weist die zu grofse Dichte der Essigsäuredämpfe darauf hin,

dafs in ihnen Moleküle vorhanden sind, deren Zusammensetzung komplizierter ist, als es die Formel $C_2O_2H_4$ ausdrückt (Polymerisation).

Überhaupt erfolgt der Zerfall der Moleküle allmählich in dem Mafse, als sich die Temperatur erhöht, so dafs in einem Dampfe bei gegebener Temperatur und Druck ein gewisser Bruchteil γ aller Moleküle dissociiert ist, während nur der andere Teil $1 - \gamma$ der Moleküle sich in dem Dampfe in nicht dissociiertem Zustande vorfindet.

Wir haben es hier mit einem der vielen Fälle von dynamischem Gleichgewicht zu thun; in einer gegebenen Zeit zerfallen ebenso viele zusammengesetzte Moleküle in ihre Bestandteile, als sich bei günstigen Zusammenstöfsen aus diesen vorher gebildeten Teilen neue zusammengesetzte Moleküle bilden. Der Bruch γ wird der Dissociationsgrad genannt; man kann denselben bestimmen, wenn die theoretische Dichte δ des nicht dissociierten Dampfes bekannt ist, die nach Formel (27) berechnet wird, ferner die wahre Dichte Δ des Dampfes und die Zahl n der Bestandteile, in welche das Molekül zerfällt. Die Zahl der Moleküle ist infolge der Dissosiation von N auf $N\gamma n + N(1 - \gamma)$ angewachsen, denn $N\gamma$ Moleküle sind in je n Teile zerfallen. Hieraus folgt

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{N}{N\gamma n + N(1-\gamma)} = \frac{1}{1 + (n-1)\gamma} \quad \cdot \cdot \quad (28)$$

Danach ist

$$\gamma = \frac{\delta - \Delta}{(n-1)\Delta} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (29)$$

Für $n = 2$ ist

$$\gamma = \frac{\delta}{\Delta} - 1 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (30)$$

Im Falle vollständiger Dissociation ist $\gamma = 1$ und nach (28)

$$\Delta = \frac{\delta}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (31)$$

Für $n = 2$ hat man im letzteren Falle $\Delta = \delta : 2$.

Die Theorie, welche in Band III behandelt werden soll, zeigt, dafs sich der Dissociationsgrad bei konstanter Temperatur t im Zusammenhange mit dem Drucke p ändert; bei sehr geringem Drucke nähert sich γ der Einheit, also Δ dem Werte $\delta : n$. Umgekehrt ist bei sehr hohem Drucke p der Dissociationsgrad gering und Δ nahezu gleich δ. So erhält man z. B. bei $t = 49{,}7^0$ für N_2O_4 folgende Werte für γ entsprechend den verschiedenen Werten von p:

p	γ	p	γ
0 mm	1	182,69 mm	0,690
26,80 „	0,930	261,37 „	0,630
93,75 „	0,789	497,75 „	0,493.

Bisweilen verrät sich die Dissociation durch Farbenänderung des Dampfes; so ist z. B. N_2O_4 farblos und bräunt sich bei der Dissociation infolge der Bildung von NO_2; die Dämpfe von PCl_5 erhalten bei hoher Temperatur einen grünlichen Farbenton, der durch das Auftreten von freien Cl_2-Molekülen hervorgerufen wird. Läfst man Salmiakdämpfe durch Asbest diffundieren, so weist der hindurchgegangene Dampf eine alkalische, der zurückgebliebene eine saure Reaction auf, da NH_3 und HCl die poröse Scheidewand mit ungleicher Geschwindigkeit durchsetzen.

Der Dissociationsgrad γ wächst mit der Temperatur; daher wird die Erwärmung eines Dampfes von einer inneren Dissociationsarbeit begleitet, infolgedessen eine erhöhte Spannung und folglich ein vermehrter Energievorrat erscheint, wie aus der Formel $pv = \frac{2}{3} J$ auf S. 482 hervorgeht. Es ist daher die Wärmekapazität des Dampfes während der Dissociation ganz aufserordentlich grofs und vermindert sich schnell bei Erhöhung der Temperatur in dem Mafse, als sich die Dissociation ihrer Grenze nähert.

Unter Benutzung von Formel (29) kann man den Dissociationsgrad γ eines Dampfes bei verschiedenen Temperaturen berechnen, wenn man seine Dichte Δ beobachtet. Als Beispiel wählen wir die Dissociation von N_2O_4. Das Molekulargewicht beträgt

$$\mu = 2 \times 14 + 4 \times 16 = 92;$$

folglich ist die theoretische Dichte

$$\delta = \frac{92}{28{,}9} = 3{,}19$$

[vergl. Formel (27)]. Da N_2O_4 in $NO_2 + NO_2$ zerfällt, so ist $n = 2$ und mithin giebt Formel (30) den Wert $\gamma = \frac{3{,}19}{\Delta} - 1$. In der folgenden Zusammenstellung sind die Temperaturen t, die Dichten Δ des Dampfes, sowie die Gröfsen 100γ gegeben, welche zeigen, wie viel Prozent aller Moleküle der Dissociation unterliegen

t	Δ	100γ
26,7	2,65	20,0
39,8	2,46	29,2
60,2	2,08	52,8
80,6	1,80	76,6
100,1	1,68	89,2
121,5	1,62	96,2
135,0	1.60	98,7

Die Dissociation vermindert sich, wenn man dem Dampfe einen der Bestandteile beimengt, in welche er zerfällt, z. B. NH_3 oder HCl

den Salmiakdämpfen beimengt. Die Dämpfe der Elemente, deren Moleküle mehr als ein Atom enthalten, können ebenfalls Dissociation zeigen. So vermindert sich beispielsweise die Dichte der Joddämpfe bei hoher Temperatur und geringem Drucke infolge des Zerfalles seiner Moleküle J_2 in $J + J$. Wenn sich Schwefel verflüchtigt, so enthält sein Dampf höchst wahrscheinlich die Moleküle S_8, welche bei weiterer Temperatursteigerung wahrscheinlich in S_2-Moleküle zerfallen.

Sehr ausführlich wird auf die Dissociation der Gase im III. Bande eingegangen werden.

§ 10. **Schlufsbetrachtung.** Wir haben in diesem Abschnitte eine ganze Reihe von Eigenschaften der Gase und verschiedene Erscheinungen, welche sich in ihnen abspielen, betrachtet. Dabei haben wir indes viele Fragen von gröfster Wichtigkeit ganz aufser acht gelassen. So hatten wir z. B. eingehend die Eigenschaften der vollkommenen Gase betrachtet, denen wir unter anderem die Abwesenheit innerer Arbeit zuschrieben. Beim Übergange zu den unvollkommenen, in Wirklichkeit existierenden Gasen haben wir uns darauf beschränkt, ihre Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze in Betracht zu ziehen und auf die van der Waalssche Gleichung hinzuweisen. Nicht beschrieben haben wir dagegen diejenigen Versuche, durch welche die Existenz einer inneren Arbeit bei Ausdehnung unvollkommener Gase bewiesen wird und wir haben auch keine eingehendere theoretische Betrachtung dieser Gase vorgenommen. Ebenso haben wir die umfangreichen Lehren von der thermischen Ausdehnung und Wärmeleitung der Gase, die Methoden zur Bestimmung der Wärmekapazität der Gase und besonders die Verflüssigung der Gase nicht behandelt. Alle diese Fragen werden in der Wärmelehre ihre Erledigung finden. Aber auch in allen den übrigen Abschnitten werden wir den Gasen noch oft begegnen und uns mit verschiedenen Eigenschaften derselben bekannt machen, die sich z. B. auf akustische, optische, magnetische und elektrische Erscheinungen, an denen sie teilnehmen, beziehen. In dem vorliegenden vierten Abschnitte, der Lehre von den Gasen, ist nur alles dasjenige zusammengefafst worden, was aus den übrigen Abschnitten als für den gasförmigen Zustand der Materie besonders wichtig und charakteristisch abgesondert werden konnte, ohne dafs dadurch die folgerechte und systematische Behandlung des gesamten Stoffes hätte leiden müssen. In ähnlicher Weise soll in den beiden folgenden Abschnitten die Lehre von den flüssigen und festen Körpern behandelt werden.

Litteratur.

Ausströmen der Gase.

Mach und Salcher: Wien. Ber. **98**, 1889 (7. November); Wied. Ann. **42**, 144, 1890.
Mach: Wien. Ber. **106**, 1025, 1898.
R. Emden: Wied. Ann. **69**, 264, 426, 453, 1899.
W. Wolff: Wied. Ann. **69**, 329, 1899.
Grashof: Zeitschr. d. Ver. d. Ingenieure 1863.
Zenner: Civilingenieur **20**, 1.
Fliegner: Civilingenieur **20**, 44.
H. Wilde: Phil. Mag. Nr. 133, S. 494, 1886.
Hirn: Compt. rend. **103**, 109, 371, 1232, 1886.
Hugoniot: Compt. rend. **102**, 1545, 1886; **103**, 241, 1179, 1253, 1886; **104**, 46, 1897.
Haton de la Gonpilière: Compt. rend. **103**, 661, 708, 785, 1886.
Salcher und Whitehead: Wien. Ber. **98**, 267, 1389.
Parenty: Ann. ch. et phys. (7) **8**, 5, 1896; **12**, 289, 1897; Compt. rend. **113**, 184. 493, 594, 1891; **119**, 412, 1894.
Mitinsky: Das Ausströmen der Gase (russ.) St. Petersburg 1898.
Kundt und Warburg: Pogg. Ann. **155**, 337, 1875.
Warburg: Pogg. Ann. **159**, 399, 1876.

Diffusion der Gase.

Graham: Phil. Mag. (3) **2**, 175, 269, 351, 1833; Pogg. Ann. **28**, 331, 1833; Phil. Trans. 1863; Liebigs Ann. **131**, 1, 1864; Pogg. Ann. **129**, 549, 1866.
Bunsen: Gasometrische Methoden 1857, S. 209.
Parenty: Ann. ch. et phys. (7) **8**, 1, 1896; **12**, 289, 1897.
Donnan: Phil. Mag. (5) **49**, 423, 1900.
Emden: Wied. Ann. **69**, 264, 1899.
Dufour: Arch. Sc. phys. (2) **49**, 103, 1873.
Feddersen: Pogg. Ann. **148**, 302, 1873.
Mitchell: J. of the Roy. Inst. **2**, 101, 307, London 1831; Pogg. Ann. **129**, 550, 1866.
Wroblewski: Wied. Ann. **2**, 481, 1877; **4**, 268, 1878; **7**, 11; **8**, 29, 1879.
Stefan: Wien. Ber. **77** [2], 371, 1878.
Waitz: Wied. Ann. **17**, 201, 1882.
Obermayer: Wien. Ber. **81**, 1880; **85**, 1882; **87**, 1883.
Hausmaniger: Wien. Ber. **86**, 1073, 1882.
Brillouin: Ann. ch. et phys. (7), **18**, 1899; **20**, 440, 1900.
Joh. Müller: Wied. Ann. **43**, 554, 1891.
Hüfner: Wied. Ann. **60**, 135, 1897; Zeitschr. f. phys. Chem. **27**, 227, 1898.
Exner: Wien. Ber. **70**, 465, 1875; Pogg. Ann. **155**, 321 u. 443, 1875; Wien. Ber. **75**, 263, 1877.
Hagenbach: Wied. Ann. **65**, 673, 1898.
Toepler: Wied. Ann. **58**, 599, 1896.
F. Schidlowski: Anwendung der Diffusion zur Bestimmung der Feuchtigkeit und der Kohlensäure (russ.). St. Petersburg 1886.

Widerstand der Gase gegen Bewegung fester Körper.

Schellbach: Pogg. Ann. **143**, 1, 1871.
M. Rykatschew: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **10**, 124, 1878.
Mannesmann: Wied. Ann. **67**, 105, 1899.
Mach und Salcher: Wien. Ber. **95**, 764, 1887; **97**, 41, 1889; **105**, 604, 1896.
Zahm, Phil. Mag. (6) **1**, p. 530, 1901.
Melsens: Ann. ch. et phys. (5) **25**, 1882.
G. Suslow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 79, 1886.
J. Jarkowski: Arbeiten d. phys. Abt. der Ges. von Freunden der Naturk. zu Moskau **3**, Heft 2, S. 34, 1890.

Dissociation der Gase.

Cannizaro: Sunto di un corso di filosofia chimica. Pisa 1858.
Kopp: Chem. Ber. 1858, S. 11 u. f.
St. Claire Deville: Compt. rend. **45**, 857, 1857; Leçons sur la dissociation. Paris 1866.
Pebal: Liebigs Ann. **123**, 199, 1862.
E. und L. Natanson: Wied. Ann. **24**, 454, 1885; **27**, 606, 1886.
Richardson: J. chem. Soc. **51**, 397, 1887.
Warburg, Berl. Ber. 1901, p. 1126.

Fünfter Abschnitt.

Lehre von den Flüssigkeiten.

Erstes Kapitel.

Grundeigenschaften und Bau der Flüssigkeiten.

§ 1. **Grundeigenschaften der Flüssigkeiten.** Die Flüssigkeiten besitzen, ähnlich den Gasen, keine selbständige Gestalt, sie nehmen vielmehr die Gestalt desjenigen Gefäfses an, in welchem sie sich befinden. Ähnlich den Gasen setzen sie ebenfalls einer Änderung der Form oder sogenannten Deformation einen nur sehr geringen Widerstand entgegen. Von den Gasen unterscheiden sie sich zunächst dadurch, dafs sie ein bestimmtes Volumen besitzen und jedem Versuche, dieses Volumen zu ändern, einen sehr grofsen Widerstand entgegenbringen; sie suchen nicht ein möglichst grofses Volumen einzunehmen, und können daher, wenigstens eine Zeitlang, in offenen Gefäfsen aufbewahrt werden. Eine Flüssigkeitsmenge, die keinen äufseren Kräften unterworfen ist, sich auch nicht um irgend eine Achse dreht, nimmt Kugelform an, welch letztere man daher gewissermafsen für die natürliche Form der Flüssigkeiten anzusehen hat.

Die Flüssigkeiten gehen ununterbrochen und unter allen Umständen in den gasförmigen Zustand über; sie verdunsten. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieser Vorgang vollzieht, hängt von der Art der Flüssigkeit, ihrer Temperatur, sowie von der Beschaffenheit, dem Drucke und der Bewegung des Gases ab, welches die „freie“ Oberfläche der Flüssigkeit umgiebt. Unter dem Ausdrucke freie Oberfläche versteht man hierbei eine solche, die sich nicht in Berührung mit einem festen oder einem anderen flüssigen Körper befindet. Befindet sich die Flüssigkeit in einem geschlossenen Raume, so hört die Verdunstung nach einiger Zeit scheinbar auf; in diesem Falle befindet sich über

der Flüssigkeit ihr „gesättigter" Dampf, d. h. ihr Dampf in demjenigen Zustande, in welchem er die für die gegebene Temperatur möglichst höchste Spannung erreicht hat. Im offenen Raume geht das Verdunsten einer jeden Flüssigkeit ununterbrochen vor sich. Eine Flüssigkeitsmasse kann daher im freien Raume nur dann selbständig existieren, wenn sie so grofs ist, dafs sich infolge ihrer Anziehung um sie herum eine aus ihrem Dampfe bestehende Atmosphäre bilden kann, die an ihrer Oberfläche den Sättigungsgrad erreicht hat. Eine Flüssigkeitsmasse, welche dieser Bedingung nicht genügt, mufs sich allmählich im Raume zerstreuen und gewissermafsen verschwinden.

Die Verdunstung ist von einem Aufwand an Energie begleitet, die sich im Dampfe in potentieller Form wiederfindet. Findet keine Energiezufuhr von den umgebenden Körpern zur Flüssigkeit statt, so kühlt sich letztere während des Verdunstens ab.

Ausführlicher wird die Erscheinung des Verdunstens in der Lehre von der Wärme betrachtet werden.

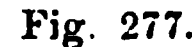
Eine ideale oder vollkommene Flüssigkeit nennt man eine solche, die gar keinen Widerstand leistet, wenn eine äufsere Kraft ihre Form ändert und einen unendlich grofsen Widerstand entwickelt, wenn eine Kraft ihr Volumen zu vermindern strebt; eine solche Flüssigkeit ist mithin absolut beweglich und inkompressibel.

Die Flüssigkeiten gehorchen dem Pascalschen Gesetze der Druckfortpflanzung. In Flüssigkeiten eingetauchte Körper erfahren einen scheinbaren Gewichtsverlust, der nach dem Archimedischen Gesetze bestimmt wird. Unter Einwirkung der Temperatur ändert sich das Volumen der Flüssigkeiten, jedoch sehr viel geringer als das Volumen der Gase. Der Koeffizient der thermischen Ausdehnung ist für die verschiedenen Flüssigkeiten überaus verschieden.

§ 2. Bau der Flüssigkeiten. Der innere Bau der Flüssigkeiten ist komplizierter als derjenige der Gase und zwar drückt sich dies in zweierlei Art aus. In den gasförmigen Körpern nehmen wir an, dafs die Moleküle frei sind und sich unabhängig voneinander bewegen, wenn man von ihren sozusagen zufälligen Zusammenstöfsen absieht. In den Flüssigkeiten sind die Moleküle einander so sehr genähert, dafs ihre Zusammenstöfse sehr viel häufiger erfolgen müssen als in den Gasen; infolgedessen mufs sich jedes einzelne Molekül um eine gewisse Mittellage bewegen, die sich relativ langsam ändert. Ungeachtet dessen erfolgen auch in den Flüssigkeiten allmähliche Verschiebungen und Ortsänderungen der Moleküle, jedoch um sehr vieler langsamer als in den Gasen.

Der zweite Unterschied im Bau der Flüssigkeiten und Gase besteht darin, dafs auf jedes Flüssigkeitsmolekül eine besondere Art von Kräften einwirkt, die gewissermafsen von allen ihren benachbarten Molekülen ausgehen, jedoch offenbar nicht identisch mit der allgemeinen Gravi-

tation sind; letztere wirkt aufserdem auch unter den Flüssigkeitsmolekülen. Diese Kräfte, deren Gesetze noch wenig bekannt sind, wirken zwischen den Molekülen in merkbarer Weise nur auf sehr kleine Entfernungen hin; sie werden **Kohäsionskräfte** genannt. Solche Kräfte wirken, wie wir gesehen haben, auch in den Gasen; in letzteren sind sie aber sehr gering und spielen daher keine grofse Rolle, besonders in Gasen, welche weit von ihrem Sättigungsgrad entfernt sind. Bei den Flüssigkeiten äufsert sich dagegen das Vorhandensein dieser Kräfte ununterbrochen in einer grofsen Zahl verschiedener Erscheinungen und ganz besonders nahe an ihrer Oberfläche. Befindet sich nämlich ein Molekül m (Fig. 277) innerhalb der Flüssigkeit, so ist es von allen


Fig. 277.



Seiten von anderen Molekülen umgeben, die auf dasselbe mit Kohäsionskräften einwirken. Alle diese Moleküle befinden sich im Innern eines kugelförmigen Raumes, in dessen Mittelpunkt sich das betrachtete Molekül befindet und dessen Radius dem Maximalabstande gleichkommt, auf welchen hin die Kohäsionskräfte noch einen bemerkbaren Einflufs ausüben, d. h. eine Wirkung, die gegen diejenige der benachbarten Moleküle nicht völlig verschwindet. Man nennt diesen Kugelraum die **Molekularwirkungssphäre.** Alle Kohäsionskräfte welche auf das zentrale Molekül m einwirken und um dasselbe herum gleichmäfsig nach allen Seiten gerichtet sind, heben sich gegenseitig auf. Dies bezieht sich auf alle Moleküle der im Innern der Flüssigkeit, wo also die Kohäsionskräfte nur die Gröfse des mittleren Abstands zwischen den Molekülen regulieren. Somit wird das Volumen einer Flüssigkeit dadurch bestimmt, dafs zwischen dem Bestreben der sich bewegenden Moleküle auseinander zu fliegen und der Kohäsion der Moleküle Gleichgewicht herrschen mufs.

Das, was wir über die gegenseitige Aufhebung der auf ein Molekül wirkenden Kohäsionskräfte eben gesagt haben, verliert indes seine Geltung für ein Molekül m'', das sich an der Oberfläche selbst befindet und nur von einer Seite her von anderen Molekülen umgeben ist, die sich in der **halben** Molekularwirkungssphäre befinden. **Hier an der Oberfläche der Flüssigkeit ergeben alle Kohäsionskräfte eine Resultante** R, **die nach dem Innern der Flüssigkeit senkrecht**

zu ihrer Oberfläche gerichtet ist; das Molekül wird von ihr gewissermafsen ins Innere der Flüssigkeit hineingezogen und daran verhindert, sich von der übrigen Flüssigkeitsmasse loszulösen. Dasselbe bezieht sich nicht nur auf alle Moleküle, welche sich an der Flüssigkeitsoberfläche selbst befinden, sondern auch auf die in der Flüssigkeit befindlichen, jedoch von der Flüssigkeitsoberfläche weniger als um den Radius der Molekularwirkungssphäre abstehenden. Man ersieht dies aus der Fig. 277; auf das Molekül m' wirken Kohäsionskräfte ein, von denen sich einige gegenseitig aufheben; es bleiben jedoch die Kräfte übrig, welche von den Molekülen des unterhalb der Fläche st befindlichen Segments ausgehen; hier liegt st in Bezug auf das Kugelzentrum symmetrisch zur Flüssigkeitsoberfläche. Diese Kohäsionskräfte haben eine gewisse Resultante R', welche indes kleiner als R ist. Die Ebene $M'N'$, welche von der Oberfläche MN um den Radius der Molekularwirkungssphäre entfernt ist, bildet die untere Begrenzung der Oberflächenschicht, deren Moleküle unter der Einwirkung ins Innere der Flüssigkeit gerichteter Kräfte stehen. Diese ganze Schicht übt auf die Flüssigkeit einen Druck aus, welchen man mit demjenigen vergleichen kann, den ein aufgeblasener Gummiballon auf die in ihm enthaltene Luft ausübt.

Es müssen sich also die Kohäsionskräfte besonders auffallend in der Oberflächenschicht einer Flüssigkeit äufsern. Je gröfser die Oberfläche einer Flüssigkeit im Vergleich zu ihrer Masse ist, eine um so gröfsere Rolle müssen diese Kräfte spielen; deshalb äufsern sie sich besonders in kleinen gesonderten Flüssigkeitsmengen. Das Bestreben einer Flüssigkeit, die an ihrer Oberfläche befindlichen Moleküle in ihr Inneres hineinzuziehen, mufs ein scheinbares Bestreben der Flüssigkeit, eine solche Form anzunehmen, für welche ihre Oberfläche möglichst klein wird, zur Folge haben. Die kleinste Oberfläche bei gegebenem Volumen hat eine Kugel; daher nehmen kleine Flüssigkeitsmengen, selbst wenn sie sich unter der Wirkung der Schwere befinden, die Form kleiner Kugeln an, wie man das z. B. an sehr kleinen Quecksilbertröpfchen sieht. Jede Oberflächenvergröfserung einer Flüssigkeit erfordert einen Arbeitsaufwand, da bei ihr Moleküle, welche unterhalb der erwähnten Oberflächenschicht liegen, in diese Haut hinein und sogar bis an die Flüssigkeitsoberfläche selbst befördert werden müssen; diesem Transport wirkt die Kraft R' entgegen, die in dem Mafse anwächst, als sich das Molekül der Oberfläche nähert. Die Oberflächenschicht strebt erstens selbst gewissermafsen danach ihre Oberfläche zu verkleinern und setzt ferner jeder äufseren Kraft, welche sie zu vergröfsern sucht, einen Widerstand entgegen.

§ 3. Das Verdunsten der Flüssigkeiten. Das Verdunsten erklärt sich nach der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten derart, dafs es gewissen an der Oberfläche befindlichen und im gegebenen

Moment mit besonders großer, nach außen gerichteter Geschwindigkeit begabten Molekülen gelingt, die Molekularwirkungssphäre zu überschreiten und sich von der Flüssigkeit loszulösen, ungeachtet der auf sie wirkenden Kohäsionskraft. Befindet sich über der Flüssigkeit ein Gas oder der Dampf einer anderen Flüssigkeit, so treffen die sich loslösenden Moleküle andere ihnen begegnende und werden von denselben in die Flüssigkeit zurückgeworfen, weshalb die Verdunstung nur sehr langsam von statten geht. Im Vakuum erfolgt das Verdunsten sehr viel schneller und erreicht in einem sehr kurzen Zeitraum eine gewisse Grenze, die folgendermaßen bestimmt wird. Über der Flüssigkeit bildet sich deren Dampf und werden die Moleküle des letzteren, wenn sie auf die Flüssigkeitsoberfläche treffen und in die Molekularwirkungssphäre gelangen, von der Flüssigkeit festgehalten. Die Grenze des Verdunstens ist erreicht, wenn in der Zeiteinheit ebensoviele Moleküle sich von der Flüssigkeit loslösen, als zu derselben aus dem umgebenden Dampfe gelangen; es tritt dann eine Art von dynamischem Gleichgewichte (S. 526) ein, wobei trotz des kontinuierlichen Molekülaustausches die Flüssigkeits- und Dampfmengen ungeändert bleiben.

Man sagt in diesem Falle, der Dampf sei gesättigt. Je höher die Temperatur ist, um so größer ist die Bewegungsenergie der Moleküle und um so mehr Moleküle lösen sich in gegebener Zeit von der Flüssigkeitsoberfläche los. Dementsprechend muß sich auch die Zahl der in die Flüssigkeit eindringenden Moleküle erhöhen, d. h. muß sich die Dichte und folglich auch die Spannung des gesättigten Dampfes erhöhen, wie dies auch in der That beobachtet wird.

Ähnlich den Gasmolekülen, haben auch die Flüssigkeitsmoleküle im gegebenen Augenblick keine gleichen Geschwindigkeiten; vielleicht gilt auch für sie das Maxwellsche Gesetz (S. 490). Die meisten Chancen, sich aus der Flüssigkeit zu entfernen, haben diejenigen Moleküle, die mit der größten Geschwindigkeit begabt sind, und ist es daher klar, daß sich bei der Verdunstung die mittlere Bewegungsenergie der Moleküle in der zurückbleibenden Flüssigkeit vermindern muß; daher kühlen sich die Flüssigkeiten beim Verdunsten ab. Übrigens ist das nur eine andere Betrachtung des Faktums, daß beim Verdunsten einer Flüssigkeit eine gewisse Arbeit geleistet werden muß, um die Kohäsion der Moleküle zu überwinden, wobei die zu dieser Arbeit erforderliche Energie aus der Flüssigkeit selbst entnommen wird, falls keine Energiezufuhr von außen stattfindet. Die Geschwindigkeit eines sich von der Flüssigkeit loslösenden Moleküls wird durch die entgegenwirkenden Kohäsionskräfte vermindert und deshalb ist die Dampftemperatur immer gleich der Temperatur der Flüssigkeit selbst.

Wenn sich ein Dampf abkühlt und verflüssigt, so leisten die Kohäsionskräfte eine innere Arbeit von dem Augenblick an, wo sich die Moleküle einander bis auf eine Entfernung gleich dem Radius der

Molekularwirkungssphäre nähern. Als Resultat dieser Arbeit erscheint ein Stillstand in der Geschwindigkeitsabnahme der Moleküle, d. h. in der Abkühlung, obgleich die Energie sich an die umgebenden Körper weiterzugeben fortfährt. Es wird aus dem Dampfe die latente Verflüssigungswärme frei.

§ 4. Bau der Flüssigkeitsmoleküle. Das Flüssigkeitsmolekül hat aller Wahrscheinlichkeit nach einen viel komplizierteren Bau als das Molekül des betreffenden Dampfes, besonders wenn letzterer weit von seinem Sättigungsgrade entfernt ist. Höchst wahrscheinlich bestehen die Flüssigkeitsmoleküle aus mehreren, vielleicht gar einer grofsen Zahl einfacher Gasmoleküle, die zu einem Ganzen vereinigt sind. Der Wasserdampf besteht aus H_2O Molekülen, wenn man annimmt, dafs die Wasserstoff- und Sauerstoffmoleküle von der Zusammensetzung H_2 und O_2 sind. Das Wassermolekül kann man dagegen allgemein durch die Formel $(H_2O)_n$ darstellen, wo n die Anzahl der Dampfmoleküle (gazogéniques nach de Heens Bezeichnung) bedeutet, welche ein Flüssigkeitsmolekül (liquidogénique) geben. Ramsay und Shields haben (1895) gezeigt, dafs die Moleküle des Wassers, der Alkohole und Säuren zwei, bisweilen sogar drei chemische Moleküle enthalten, während die Moleküle von flüssigem CS_2, N_2O_4, $SiCl_4$, PCl_3, CCl_4, C_6H_6, $C_6H_5NH_2$ (Anilin) und vieler anderer Flüssigkeiten vollkommen diesen Formeln entsprechen. J. van Laar hat (1899) gezeigt, dafs z. B. die Bildung der Moleküle $(H_2O)_2$ aus $H_2O + H_2O$ den Charakter einer chemischen Reaktion trägt und dafs dieselbe mit sehr beträchtlichen Volumenänderungen verbunden ist; würden sich z. B. 18 g H_2O vollständig in $(H_2O)_2$ verwandeln, so würde sich ihr Volumen um 8,44 ccm vergröfsern. Mit Erhöhung der Temperatur vermindert sich die Zahl der zusammengesetzten Moleküle, was eine Volumenverminderung zur Folge haben mufs, welche man für Wasser zwischen 0^0 und 4^0 auch wirklich beobachtet.

Sutherland folgerte (1900) aus einer Untersuchung der verschiedenen Eigenschaften von Eis, Wasser und Wasserdampf, dafs der letztere aus Hydrol (H_2O) besteht, während Eis Trihydrol $(H_2O)_3$ ist. Wasser ist eine Mischung von Trihydrol und Dihydrol $(H_2O)_2$. Er fand die Dichtigkeit des Dihydrol bei 0^0 gleich 1,089, die des Trihydrol gleich 0,88. Das Schmelzen des Eises und die Erwärmung von Wasser ist von einer Dissociation des Trihydrols, das Verdampfen von einer Dissociation des Dihydrols und des Trihydrols begleitet.

Wird eine Flüssigkeit erwärmt, so wird ein Teil der hinzuströmenden Wärme zur Temperaturerhöhung verbraucht, nämlich zur Erhöhung der kinetischen Energie der fortschreitenden und vielleicht auch der drehenden Bewegung der ganzen Moleküle, wie ihrer Teile, d. h. der einfacheren Moleküle und Atome. Ein zweiter sehr kleiner Teil der

Wärme wird zu äufserer Arbeit der Ausdehnung der Flüssigkeit verbraucht; dieser ist, wie auch bei den Gasen, gleich $A\int p\,dv$, wo A das thermische Arbeitsäquivalent, p der äufsere Druck und v das Volumen der Flüssigkeit bedeutet. Ein dritter Teil der Wärme leistet innere Arbeit. Diese zerfällt ihrerseits im allgemeinsten Falle wahrscheinlich in drei Teile: in die Arbeit zum Trennen der Flüssigkeitsmoleküle voneinander, zum Trennen der Bestandteile zusammengesetzter Flüssigkeitsmoleküle und in die Arbeit zum Fortbewegen der Atome oder Atomgruppen, aus denen ein einfaches Molekül (gazogénique) besteht.

Nach der oben erwähnten Theorie von **Sutherland** müfsten wir annehmen, dafs beim Schmelzen des Eises beim Erwärmen und beim Verdampfen des Wassers ein Teil der zuströmenden Wärme zur Dissociationsarbeit des Dihydrols und Trihydrols verbraucht wird.

Viele Forscher haben versucht, eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten aufzustellen, so z. B. **Jäger, Dieterici, Voigt** u. a. Wir können hier auf diese Arbeiten nicht eingehen.

In der Lehre von den festen Körpern werden wir den sogenannten krystallischen Zustand der Materie kennen lernen. **Lehmann** hat (1889) zuerst den Begriff der **flüssigen Krystalle** eingeführt, indem er zeigte, dafs kleine Tröpfchen gewisser Flüssigkeiten unter bestimmten Bedingungen Eigenschaften besitzen können, die, aufser der Form, ebenfalls als charakteristisch für den krystallischen Zustand der Materie gelten. Zu diesen Flüssigkeiten gehört das Cholesterylbenzoat und andere Derivate des Cholesterins, ferner einige Derivate des Hydroceratins und vor allem eine Reihe von Azoxykörpern. Es handelt sich um gewisse optische Eigenschaften dieser Flüssigkeiten, die völlig analog sind den Eigenschaften fester Krystalle, welche wir in Band II werden kennen lernen. Bei einer bestimmten Temperatur findet eine Umwandlung der flüssigen Krystalle statt, welche in vieler Beziehung analog ist dem Schmelzen fester Körper und mit Wärmeabsorption vor sich geht. In Band III werden wir hierauf zurückkommen. Hier müssen wir uns mit einer ausführlichen Litteraturangabe begnügen.

Litteratur.

Sutherland: Phil. Mag. (5) **50**, 460, 1900.
Ramsay und Shields: Ztschr. phys. Chem. **15**, 106, 1895.
J. van Laar: Ztschr. phys. Chem. **31**, 1, 1899.
Jäger: Wien. Ber. **99**, 681, 861, 1890.
Dieterici: Wied. Ann. **50**. 79, 1893; **66**, 826, 1898.
Voigt: Götting. Nachr. 1896, 341; 1897, 19, 261.

Flüssige Krystalle.

Lehmann: Ztschr. phys. Chem. **4**, 468, 1889; **5**, 427, 1890; Wied. Ann. **40**, 401, 1890; **41**, 525, 1890; **56**, 771, 1895; Drud. Ann. **2**, p. 649, 1900; **5**, p. 236, 1901; Verh. deutsch. phys. Ges. **2**, 72, 1900.

Quincke: Wied. Ann. **53**, 613, 1894.
Schenck: Ztschr. phys. Chem. **28**, 280, 1899; Habilitationsschrift, Marburg 1897; Phys. Ztschr. **1**, 409, 625, 1900.
Schenck und Schneider: Ztschr. phys. Chem. **29**, 546, 1899.
Abegg und Seitz: Ztschr. phys. Chem. **19**, 491, 1899.
Hulett: Ztschr. phys. Chem. **28**, 629, 1899; Diss. Leipzig 1899.
Tammann: Wied. Ann. **62**, 284, 1897; Drud. Ann. **4**, 524, 1901.
Schaum: Lieb. Ann. **300**, 208, 1898; Diss. Marburg 1897.

Zweites Kapitel.

Dichte der Flüssigkeiten.

§ 1. Begriff der Dichte bei den Flüssigkeiten. Bei den Flüssigkeiten unterscheidet man nicht wie bei den Gasen zwei verschiedene Dichten. Nach der allgemeinen Definition ist die Dichte einer Flüssigkeit numerisch gleich der Flüssigkeitsmasse, welche in der Volumeneinheit enthalten ist. Nimmt man als Masseneinheit die Masse reinen Wassers von 4° C. an, welche in der Volumeneinheit enthalten ist, so ist die Dichte einer Flüssigkeit gleich dem Verhältnis einer Flüssigkeitsmasse von beliebigem Volumen zur Masse reinen Wassers von 4° C. im selben Volumen. Die tabellarische Dichte, d. h. die, welche man gewöhnlich in den entsprechenden Tabellen aufgeführt findet, ist auf 0° bezogen; wenn man sie mit δ_0 bezeichnet, so ist die Dichte δ bei t^0 gleich

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + \alpha t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo α der mittlere kubische Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit zwischen 0° und t^0 ist.

Die verschiedenen Flüssigkeiten besitzen eine sehr verschiedene Dichte. Die geringste Dichte besitzt der flüssige Wasserstoff, für welchen Dewar $\delta = 0{,}07$ gefunden hat; die gröfste Dichte besitzen Quecksilber und geschmolzene Metalle.

Zur Dichtebestimmung der Flüssigkeiten existiert eine ganze Reihe von Methoden, welche wir nunmehr betrachten wollen. Inwiefern die Dichte resp. der Koeffizient α von der Temperatur abhängt, werden wir eingehender in der Wärmelehre betrachten.

§ 2. Wilsonsche Methode. Zur schnellen näherungsweisen Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit können kleine gläserne Hohlkugeln von verschiedener mittlerer Dichte verwendet werden, auf welchen die Dichte notiert ist. Taucht man eine Reihe solcher Kugeln

in die Flüssigkeit, so gehen einige in ihr unter, einige schwimmen an der Oberfläche und nur eine erhält sich fast unbeweglich im Inneren der Flüssigkeit. Die Dichte der Flüssigkeit ist dann ungefähr gleich der mittleren Dichte dieser Kugel. Warrington hat (1899) diese Methode vervollkommnet. Sein Apparat hat die Gestalt eines Aräometers von konstantem Volumen (Fig. 278); in *A* ist Quecksilber enthalten. Auf die Röhre *BC* werden kleine Platinringe in solcher Zahl gesteckt, dafs der Apparat ganz in die Flüssigkeit einsinkt. Es ist leicht einzusehen, dafs man aus dem Gewichte des Apparates nebst demjenigen der Platinringe die Dichte der Flüssigkeit bestimmen kann.

§ 3. **Methode der kommunizierenden Röhren.** Diese Methode beruht auf dem Satze, dafs die Höhen der Flüssigkeitssäulen, welche denselben Druck auf die Oberflächeneinheit des Gefäfsbodens ausüben, indirekt proportional den Dichten der gewählten Flüssigkeiten sind. Es giebt zwei verschiedene Arten wie man obiges Gesetz in Anwendung bringt und werden dieselben durch die Fig. 279 und 280 erläutert.

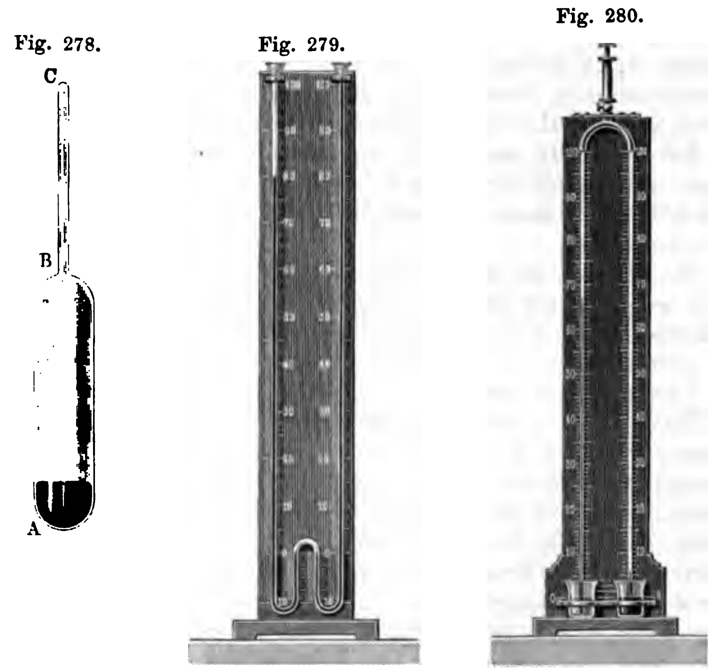


Fig. 278. Fig. 279. Fig. 280.

In Fig. 279 haben wir zwei kommunizierende Röhren vor uns; man giefst die Flüssigkeiten, deren Dichte verglichen werden soll, in die langen Röhren, bis sie in den kurzen bis zum Nullpunkte der Skala hinan reichen. Fig. 280 stellt einen aus zwei Röhren bestehenden

Apparat dar, wo die Röhren mit ihren offenen Enden in Gefäfse mit den entsprechenden Flüssigkeiten münden. Im oberen Teile sind die Röhren miteinander und einer kleinen, zum Erzeugen einer Luftverdünnung dienenden Pumpe verbunden. Setzt man diese Pumpe in Thätigkeit, so steigen die Flüssigkeitssäulen in den Röhren empor, wobei der Druck beider Säulen offenbar der gleiche sein mufs. Bonfall hat eine Abänderung dieses Apparates in Vorschlag gebracht.

§ 4. **Pyknometermethode.** Ein Glasgefäfs wird zuerst leer, darauf mit Wasser und endlich, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, gewogen. Sind P, P_1 und P_2 die entsprechenden Gewichte, so ist die gesuchte Dichte δ, abgesehen von den erforderlichen Korrektionen,

$$\delta = \frac{P_2 - P}{P_1 - P} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Fig. 281 zeigt ein gewöhnliches Pyknometer, ein Fläschchen, in welches ein Thermometer eingeschliffen ist. Es wird bis zur Marke m mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt.

Das Pyknometer von Mendelejeff (Fig 282) besteht aus dem Behälter A, in welchem sich das Reservoir des bei C in den Behälter eingeschmolzenen Thermometers BD befindet. Die engen seitlichen Röhren sind mit einer Skalenteilung versehen und sorgfältig kalibriert. Das Röhrchen GH wird durch einen konischen Stöpsel luftdicht verschlossen; am Ende der Röhre EF befindet sich eine Erweiterung und kann EF durch einen eingeschliffenen Stöpsel ebenfalls luftdicht verschlossen werden.

Sehr bequem ist das Sprengelsche Pyknometer, besonders in der Form, welche es von Ostwald erhalten hat (Fig. 283). Es wird durch die kleine Öffnung b bis zum Index a mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt.

Formel (2) ist nur angenähert richtig; um einen genaueren Wert der Dichte δ zu erhalten, hat man noch einige Korrektionen anzubringen. Bei der Wägung hat man jedesmal das aufs Vakuum bezogene Gewicht einzuführen, denn δ ist das Verhältnis der beiden wahren, nicht aber der scheinbaren Gewichte. Ferner ist darauf zu achten, dafs, falls das Wasser und die zu untersuchende Elüssigkeit von verschiedener Temperatur waren, auch das Volumen des Pyknometers nicht in beiden Fällen das gleiche war. Wenn endlich das Pyknometer Wasser von t^0 enthalten hatte, dessen Dichte D aus entsprechenden Tabellen zu finden ist, so ist die nach Formel (2) erhaltene Dichte noch mit D zu multiplizieren, um die auf Wasser von 4^0 bezogene Dichte der Flüssigkeit zu erhalten. Auf die Details soll hier nicht eingegangen werden. Schliefslich erhält man die Dichte der Flüssigkeit für t^0, also für diejenige Temperatur, bei welcher sie

das Pyknometer bis zum Index angefüllt hatte. Um das specifische Gewicht δ_0 bei 0^0 zu erhalten, hat man Formel (1) zu benutzen, was nur in den seltenen Fällen möglich ist, wo man den Koeffizienten α kennt.

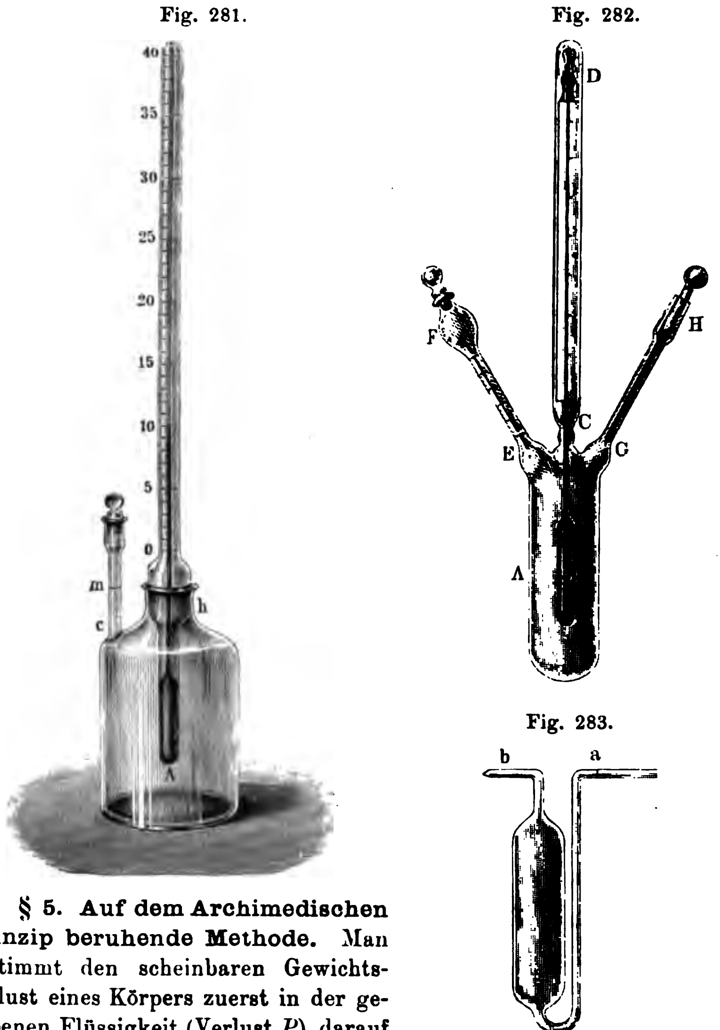


Fig. 281.

Fig. 282.

Fig. 283.

§ 5. Auf dem Archimedischen Prinzip beruhende Methode. Man bestimmt den scheinbaren Gewichtsverlust eines Körpers zuerst in der gegebenen Flüssigkeit (Verlust P), darauf im Wasser (Verlust P_1). Der Körper, welcher in beiden Flüssigkeiten untertauchen mufs, kann etwa aus einem ein wenig Quecksilber enthaltenden Glaskügelchen oder Cylinder bestehen. Sehr bequem ist es, wenn ein Thermometer an demselben angebracht ist. Die Wägung selbst kann auf einer gewöhnlichen Wage vorgenommen werden, wozu man eine der Wagschalen entweder ganz abnimmt oder vermittelst kurzer

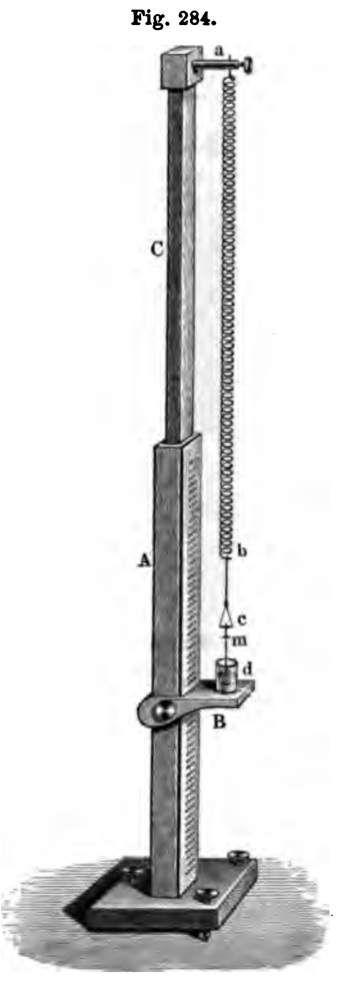
Fäden an den Wagebalken hängt und unten mit einem kleinen Haken versieht. Für weniger genaue Bestimmungen ist die einarmige Westphalsche Wage sehr bequem, welche in Fig. 188 auf S. 354 abgebildet ist. Wie wir sahen, war der Hebelarm Hh in zehn gleiche Teile geteilt und dienten die Drahtstücke A_1, A_2, B und C dazu, in die den Teilstrichen gegenüber befindlichen Vertiefungen von Hh gehängt zu werden. Zu dieser Wage gehört ferner ein kleiner Glascylinder nebst Thermometer, der in Luft mit dem Gegengewicht K ins Gleichgewicht gebracht wird. Das Gewicht von A_1 und A_2 ist derart gewählt, dafs es genau dem Gewicht des von diesem Cylinder bei 15° verdrängten Wassers gleichkommt. Wenn man den Cylinder ins Wasser taucht und das Gewicht A_1 an den Haken h hängt, so tritt, wie in der Figur gezeigt ist, Gleichgewicht ein. Wählt man das Gewicht von A_1 und A_2 als Einheit, so ist das Gewicht von B gleich 0,1, das Gewicht von C gleich 0,01.

Senkt man den Cylinder in eine Flüssigkeit, welche dichter ist als Wasser, so mufs man, um Gleichgewicht zu erhalten, noch einige Gewichtstücke hinzufügen, wobei der Gewichtsverlust des Cylinders unmittelbar an der Teilung von Hh abgelesen wird; da aber der Gewichtsverlust im Wasser als Einheit angenommen ist, so giebt diese Ablesung unmittelbar die gesuchte Dichte der Flüssigkeit. Ist z. B. die Verteilung der Gewichtstücke eine derartige wie in Fig. 190, wo A (= 1) auf dem achten Teilstriche liegt, B (0,1) auf dem vierten und C (0,01) auf dem sechsten, wobei A_1 (= 1) nicht abgenommen ist, d. h. unter dem zehnten Teilstrich hängt, so ist der Gewichtsverlust des Cylinders in der Flüssigkeit und folglich deren Dichte gleich 1,846. Ist die Dichte der Flüssigkeit kleiner als diejenige des Wassers, so ist auch der Gewichtsverlust kleiner als die von uns gewählte Einheit. In diesem Falle mufs A_1 abgenommen werden. Erhält man dann etwa die Verteilung der Gewichtstücke A, B und C, wie sie in Fig. 189 skizziert ist, so bedeutet das, dafs die gesuchte Dichte der Flüssigkeit gleich 0,747 ist. Einen ungewöhnlich hohen Genauigkeitsgrad hat Kohlrausch bei der Dichtebestimmung schwacher Lösungen nach der auf dem Archimedischen Prinzip beruhenden Methode erzielt.

In Fig. 284 ist die Jollysche Federwage abgebildet, welche ebenfalls zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten dienen kann. Dieselbe besteht aus einem spiralförmigen Drahte ab, an welchem zwei übereinander hängende Schalen c und d und zwischen denselben eine flache Marke m aus weifsem Glase angebracht sind. Das Stativ A ist mit einer Skala versehen, die auf einem Spiegelstreifen angebracht ist. Die Lage der Marke wird dadurch bestimmt, dafs man den Teilstrich abliest, an welchem sie, von vorn gesehen, sich mit ihrem Spiegelbilde an der Skala deckt. Das mit Wasser oder der zu untersuchenden

Flüssigkeit gefüllte Gefäſs wird auf das Tischchen B gesetzt, welches man an A verschieben und mittels einer Schraube in der gewünschten Stellung befestigen kann. Die Bestimmung von δ wird bei konstanter Lage der Marke m folgendermaſsen ausgeführt. Die Schale d wird durch irgend einen in Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit untertauchenden Körper, z. B. durch eine kleine Glaskugel, ersetzt und der Skalenteil s abgelesen, gegenüber welchem die Marke m zu stehen kommt. Hierauf taucht man den Körper zuerst in Wasser, dann in die zu untersuchende Flüssigkeit und bestimmt das Gewicht derjenigen Gewichtstücke p_1 und p_2, welche man auf die Schale c zu bringen hat, damit die Marke wiederum auf dem Skalenteil s einspielt. Die gesuchte Dichte ist dann $\delta = p_2 : p_1$.

Fig. 284.



Man kann die Jollysche Federwage auch ohne jene Gewichtstücke verwenden, indem man die Verschiebung s der Marke miſst, welche man als proportional der Änderung p in der Belastung ansehen kann. Genauer wird p durch die Formel $p = As + Bs^2$ wiedergegeben, wo s die durch p hervorgerufene Verschiebung ist. Vernachlässigt man das zweite Glied obiger Formel, so kann man die Verschiebung der Marke als Maſs für die Änderung in der Belastung ansehen und als Gewichtseinheit das Gewicht derjenigen Belastung, welche die Marke um einen Skalenteil verschiebt. Nehmen wir an, die Marke befände sich gegenüber dem Teilstrich s_1, wenn sich die Kugel in Luft befindet. Bringt man nun von unten her das Gefäſs mit Wasser derart heran, daſs sich die Kugel gerade bis in die Mitte der Flüssigkeit einsenkt, so bleibt die Marke bei einem anderen Teilstrich s_1 stehen und bei s_2, falls man das Wasser durch eine andere Flüssigkeit ersetzt, wobei man B ein wenig zu heben oder zu senken hat. Die gesuchte Dichte ist dann $\delta = \frac{s_0 - s_2}{s_0 - s_1}$.

§ 6. **Aräometer.** Fig. 285 stellt das Nicholsonsche Aräometer dar, das für konstante Volumina dient (auch Gewichtsaräometer genannt). Die unterhalb desselben angebrachte Schale C dient zur Dichtebestimmung fester Körper. Am Stäbchen O befindet sich ein Teilstrich, bis zu welchem das Aräometer im Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit eintauchen mufs, während man auf die Wagschale A entsprechende Gewichtstücke bringt, deren Gewicht p_1 resp. p_2 sei. Ist P das Gewicht des Aräometers selbst, so ist $\delta = \frac{P + p_2}{P + p_1}$. Auf die Angaben dieses Aräometers ist die Kapillarität von bedeutendem Einflufs. Hieraus entspringen so grofse Fehler, dafs man bei Bestimmung von δ für Flüssigkeiten nicht einmal ein Drittel der ersten Decimale verbürgen kann. Lohnstein hat ein Aräometer konstruiert, auf dessen Angaben die Kapillarität keinen Einflufs hat und welches δ mit einer Genauigkeit bis zu 0,0001 zu bestimmen gestattet. Dasselbe ist in Fig. 286 abgebildet. Das hohle Glasgefäfs C endet bei α in eine horizontale Ebene mit scharf geschliffenen Rändern. Es trägt die Schale S, auf welche (aus D entnommene) Gewichtstücke in solcher Zahl gelegt werden, dafs die horizontale Flüssigkeitsoberfläche mit der Oberfläche des Randes α (vergl. Fig. 287) zusammenfällt. Bevor man die Gewichtstücke auflegt, mufs man die Schale S durch den Träger t stützen, den man mittels der Schraube v heben und senken kann; darauf schraubt man den Träger langsam herunter, damit der Rand α nicht bei zu grofser Belastung unter die Flüssigkeitsoberfläche herabsinkt. Ist $\delta = 0,7000$, so sinkt C bis zu der in Fig. 287 abgebildeten Stellung ein. Im Kästchen D befinden sich 17 Gewichtstücke, auf denen die Zahlen 0,0001 bis 0,5 verzeichnet stehen; diese Gewichte sind so ausgewählt, dafs man die gesuchte Dichte δ erhält, wenn man zu 0,7 die Zahlen addiert, welche auf den nach S gebrachten Gewichtstücken verzeichnet sind. Man kann mit dem Lohnsteinschen Aräometer Dichten von $\delta = 0,7$ bis $\delta = 2$ bestimmen. Ein „Universaldensimeter“ hat Courtonne konstruiert.

Fig. 285.



In Fig. 288 und 289 sind zwei Aräometer von konstantem Gewichte abgebildet. Auf der langen Röhre derselben ist eine Skala angebracht, wobei der Teilstrich, bis zu welchem der Apparat in der Flüssigkeit einsinkt, direkt die Dichte der betreffenden Flüssigkeit giebt. Die Zahl 1,00 befindet sich am oberen Ende, falls das Aräometer für Flüssigkeiten, die dichter als Wasser sind, bestimmt ist, sie

ist am unteren Ende der Skala angebracht, wenn der Apparat für leichtere Flüssigkeiten dient. Die Kapillarität, von der weiter unten die Rede sein wird, erschwert die Verwendung der Aräometer in hohem Mafse.

Um den hierdurch entstehenden Fehler zu vermeiden, hat Guglielmo ein Aräometer konstruiert, welches bis auf den Boden des Ge-

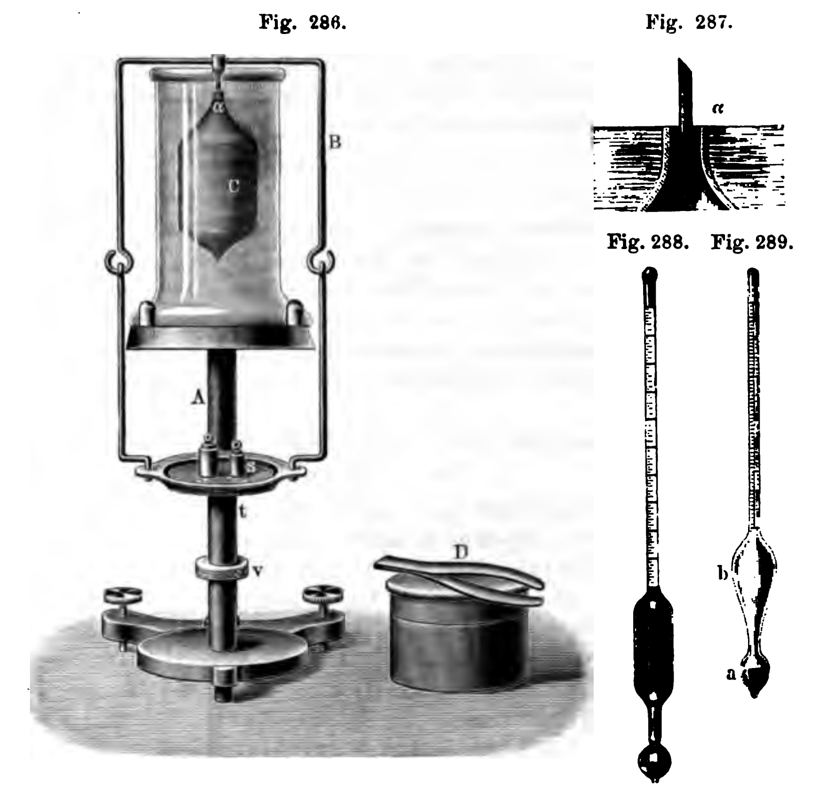


Fig. 286. Fig. 287. Fig. 288. Fig. 289.

fäfses sinkt und in einer geneigten Lage zur Ruhe kommt. Aus dem Neigungswinkel läfst sich die gesuchte Dichte ableiten.

Warrington vermeidet den erwähnten Fehler dadurch, dafs er das Aräometer durch Belastung mit Platinringen bis unter die Oberfläche der Flüssigkeit tauchen läfst.

Von Vandevyver stammt ein Aräometer, das man in destilliertem Wasser schwimmen läfst, während die zu untersuchende Flüssigkeit in den Apparat selbst hineingegossen wird. Dadurch ist es möglich, das Aräometer zur Dichtebestimmung von Flüssigkeiten zu verwenden, von denen nur geringe Mengen vorhanden sind. Es giebt eine ganze Reihe von Aräometern, die eine, nach besonderen Bedingungen konstruierte

Skala besitzen. Einige davon dienen dazu, die Zusammensetzung gewisser Mischungen schnell festzustellen und damit ihre Güte oder ihren Wert zu ermitteln. Das ziemlich verbreitete Aräometer von Beaumé ist derart eingerichtet, dafs es in reinem Wasser von 12,5° C. bis zum Nullpunkt einsinkt, der sich nahe dem oberen Ende befindet. In einer Lösung von 15 Teilen Kochsalz in 85 Teilen Wasser sinkt es bis zu dem Teilstrich ein, an welchem sich die Zahl 15 befindet. Der Raum zwischen dem nullten und diesem Teilstrich ist in 15 gleiche Teile geteilt und reichen die Teilstriche nach unten bis zum siebenzigsten. Der entsprechende Wert der Dichte ergiebt sich aus folgender Tabelle.

Angaben des Beauméschen Aräometers:

	0,0	13,2	24,2	33,5	41,5	48,4	54,4	59,8	64,5	68,6	72,6.
Dichte:	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0.

Starker Schwefelsäure entspricht nach Beaumé die Zahl 66, käuflicher Salpetersäure die Zahl 36, der Salzsäure die Zahl 22. Für Flüssigkeiten, welche leichter als Wasser sind, hat Beaumé ein Aräometer konstruiert, das in einer 10 prozentigen Salzlösung bis zum Nullpunkt, in reinem Wasser bis zum zehnten Teilstrich einsinkt. Die Skalenteile reichen von unten nach oben bis zum sechzigsten, ihr Wert ist folgender:

Angabe nach Beaumé:	10,0	17,7	26,1	35,6	46,3	58,4
Dichte:	1,0	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75.

Alkoholometer nennt man die zur Bestimmung des Alkoholgehalts von käuflichem Spiritus dienenden Aräometer. Beim Alkoholometer von Gay-Lussac giebt der Teilstrich, bis zu welchem der Apparat einsinkt, unmittelbar den Alkoholgehalt in Prozenten des Volumens an. Der nullte Teilstrich (für reines Wasser) befindet sich am unteren, der hundertste Teilstrich (für reinen Alkohol) am oberen Skalenende. Eine ähnliche Konstruktion hat das Alkoholometer von Tralles. Beim Alkoholometer von Richter geben die Skalenteile den Prozentgehalt des Alkohols dem Gewichte nach an. Da beim Mischen von Alkohol mit Wasser eine beträchtliche Dichtesteigerung der Mischung erfolgt — 50 Volumina Wasser und 50 Volumina Alkohol geben z. B. nur 96,3 Volumina Spiritus — und die Dichte der Mischung infolgedessen keine lineare Funktion des Prozentgehalts an Alkohol ist, so haben die Teilstriche der Alkoholometer keinen gleichen Abstand voneinander. Die Dichte des Spiritus ändert sich aufserdem bedeutend mit der Temperatur, man hat daher an den Angaben der Alkoholometer eine entsprechende Korrektion anzubringen, wozu besondere, zu diesem Zwecke zusammengestellte Tabellen dienen.

Litteratur.

Warrington: Phil. Mag. (5) **48**, 498, 1899.
Bonfall: Revue générale des Sciences 1896, p. 318, 418.
Gerland: Geschichte der Aräometer. Wied. Ann. **1**, 150, 1877.
Bernard: Alcoolometrie. Paris 1875.
Gay-Lussac: Instruction pour l'usage de l'alcoolomètre. Paris 1824.
Paquet: J. de phys. **4**, 266, 1875.
Buignet: J. de phys. **9**, 93, 1880.
Jolly: Münch. Ber. 1864, S. 162; Proc. Dubl. Soc. **5**, 41, 347, 1886.
Sprengel: Pog. Ann. **150**, 459, 1873.
Westphal: Arch. Pharm. **10**, 322, 1867.
Michaelis: Instr. 1883, S. 268.
Kahlbaum: Wied. Ann. **19**, 378, 1883.
Schiff: Chem. Ber. **14**, 2761, 1881.
Bluemeke: Wied. Ann. **23**, 404, 1884.
Mendelejeff: Über die Vereinigung von Spiritus mit Wasser (russ.). St. Petersburg 1865.
Tralles: Gilb. Ann. **38**, 349, 1811.
Kopp: Pogg. Ann. **72**, 1, 1847.
Ostwald: J. f. prakt. Chemie **16**, 396, 1877; Hülfsbuch f. phys.-chem. Messungen. Leipzig 1893, S. 109 bis 110.
Lohnstein: Instr. **14**. 164, 1893.
Courtonne: J. de phys. (3) **3**, 315, 1896.
Guglielmo: Rendic. R. Acc. dei Lincei (5), **8**, 2 Sem. p. 341, 1899; **9**, 1 Sem., p. 9, 33, 71, 1900.
Warrington: Phil. Mag. (5) **48**, 498, 1899.
Vandevyver: J. de phys. (3) **4**, 560, 1895; Arch. d. sc. phys. et natur. **34**, 409, 1895.
Kohlrausch: Wied. Ann. **56**, 185, 1895.
Pictet: (Dichte des flüssigen Acetylens.) Arch. d. sc. phys. et natur. **34**, 362, 1895.
S. O. Makarow: Das specifische Gewicht des Meerwassers. J. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 30, 1893.

Drittes Kapitel.

Kompressibilität der Flüssigkeiten.

§ 1. Kompressionskoeffizient. Während man die idealen oder vollkommenen Flüssigkeiten für absolut inkompressibel ansieht, besitzen die wirklich existierenden Flüssigkeiten diese Eigenschaft nicht; ihr Volumen v verringert sich, wenn der Aufsendruck p, unter dem jede Oberflächeneinheit der Flüssigkeit steht, sich vergröfsert. Nimmt p um dp zu, ohne dafs sich die Temperatur t ändert, so ändert sich das Volumen um einen gewissen Betrag dv, welcher dem Volumen v und der Druckzunahme dp proportional ist. Bezeichnet

man den Proportionalitätsfaktor mit β und sieht ihn als positive Gröfse an, so hat man

$$dv = -\beta v dp \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

zu schreiben, da einem positiven dp ein negatives dv entspricht.

Die Gröfse β, der sogenannte Kompressionskoeffizient, hängt von der Art der gewählten Flüssigkeit ab und stellt daher eine physikalische Gröfse besonderer Art dar, welche die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit charakterisiert. Formel (1) giebt

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Da die Flüssigkeiten nur wenig kompressibel sind, so braucht man statt der mathematisch genauen Formeln (1) und (2) die folgenden

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= -\beta v p \\ \beta &= -\frac{1}{p}\frac{\Delta v}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wo Δv diejenige kleine Änderung des Volumens v bedeutet, welche durch Erhöhung des Aufsendrucks um den Betrag p hervorgerufen wird. Der Zahlenwert von β hängt von der Wahl der Volumeneinheit nicht ab, er ist aber indirekt proportional dem Zahlenwert des Drucks p, d. h. direkt proportional der gewählten Druckeinheit. Man drückt p bisweilen in Kilogramm pro Quadratmeter Oberfläche, bisweilen in Atmosphären aus. Ist der Zahlenwert des Kompressionskoeffizienten im ersten Falle β_1, im zweiten β, so ist

$$\beta = 10\,333\,\beta_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Gröfse β_1 kommt in verschiedenen theoretischen Formeln vor; für praktische Zwecke ersetzt man sie durch die Gröfse β, welche man auch gewöhnlich im Sinne hat, wenn man vom Kompressionskoeffizienten einer Flüssigkeit spricht. Formel (3) zeigt uns, dafs der Kompressionskoeffizient numerisch gleich der relativen Volumenänderung ist, welche durch Änderung des Aufsendrucks um einen Atmosphärendruck veranlafst wird. Der Kompressionskoeffizient ist eine Funktion des Zustandes (S. 33) der Flüssigkeit und ändert sich zugleich mit der Temperatur und dem Drucke, unter welchem die Flüssigkeit beim Volumen v stand, d. h. bevor eine Druckerhöhung eintrat.

Flüssigkeiten können nicht nur durch Druck komprimiert, sondern in gewissen Fällen auch einem Zug ausgesetzt werden. Ist eine allseitig geschlossene Röhre völlig mit einer Flüssigkeit gefüllt und wird letztere abgekühlt, so beobachtet man Anfangs keine Volumenänderung, da die Flüssigkeit in allen Punkten ihrer Oberfläche an der inneren Wand der Röhre haftet. Wir haben es also hier mit einer allseitig

gedehnten Flüssigkeit zu thun. Worthington ist es gelungen, einen negativen Druck von 17 Atmosphären zu erreichen.

§ 2. Untersuchungen über die Kompressibilität der Flüssigkeiten vor Oerstedt. Im Jahre 1620 beschrieb Bacon einen Versuch, die Kompressibilität des Wassers zu untersuchen. Er füllte eine bleierne Kugel mit Wasser und schlug auf dieselbe mit einem Hammer; ein anderes Mal setzte er sie dem Drucke einer Presse so lange aus, bis sich die Aufsenfläche der Kugel durch das austretende Wasser mit Tau beschlug. Eine Volumenänderung der Flüssigkeit liefs sich nicht mit Bestimmtheit beobachten. Ebenso gaben die Versuche der Florentiner Akademiker, die 1667 mit einer aus Silber verfertigten und mit Wasser angefüllten Kugel angestellt wurden, ein negatives Resultat.

Der erste experimentelle Nachweis, dafs Wasser kompressibel ist, wurde 1761 von John Canton geliefert. Sein Apparat hatte die Gestalt eines Thermometers mit grofsem kugelförmigen Reservoir (Fig. 290) und Kapillarröhre. Er füllte denselben fast bis an das Ende der Röhre, trieb durch Sieden die oberhalb des Wassers verbliebene Luft aus und schmolz das Röhrenende zu. Nachdem sich das Wasser abgekühlt hatte, blieb es, nur unter dem geringen Drucke seiner eigenen Dämpfe befindlich, an einem bestimmten Skalenteile stehen. Hierauf brach er das Röhrenende ab, so dafs der äufsere Luftdruck auf das Wasser einwirken konnte und beobachtete ein plötzliches Sinken des Wassersäulchens. Dieses Sinken konnte zweierlei Ursache haben; entweder die Kompression des Wassers oder eine Volumenzunahme des Reservoirs, das anfänglich nur von aufsen, jetzt aber auch von innen her Druck erfuhr. Um diese beiden Wirkungen voneinander zu scheiden, brachte er das Reservoir seines Apparats unter den Rezipienten einer Luftpumpe, den er evakuierte (Fig. 290). Während man nun den Aufsen- und Innendruck gleich Null setzen konnte, reichte das Wasser zunächst bis an einen Skalenteil A. Wurde das Röhrenende abgebrochen, so sank das Wasser bis B und wurde darauf Luft in den Rezipienten eingelassen, so hob sich die Wassersäule wieder bis zu einem Skalenteil A', der indes unterhalb A lag. Canton war der Meinung, das Volumen des Reservoirs, das jetzt wieder den gleichen Druck von innen und aufsen, nämlich den Druck von einer Atmosphäre, erfuhr, sei zu Ende des Versuchs das gleiche wie zu Anfang gewesen und betrachtete das Sinken von A nach A'

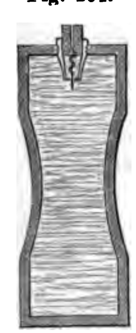
Fig. 290.



als eine Folge der Kompression. In Wirklichkeit aber war, wie wir später sehen werden, das Volumen zu Ende des Versuchs etwas kleiner als zu Anfang, und das Sinken des Wassers diente in noch höherem Maße, als es Canton vermutete, als Beweis seiner Kompressibilität. Canton fand $\beta = 0{,}000046$, was mit den neuesten Untersuchungen sehr gut übereinstimmt. Canton wiederholte denselben Versuch auch mit Quecksilber und bei verschiedenen Temperaturen und beobachtete, daß sich bei Erhöhung der Temperatur die Kompressibilität des Wassers verringert, diejenige des Quecksilbers aber erhöht.

J. Perkins hat (1820) die Kompressibilität des Wassers folgendermaßen nachgewiesen. Er stellte sich ein Metallgefäß mit konkaven Wandungen her, wie es in Fig. 291 abgebildet ist. Das Gefäß wurde mit Wasser gefüllt und von innen durch ein Ventil verschlossen, durch welches Wasser von außen eindringen konnte, wenn der Außendruck größer war als der Innendruck, nicht aber umgekehrt. Das Gefäß wurde nun gewogen und in ein dickwandiges mit Wasser gefülltes Kanonenrohr gebracht, worauf das Wasser starkem Drucke ausgesetzt wurde. Bei einem anderen Versuche wurde das Gefäß ins Meer versenkt, bis zu einer Tiefe, wo der Druck bis gegen 100 Atm. betrug. Hierauf wurde das Gefäß abermals gewogen und eine Gewichtszunahme gefunden. Es war also, während es sich unter starkem allseitigen Drucke befand, bei welchem sich sogar das Volumen des Gefäßes ein wenig vermindert haben mußte, in dasselbe Wasser von außen eingedrungen. Damit war bewiesen, daß sich die Dichte des Wassers durch Druck vergrößert.

Fig. 291.

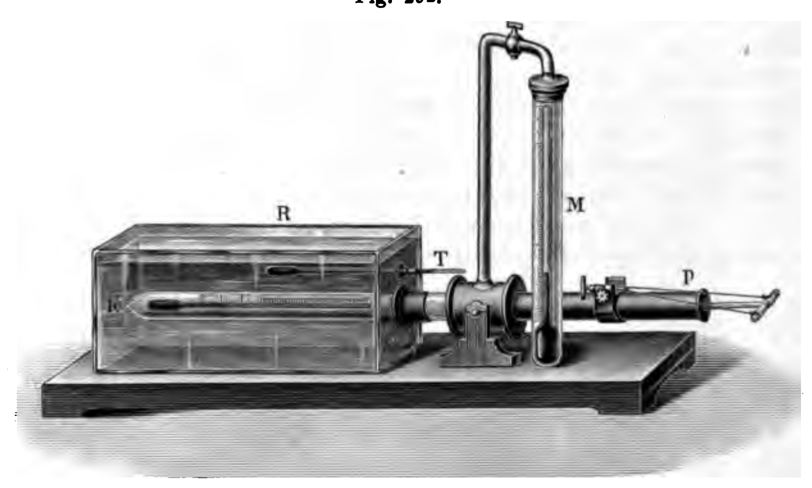


§ 3. Versuche von Oerstedt (1822). Oerstedt hat zuerst einen Apparat konstruiert, in welchem die Kompression der Flüssigkeiten ziemlich genau gemessen werden konnte. Man nennt Apparate dieser Art Piezometer. Der Hauptbestandteil des Oerstedtschen Apparates hatte der Form nach Ähnlichkeit mit einem Thermometer mit großem, cylindrischem Reservoir und Kapillarröhre nebst Skala. Die zu untersuchende Flüssigkeit füllte das Reservoir und einen Teil der Röhre und wurde durch eine kleine Quecksilbersäule abgeschlossen. Der ganze Apparat wurde in einen vertikalen dickwandigen, mit Wasser gefüllten Cylinder gebracht, in welchem das Wasser durch einen Kolben komprimiert werden konnte. Im Innern des Cylinders befand sich ein Thermometer und ein Luftmanometer; demnach war die Größe des ausgeübten Drucks bekannt. Sobald die Kompression erfolgte, senkte sich das Quecksilbersäulchen, und konnte man aus der Größe seiner Verschiebung auf den Grad der Kompression der

Flüssigkeit schliefsen. Die Volumenänderung des Reservoirs liefs Oerstedt aufser acht. Es giebt Piezometer, wo das Gefäfs, welches die zu untersuchende Flüssigkeit enthält, mit der Röhre nach unten gekehrt wird; das Röhrenende wird dann in ein kleines Glas mit Quecksilber getaucht, so dafs sich eine kleine Quecksilbersäule auch innerhalb der Röhre selbst befindet. Bei der Kompression steigt das Quecksilber in der Röhre.

§ 4. Versuche von Sturm und Colladon (1827). Der von diesen beiden Forschern benutzte Apparat ist in Fig. 292 abgebildet.

Fig. 292.



Die dickwandige Glasröhre K ist mit Wasser gefüllt; im Innern derselben befindet sich das thermometerähnliche Piezometer, dessen Röhre sorgfältig kalibriert ist. In letzterem ist die zu untersuchende Flüssigkeit enthalten, vom Wasser durch eine lange Säule von Luft oder Schwefelkohlenstoff geschieden. Die Röhre K ragt durch die Wandung eines offenen Glastrogs R hindurch, in welchem sich Wasser befindet, um die Röhre K auf einer bestimmten, durchs Thermometer T angegebenen Temperatur zu erhalten. Die Kompression wurde mit Hülfe eines im Cylinder P enthaltenen Kolbens bewirkt, der durch eine sogenannte Schraube ohne Ende und ein Zahnrad in Bewegung gesetzt werden konnte. Die Gröfse des erreichten Druckes wurde durch ein mit Luft gefülltes Manometer angezeigt.

Sturm und Colladon nahmen auch darauf Rücksicht, dafs sich das Volumen des Gefäfses mit der zu komprimierenden Flüssigkeit ändert, obgleich es von innen und aufsen denselben Druck erfährt. Wir werden in der Folge sehen, dafs sich die durch die Aufsen- und Innen-

fläche des Gefäſses bestimmten Volumina in diesem Falle um ebensoviel vermindern, als sie sich vermindern würden, wenn man statt des Gefäſses einen massiven Körper vom gleichen äuſseren Volumen hätte. Dieser Umstand ist in der Piezometrie von sehr groſser Bedeutung. Insbesondere muſs man bei der Untersuchung von wenig kompressiblen Flüssigkeiten, wie von Quecksilber, genau wissen, um wieviel sich das Volumen des Piezometers selbst bei der Kompression ändert. Um die hierbei erforderliche Korrektionsgröſse zu erhalten, untersuchten Sturm und Colladon die relative Längenzunahme α eines Glasstäbchens, wenn dasselbe durch eine Kraft ps ausgereckt wurde, wo p die auf die Oberflächeneinheit des Querschnitts wirkende Kraft, s den Flächeninhalt des Querschnitts bedeutete. Sie machten die Annahme, daſs die Volumenverminderung $3\,\alpha$ betrage, wenn auf das Glasstück ein allseitiger Druck gleich p pro Oberflächeneinheit des Querschnitts ausgeübt wird. Wie wir sehen werden, ist diese Annahme unrichtig, es bedürfen daher die von Sturm und Colladon gefundenen Werte einer Korrektur. Auſserdem braucht auch die Kompressibilität des Glases, aus dem das untersuchte Stäbchen bestand, nicht gleich derjenigen des Piezometerglases zu sein. Die von genannten Autoren gefundenen Zahlen sind für $10^6\beta$ (nach Anbringung der Korrektion):

	Temperatur	Druck	$10^6\beta$
Wasser	0°	1—24 Atm.	49,6
Quecksilber	0	1—30	3,4
Äther	0	3—12	131,6
Äther	0	18—24	120
Äther	11,4	2—24	144
Alkohol	10	1— 2	94,5
Alkohol	10	9—10	92,0
Alkohol	10	21—22	87,5
Salpetersäure	0	1—32	338,5

§ 5. Versuche von Regnault (1848). Regnault war der Erste, welcher einen zu genauer Bestimmung der Volumenänderung des Piezometers dienenden Apparat konstruiert hat. Sein Apparat (Fig. 293) besteht aus einem starken, mit Wasser gefülltem Metallgefäſs B; im Innern desselben befindet sich das längliche Gefäſs A mit kalibrierter Kapillarröhre, die durch den Hahn D abgesperrt werden kann. Im Deckel des Metallgefäſses befindet sich der Hahn H und die mit einem Hahn G versehene Röhre, die durch den Hahn E mit dem Gefäſse A in Verbindung gesetzt werden kann. Die Röhre F führt zu einem Reservoir mit komprimierter Luft, deren Druck gleich p sein möge. Je nachdem man die einen oder anderen Hähne öffnet, kann man das die Flüssigkeit enthaltende Gefäſs A verschiedenen Druckkombinationen aussetzen:

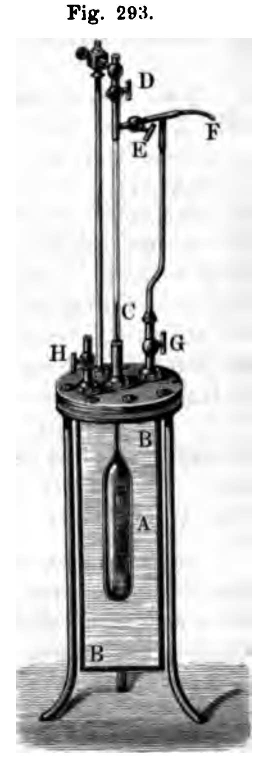
1. E und G sind geschlossen, so daſs der Druck überhaupt nicht auf den Apparat einwirkt; die Hähne H und D sind geöffnet, also wirkt von auſsen und innen der gewöhnliche Atmosphärendruck;

2. H und E sind geschlossen, D und G offen: von auſsen wirkt auf A der Druck p, von innen der Atmosphärendruck;

3. H und D sind geschlossen, E und G offen: von auſsen und innen wirkt der Druck p;

4. D und G sind geschlossen, H und E offen: von auſsen wirkt der Atmosphärendruck, von innen der Druck p.

Fig. 293.



Somit konnte der Druck p entweder überhaupt nicht auf das Gefäſs wirken, oder nur von auſsen, nur von innen, von auſsen und innen. Die Flüssigkeitssäule im Kapillarrohr war in diesen vier verschiedenen Fällen von verschiedener Höhe. Durch Kombination der in diesen vier verschiedenen Fällen enthaltenen Beobachtungsresultate konnte man sowohl die Kompressibilität des Stoffes aus dem A bestand, als auch diejenige der in A enthaltenen Flüssigkeit bestimmen. **Regnault** selbst verwandte den Apparat hauptsächlich zum ersteren Zwecke und bestimmte β nur für Wasser ($\beta = 0{,}000\,047$) und Quecksilber ($\beta = 0{,}000\,003\,5$). Im dritten Kapitel des sechsten Abschnitts werden wir auf die Untersuchungen von **Regnault** wieder zurückkommen und die Formeln angeben, welche er benutzte.

Grassi hat (1851) den **Regnault**schen Apparat zur Bestimmung des Kompressionskoeffizienten β für verschiedene Flüssigkeiten benutzt. Er fand unter anderem folgende Resultate:

	Temperatur	$10^6\beta$
Wasser . . .	0°	50,2
Wasser . . .	10,8	48,0
Wasser . . .	26,0	45,5
Wasser . . .	53,0	44,1
Äther	0	111
Äther	14	140
Alkohol . . .	7,3	82,8
Alkohol . . .	13,1	90,4
Chloroform . .	8,5	62,5

	Temperatur	$10^6\beta$
Quecksilber . .	0°	2,95
$SO_3 + 2H_2O$	14°	24,2
$SO_3 + 3H_2O$	14°	25,0
$SO_3 + 4H_2O$	14°	27,1
$SO_3 + 5H_2O$	14°	27,9
$SO_3 + 6H_2O$	14°	28,3
$SO_3 + 10H_2O$	14°	31,5

Quecksilber besitzt unter allen untersuchten Flüssigkeiten die geringste Kompressibilität. Obige von Grassi gefundenen Werte zeigen ebenfalls, dafs sich bei Zunahme der Temperatur die Kompressibilität des Wassers verringert, die der anderen Flüssigkeiten aber steigert.

§ 6. Verschiedene Messungen der Kompressibilität. Jamin, Amaury und Descamps fanden 1869 für Quecksilber einen halb so grofsen Wert als Regnault ($10^6 \beta = 1{,}87$), doch bestätigten die Versuche von Amagat u. a. dieses Resultat nicht; Amagat fand (1869) für Quecksilber $10^6 \beta = 3{,}92$, was sehr nahe mit dem Resultate von Sturm und Colladon (3,4) übereinstimmt. De Metz fand (1892) — $10^6 \beta = 3{,}74$. Cailletet bestimmte (1872) die Kompressibilität verschiedener Flüssigkeiten bei sehr hohen Drucken und einer Temperatur von etwa 10°. Seine Resultate sind ungenau, da er die Kompression des Gefäfses, welches die Flüssigkeiten enthielt, nicht in Betracht zog. Er fand unter anderem folgende Zahlen:

	Druck	$10^6 \beta$		Druck	$10^6 \beta$
Wasser . .	705 Atm.	46,9	Alkohol . .	174 Atm.	69,4
Äther . . .	630	145,8	Alkohol . .	305	71,9
CS_2 . . .	607	99,8	Alkohol . .	680	74,5

Diese Resultate führten Cailletet zu dem Schlusse, dafs sich die Kompressibilität der Flüssigkeiten nur sehr wenig mit dem Drucke selbst ändert, während Grassi fand, dafs sich die Kompressibilität des Alkohols, Chloroforms und Äthers mit dem Drucke vermehrt. Amagat untersuchte in seinen ersten Arbeiten (1869) die Abhängigkeit der Kompressibilität einiger Flüssigkeiten von der Temperatur. Er fand für Äther:

t^0	13,0	25,4	63,0	78,5	99,0
$10^6 \beta$	168	190	296	365	552

Für Alkohol war $10^6 \beta = 101$ bei 14,0° und 202 bei 99,4°, für Benzol — 90 bei 16° und 187 bei 99,3°, für CS_2 — 87,2 bei 15,6° und 174 bei 100°, also fand Amagat in allen Fällen eine schnelle Zunahme der Kompressibilität mit der Temperatur. Für Wasser und Äther fanden Pagliani und Vicentini, Avenarius und Grimaldi folgende Werte von $10^6 \beta$:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
Wasser . .	51,7	48,54	46,09	44,14	42,65	41,68	41,15	41,19	41,51	42,11	43,0
Äther . . .	146,0	168,0	191,0	215,2	240,5	271,0	305,9	344,9	388,8	436,6	489,0

Für Wasser tritt das Minimum der Kompressibilität ($10^6 \beta = 41{,}02$) bei 62° ein.

Die Kompressibilität von Lösungen haben Aimé (1843), Grassi (1851), Röntgen und Schneider (1886), Schumann (1887), Drecker (1888), Gilbault (1897) u. a. untersucht. Als Resultat

ergab sich hierbei, daſs die Kompressibilität der Lösungen geringer ist, als diejenige des Wassers und sich mit Zunahme des Gehalts der Lösung verringert. So fand z. B. Drecker:

Gehalt an $CaCl_2$:	5,8 Proz.	17,8 Proz.	30,2 Proz.	40,9 Proz.
$10^6 \beta$	39,7	31,3	25,6	21,7
Gehalt an KCl:	2,49 Proz.	8,28 Proz.	16,75 Proz.	24,31 Proz.
$10^6 \beta$	42,6	38,9	34,1	30,1

Die Kompressibilität von wässerigen Salzlösungen nimmt im allgemeinen mit Zunahme der Temperatur ab. Lösungen von Schwefelsäure sind weniger zusammendrückbar als Wasser; das Minimum der Kompressibilität tritt bei 80 Proz. Gehalt von H_2SO_4 in Wasser ein.

Gilbault untersuchte die Kompressibilität einiger Lösungen von Alkohol und Äther, wobei er einen Zusammenhang der kritischen Temperatur und der Kompressibilität der Lösung fand (vergl. III. Band).

Guinchant fand (1901), daſs sich das Volumen des gelösten Stoffes bei der Kompression (bis 4 Atm.) einer Lösung nicht ändert, daſs also die beobachtete Volumenänderung nur dem Lösungsmittel zuzuschreiben ist.

Die Kompressibilität verschiedener Flüssigkeiten hat auch de Metz untersucht. Er fand für $10^6 \beta$ folgende Werte:

Ricinusöl	47,234	Flüssiges Paraffin . . .	62,690
Leinöl	51,825	Destilliertes Wasser . .	47,430
Mandelöl	53,473	Glycerin	22,128
Olivenöl	56,266	Zuckerlös. (Dichte 1,350)	20,827

Die Kompressibilität der Mischung war in einigen Fällen geringer, als nach der Mischungsregel durch Rechnung gefunden wurde.

Tait findet, daſs der Koeffizient β, als Funktion des Drucks p, unter welchem sich die Flüssigkeit bereits befindet, durch folgende Formel wiedergegeben wird:

$$\beta = \frac{A}{B + p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wo A und B Konstanten sind. So ist z. B. für Wasser von 0° die Gröſse $\beta = \frac{0{,}3015}{5933 + p}$, wo p in Atmosphären ausgedrückt ist. Für wässerige Salzlösungen muſs Formel (5) durch die folgende ersetzt werden:

$$\beta = \frac{A}{B + p + \delta},$$

wo A und B denselben Wert wie für Wasser haben, und wo δ dem Gewichte des in 100 Tln. Wasser gelösten Salzes proportional ist.

Röntgen und Schneider fanden für Wasser

bei 0^0 $10^6 \beta = 51{,}2$
„ 9^0 $10^6 \beta = 48{,}1$.

§ 7. **Untersuchungen von Amagat.** In den letzten Jahren hat Amagat eine gröfsere Reihe von Arbeiten veröffentlicht, welche verschiedene Fragen bezüglich des Zusammenhangs der Kompressibilität der Flüssigkeiten mit Temperatur und Druck behandeln.

Amagat steigerte den Druck bis zu 3000 Atm. Er benutzte einen Apparat von folgender Konstruktion. Ein dickwandiger Stahlcylinder war mit Glycerin gefüllt; im unteren Teile desselben befand sich Quecksilber, in welches das untere Ende der Piezometerröhre, welche die Flüssigkeit enthielt, hineinragte. Sobald auf das Glycerin ein Druck ausgeübt wurde, hob sich das Quecksilber in der Piezometerröhre entsprechend der Volumenänderung der Flüssigkeit und derjenigen des Piezometers selbst. Um die Höhe, bis zu welcher das Quecksilber gestiegen war, zu bestimmen, schmolz Amagat in die Röhrenwandung eine Reihe von Platindrähten ein, welche aufsen (im Glycerin) mit einander durch kleine Platinspiralen verbunden waren und auf diese Weise eine ununterbrochene Leitung bildeten. Der letzte oberste Draht ging, von Isolatoren umhüllt, durch die Wandung des Stahlcylinders hindurch. Die Poldrähte des Stromkreises, in dem ein Galvanometer eingeschaltet war, waren an den Stahlcylinder und den hindurchgeführten Draht angeschlossen. In diesem Falle war der Strom geschlossen; er ging von der Cylinderwandung ins Quecksilber und die Quecksilbersäule über, welche in die Piezometerröhre eingedrungen war, von dort in den untersten Platindraht und die Spiralen, deren Widerstand je zwei Ohm betrug, und schliefslich in den durch den Cylindermantel hindurchgeführten Draht. Der Widerstand des Stromkreises änderte sich sprungweise und zwar jedesmal um zwei Ohm, wenn das Quecksilber bei seinem Aufsteigen in der Röhre bis zum nächsten Drahte gelangt war, da hierbei jedesmal eine der Spiralen ausgeschaltet und durch eine kleine Quecksilbersäule ersetzt wurde, deren Widerstand zu vernachlässigen war. Entsprechend der Abnahme des Widerstandes nahm die vom Galvanometer gemessene Stromstärke zu. Es ist aus dem Vorhergehenden unmittelbar ersichtlich, wie man aus der beobachteten Stromstärke bestimmen konnte, bis zu welchem der ins Piezometer eingeschmolzenen Platindrähte die Quecksilbersäule reichte, und hieraus das Volumen, bis auf welches die zu untersuchende Flüssigkeit komprimiert war. Der Stahlcylinder mit dem Piezometer wurde in ein grofses Kupfergefäfs mit gestofsenem Eise oder mit Wasser von bekannter Temperatur versenkt; auf diese Weise wurde der Einflufs der Erwärmung beseitigt, welche bei starker Kompression der Flüssigkeit auftritt. In der folgen-

den Tabelle sind die Werte von $10^6 \beta$ für vier Flüssigkeiten bei 0^0 und Drucken bis zu 3000 Atm. zusammengestellt.

Druck	Wasser	Äther	Alkohol	CS_2
1— 500 Atm.	47,5	107,2	76,9	65,7
500—1000 „	41,6	70,8	56,6	52,7
1000—1500 „	35,8	53,7	45,8	42,9
1500—2000 „	32,4	45,2	38,5	36,7
2000—2500 „	29,2	37,1	33,1	32,9
2500—3000 „	26,1	31,7	28,4	29,9

Für alle diese vier und ebenso auch für die übrigen acht von Amagat untersuchten Flüssigkeiten nimmt die Kompressibilität mit der Druckzunahme ab. Ferner verwischen sich bei sehr hohen Drucken gewissermafsen die individuellen Eigenschaften der Flüssigkeiten, denn die Kompressionskoeffizienten, die bei geringen Drucken sehr verschieden sind, nehmen bei den gröfsten erreichten Drucken einander sehr nahe liegende Zahlenwerte an.

Amagat hat ferner die Abhängigkeit der Kompressibilität der Flüssigkeiten von ihrer Temperatur untersucht. Für Äther erhielt er folgende Werte von $10^6 \beta$:

Druck	0^0	20^0	50^0	100^0	198^0
50— 100 Atm.	132,9	158,4	226,6	393,4	—
200— 300 „	108,8	125,0	150,4	240,8	564,5
500— 600 „	83,5	93,1	110,5	146,4	244,1
900—1000 „	65,4	70,6	80,1	97,4	143,6
1500—2000 „	45,2	47,7	52,6	—	—
2500—3000 „	31,7	33,8	36,6	—	—

Die Kompressibilität des Äthers nimmt also mit der Temperatur zu; mit Zunahme des Druckes nimmt sie ab und wird weniger abhängig von der Temperatur. Für Wasser findet Amagat bei geringen Drucken eine Abnahme der Kompressibilität bei Temperatursteigerung bis zu etwa 50^0; bei weiterer Temperatursteigerung nimmt die Kompressibilität zu. Je stärker der Druck ist, um so weniger scharf ist dieses Minimum ausgesprochen; bei sehr hohem Drucke verschwindet es beinahe und die Kompressibilität des Wassers nimmt, wie dies auch bei anderen Flüssigkeiten der Fall ist, mit der Temperatur zu. Amagat hat sehr bemerkenswerte Untersuchungen über den Einflufs des Druckes auf den thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeiten angestellt. Wir kommen hierauf in der Wärmelehre zurück. Hier soll nur in Kürze auf das Resultat verwiesen werden.

Der Ausdehnungskoeffizient α der Flüssigkeiten nimmt im allgemeinen mit der Druckzunahme ab, für Wasser dagegen nimmt er zu. Bei aufserordentlich hohen Drucken nehmen diese für die ver-

schiedenen Flüssigkeiten durchaus verschiedenen Koeffizienten nahezu gleiche Werte an. Die individuellen Besonderheiten der Flüssigkeiten verwischen sich auch in dieser Beziehung und verschwinden vielleicht bei sehr grossen Drucken vollständig.

Mit Zunahme der Temperatur t nimmt das Wachstum des thermischen Ausdehnungskoeffizienten α für Wasser, welches man bei der Drucksteigerung beobachtet, ab; bei 50° hängt derselbe fast gar nicht vom Drucke ab, für $t > 50^0$ nimmt er bei Druckzunahme ab. Dies geht aus folgender Tabelle hervor, in welcher die Werte von $10^6\alpha$ gegeben sind:

Druck	0—10°	10—20°	40—50°	60—70°	90—100°
1 Atm.	14	150	422	556	719
100 „	43	165	422	548	—
200 „	72	183	426	539	—
500 „	149	236	429	523	661
900 „	229	289	437	514	621

Der Ausdehnungskoeffizient α des Wassers wächst bei allen Drucken mit der Temperatur; dies gilt sogar bei einem Drucke von 3000 Atm., wie aus folgenden Zahlen ersichtlich ist:

	0,0°—10,1°	20,4°—29,45°	40,45°—48,85°
$10^6\alpha =$	391	433	496

Die Temperatur der gröfsten Dichte des Wassers, welche bei normalem Drucke 4° beträgt, erniedrigt sich bei Zunahme des Druckes; sie ist

bei 41,6 Atm. Druck gleich 3,3°
„ 93,3 „ „ „ 2,0°
„ 144,9 „ „ „ 0,6°

Bei noch höherem Drucke verschwindet die Zusammenziehung des Wassers beim Erwärmen über 0° vollständig.

§ 8. **Thermischer Druckkoeffizient.** Wenn ein Körper bei konstantem Volumen erwärmt wird, so mufs der auf seine Oberfläche wirkende Druck p anwachsen; er ist gleich dem Drucke des Körpers auf jene Hülle, die ihn an der Ausdehnung verhindert. Man kann diesen Druck auch als Spannung des (flüssigen oder festen) Körpers bezeichnen, analog dem Ausdrucke „Spannung des Gases". Ist p_0 der Druck bei 0°, so kann man

$$p = p_0(1 + \gamma t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

setzen, wo γ der mittlere thermische Druckkoeffizient zwischen 0° und t^0 ist, nach Analogie der Formel

$$v = v_0(1 + \alpha t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

welche sich auf die Volumenänderung bei konstantem Drucke bezieht und wo α der mittlere thermische Volumenkoeffizient zwischen 0^0 und t^0 ist, den man gewöhnlich den mittleren „Ausdehnungskoeffizienten" nennt [vergl. (12) auf S. 36].

Die Gröfsen α und γ sind im allgemeinen Funktionen des Zustandes (vergl. 33). Wenn die Temperatur t um Δt zunimmt, so wächst für $p = Const.$ der Druck p um

$$\Delta p = p_0 \gamma \Delta t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und bei $p = Const.$ das Volumen v um

$$\Delta v = v_0 \alpha \Delta t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Gröfsen γ und α in (8) und (9) sind die Werte beider obigen Koeffizienten bei t^0 und demjenigen Drucke p oder demjenigen Volumen v, bei denen die Temperaturerhöhung Δt erfolgt.

Wenn bei $t = Const.$ sich der Druck um Δp erhöht, so ändert sich das Volumen um

$$\Delta v = -\beta v \Delta p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

vergl. (1) auf S. 548, wo β den Kompressionskoeffizienten bedeutet. Die drei Koeffizienten α, β und γ sind durch eine Gleichung miteinander verknüpft, die sich leicht herleiten läfst. Seien v, p, t die Werte des Volumens, des Druckes und der Temperatur des Körpers; erwärmen wir ihn um Δt^0, so mufs sich sein Volumen um Δv, das aus Formel (9) erhalten wird, vergröfsern. Komprimieren wir nun den Körper bei konstanter Temperatur $t + \Delta t$ bis auf das ursprüngliche Volumen; hierfür mufs man den Druck um Δp wachsen lassen, wobei Δp aus Formel (10) erhalten wird, wenn man anstatt Δv (Verminderung des Volumens) $-\Delta v$ setzt, so dafs

$$\Delta v = \beta v \Delta p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wird, wo alsdann in (9) und (11) dasselbe Δv vorkommt. Die Gröfsen Δp in (11) und Δt in (9) sind durch Formel (8) miteinander verknüpft, denn durch die Druckzunahme Δp ist das Volumen gleich den früheren geworden, obgleich sich die Temperatur erhöht hat. Setzt man (8) und (9) in (11) ein, so erhält man

$$\alpha v_0 = \beta \gamma v p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

und hieraus

$$\gamma = \frac{\alpha v_0}{\beta v p_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Nach dieser Formel kann man den thermischen Druckkoeffizienten γ berechnen, wenn der thermische Ausdehnungskoeffizient α und der Kompressionskoeffizient β des Volumens bekannt sind. Hier ist v_0 das Volumen bei $t = 0^0$ und

dem Drucke p; p_0 ist der Druck bei $t = 0^0$ und dem Volumen v. Wir wollen nun γ für Quecksilber bei 0^0 und dem Drucke einer Atmosphäre berechnen, welchen Druck wir als Druckeinheit annehmen. Es ist dann $v = v_0$, $p_0 = 1$, $\beta = 0{,}00003$, und $\alpha = 0{,}00018$. Hieraus folgt $\gamma = 60$, d. h. wenn man Quecksilber bei konstantem Volumen von 0 auf 1^0 erwärmt, so wächst seine Spannung bis auf 60 Atmosphären. Von einigem Interesse ist es, die Formel (13) für ideale Gase zu prüfen, für die ja $\alpha = \gamma = 1 : T_0$ ist und Formel (2) auf S. 548 (nach der Relation $pv = RT$) den Wert $\beta = 1 : p$ giebt. Man erhält in diesem Falle aus Formel (13): $pv_0 = p_0 v$, was auch in der That richtig ist, da sich v_0 auf 0^0 und den Druck p, p_0 dagegen auf 0^0 und das Volumen v bezieht, die Temperaturen also in beiden Fällen die gleichen sind.

Litteratur.

Worthington: Trans. R. Soc. **183**, 355, 1893.
Canton: Phil. Trans. 1762 und 1764; Pogg. Ann. **12**, 39, 1828.
Perkins: Phil. Trans. **72**, 1820; Pogg. Ann. **9**, 547, 1827.
Oerstedt: Danske Vid. Selsk. Forhandl. **9**, 1822; Ann. ch. et phys. (2) **21**, 99, 1822; **22**, 192, 1823; **38**, 326, 1828; Pogg. Ann. **9**, 603, 1827.
Despretz: Compt. rend. **21**, 1845.
Colladon et Sturm: Ann. ch. et phys. (2) **36**, 113, 225, 1827; Pogg. Ann. **12**, 93, 1828.
Regnault: Mém. de l'Acad. Franç. **21**, 429, 1847.
Aimé: Ann. ch. et phys. (3) **8**, 257, 1843.
Grassi: Ann. ch. et phys. (3) **31**, 437, 1851.
Jamin, Amaury et Descamps: Compt. rend. **68**, 1564, 1869.
Quincke: Wied. Ann. **19**, 401, 1883.
Schumann: Wied. Ann. **31**, 14, 1887.
Röntgen und Schneider: Wied. Ann. **29**, 165, 1886; **31**, 1000, 1887; **33**, 644, 1888; **34**, 531, 1888.
Braun: Ber. bayr. Akad. 1886, S. 208; Wied. Ann. **30**. 264, 1887.
Amagat: Ann. ch. et phys. (5) **11**, 520, 1877; (6) **22**, 137, 1891; **29**, 68, 505, 1893; J. d. Phys. (2) **8**, 199; (3) **2**, 449, 1893; Compt. rend. **68**, 1170, 1869; **115**, 638, 919, 1041, 1238, 1893; **116**, 779, 946, 1893.
Pagliani e Vicentini: N. Cim. (3) **16**, 27, 1884; J. de phys. (2) **2**, 461, 1883.
Tait: Proc. R. Soc. Edinb. **12**, 46, 1883—1884; **20**, 63, 141, 1892.
Cailletet: Compt. rend. **75**, 77, 1872.
Röntgen: Wied. Ann. **44**, 1, 1891.
De Metz: Wied. Ann. **41**, 664, 1890; **47**, 706, 1892; J. d. russ. phys-chem. Ges. **22**, 126, 1890.
Drecker: Wied. Ann. **20**, 870, 1883; **34**, 954, 1888.
Dupré und Page: Phil. Trans. **159**, 619, 1869.
H. Gilbault: Compressibilité des dissolutions. Thèses (Toulouse). Paris 1897; Zeitschr. f. phys. Chem. **24**, 385, 1897.
Guinchant: Compt. rend. **132**, 469, 1901.
Dupré und Page: Pogg. Ann. Ergänzungsbd. **5**, 237, 1871.
Gilbault: Compt. rend. **114**, 209, 1892.
De Heen: Bull. de l'Acad. Roy. de Belg. (3) **9**, 1885.

Barus: Sill. J. (3) **39**, 478, 1890.
Jelenew: J. d. russ. phys.-chem. Ges. **5**, 109, 1873.
Grimaldi: N. Cim. (3) **19**, 212, 1886.
Avenarius: Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. **10**, 1877.
Tumlirz: Wien. Ber. **109**, p. 887, 1901; 110, 1901.

Viertes Kapitel.

Oberflächenspannung der Flüssigkeiten.

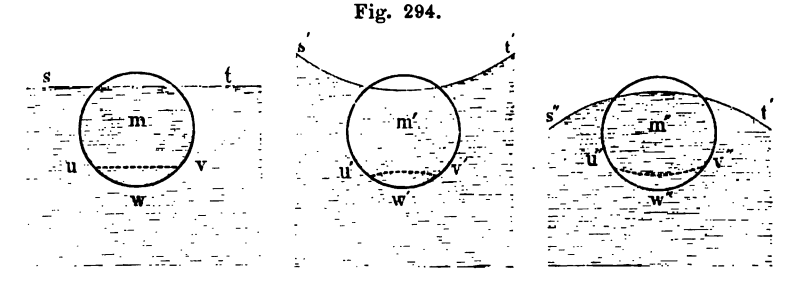
§ 1. Druck der Oberflächenschicht. Formel von Laplace. Auf S. 533 war gezeigt worden, dafs die Moleküle der Oberflächenschicht einer Flüssigkeit Kohäsionskräften unterworfen sind, welche sich zu einer von Null verschiedenen, nach dem Innern der Flüssigkeit gerichteten und senkrecht zu ihrer Oberfläche stehenden Resultanten zusammensetzen lassen. Die Flüssigkeit sucht die an ihrer Oberfläche befindlichen Teilchen gewissermafsen nach innen zu ziehen oder, was dasselbe ist, sie strebt danach ihre Oberfläche zu verkleinern.

Jede Verkleinerung der Oberfläche einer Flüssigkeit wird daher von einer Arbeit der Kohäsionskräfte begleitet, jede Vergröfserung dagegen von einer Arbeit der äufseren Kräfte, als deren Ergebnis ein Vorrat an potentieller Energie der Flüssigkeit auftritt, so dafs also letzterer von der Gröfse der Flüssigkeitsoberfläche abhängt. Eine plötzliche Verkleinerung einer Flüssigkeitsoberfläche zieht ein Freiwerden von potentieller Energie nach sich und gewöhnlich auch einen Übergang derselben in kinetische Bewegungsenergie der Flüssigkeit selbst. Ein Beispiel hierfür haben wir bei starkem Wellengange in dem Überschlagen der Wellenberge. Die Verminderung der freien Wasseroberfläche wird von einer bedeutenden Vermehrung der sichtbaren Bewegungsenergie begleitet, woraus sich auch das Auftreten der sogenannten Wellenkämme erklärt.

Die Kohäsionskräfte, welche auf die Teilchen der Oberflächenhaut wirken, vereinigen sich zu einem Drucke, dessen Gröfse wir für die Oberflächeneinheit mit P bezeichnen. Dieser Druck mufs von der Gestalt der Oberfläche abhängen. Bezeichnen wir seine Gröfse für eine ebene Oberfläche mit K, so ist der Druck P, der auf einer konvexen Oberfläche lastet, gröfser, der auf einer konkaven Oberfläche kleiner als K. Um dies zu beweisen, wollen wir die Kräfte betrachten, welche auf die Teilchen m, m' und m'' (Fig. 294 a. f. S.) einwirken, die sich in gleichen Abständen von der ebenen Oberfläche st, der konkaven $s't'$ und der konvexen $s''t''$ befinden. Denkt man sich m, m' und m'' von ihren molekularen Wirkungssphären umgeben und die Flächen uv, $u'v'$ und $u''v''$ symmetrisch zu st, $s't'$ und $s''t''$ in Bezug

auf die Kugelzentren gelegen, so sieht man, dafs die Wirkungen aller in den Volumina $stvu$, $s't'v'u'$ und $s''t''v''u''$ enthaltenen Teilchen auf

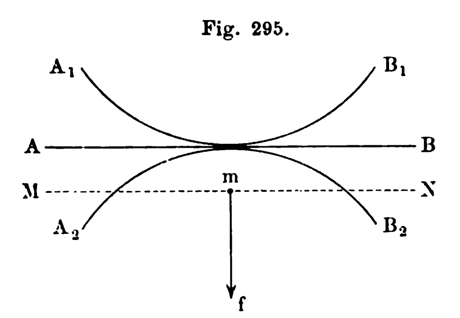
Fig. 294.



die zentralen Teilchen der Symmetrie wegen gleich Null sind. Man kann sich daher vorstellen, dafs die Resultanten aller Kohäsionskräfte, welche auf m, m' und m'' wirken, nur von den innerhalb der Abschnitte uvw, $u'v'w$ und $u''v''w''$ gelegenen Teilchen herrühren. Die gröfste Dicke dieser Abschnitte bei w, w' und w'' ist die gleiche und ist gleich dem Radius der Molekularwirkungssphäre minus dem Abstande der Teilchen m, m' und m'' von der Flüssigkeitsoberfläche. Offenbar ist $u'v'w' < uvw$ und $u''v''w'' > uvw$, folglich ist die Kraft, welche auf m'' wirkt, gröfser, die auf m' wirkende kleiner als die auf m wirkende Kraft.

Eine ihrem Wesen nach gleiche Betrachtung ist auch die folgende. Sei m (Fig. 295) ein Teilchen, welches sich in der Nähe der Oberfläche befindet, als welche man einmal die konkave Fläche A_1B_1, ein andermal die ebene AB oder endlich die konvexe Fläche A_2B_2 gelten läfst. Durch m führt man die Ebene $MN \parallel AB$. Die unterhalb MN gelegenen Teilchen ziehen m ins Innere der Flüssigkeit hinein, die Teilchen dagegen, welche höher als MN liegen, geben eine Kraft, die von m nach der Oberfläche hin gerichtet ist. Je gröfser diese Kraft ist, um so kleiner ist die Resultante f aller Kohäsionskräfte, die auf m wirken. Vergleicht man die Fälle, wo die Oberfläche konkav und konvex ist, mit dem Falle der ebenen Oberfläche, so befinden sich im ersten Falle über MN mehr, im zweiten Falle weniger Teilchen, als bei der ebenen Fläche. Hieraus geht hervor, dafs f für die konvexe Fläche gröfser, für die konkave Fläche kleiner ist, als für die ebene Oberfläche.

Fig. 295.



Der Unterschied entsteht durch die Wirkung der Teilchen, welche sich im Raume zwischen AB und $A_1 B_1$ resp. $A_2 B_2$ befinden. Durch Berechnung dieser Wirkung erhielt Laplace (1807) folgende Formel für den Wert des normalen Druckes P, welcher von der Oberflächenschicht der Flüssigkeit ausgeübt wird

$$P = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \dots \dots \quad (1)$$

Hier sind K und H zwei Konstanten, die von der Art der Flüssigkeit und ihrem physikalischen Zustande abhängen; R_1 und R_2 sind die Krümmungsradien zweier normaler Hauptschnitte der Flüssigkeitsoberfläche; sie werden positiv genommen, wenn sie ins Innere der Flüssigkeit gerichtet sind. Führt man die neue Gröfse

$$\alpha = \frac{H}{2} \quad \dots \dots \quad (2)$$

ein, so erhält man für P einen Ausdruck von folgender Form

$$P = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \dots \dots \quad (3)$$

Für die ebene Oberfläche ist $R_1 = R_2 = \infty$, folglich

$$P = K.$$

Somit ist K der normale Druck für den Fall einer ebenen Oberfläche. Für die konkave Oberfläche sind R_1 und R_2 negativ, folglich $P < K$.

Für eine Kugelfläche vom Radius R ist $R_1 = R_2 = R$ und

$$P = K + \frac{2\alpha}{R} \quad \dots \dots \quad (4)$$

Aus gewissen Gründen, die weiter unten erläutert werden sollen, nennt man die Gröfse $\frac{1}{2} H = \alpha$ die Oberflächenspannung der Flüssigkeit. — Der Gröfse α, deren Zahlenwert auf experimentellem Wege gefunden werden kann, werden wir im weiteren bei verschiedenen Erscheinungen begegnen. Der Druck K kann nicht unmittelbar durch den Versuch gefunden werden; indirekte Schlüsse jedoch, auf die wir noch zurückkommen werden, zeigen, dafs K im Vergleich zum zweiten Gliede des Ausdruckes für P sehr grofs ist und einige Tausend Atmosphären beträgt. Hieraus folgt, dafs der Druck, welchen eine Flüssigkeit seitens ihrer Oberflächenschicht erfährt, aufserordentlich grofs ist. Es kann seltsam erscheinen, dafs ungeachtet dieses Druckes sich eine Flüssigkeit nur wenig einer Formenänderung widersetzt, und leicht in Teile geteilt werden kann u. s. w. Ohne hier auf Details einzugehen, sei nur daran erinnert, dafs Flüssigkeiten auch unter der

Wirkung einer künstlichen, von aufsen einwirkenden Kompression nicht die freie Beweglichkeit ihrer Teile verlieren, wie man dies z. B. indirekt daran erkennen kann, dafs es in den ungeheuren Tiefen der Ozeane Fische und andere sich bewegende Seetiere giebt.

§ 2. Formel von Gaufs; Oberflächenspannung der Flüssigkeiten. Die Theorie derjenigen Erscheinungen, von denen dieses und die folgenden Kapitel handeln, stammt von Gaufs. Seine Theorie führt zu einer einfachen Formel, welche die Gröfse derjenigen Arbeit dr liefert, welche geleistet werden mufs, um die Flüssigkeitsoberfläche S um dS zu vergröfsern; diese Arbeit dr ist proportional dem Oberflächenzuwachs dS, so dafs man

$$dr = \alpha dS \qquad (5)$$

setzen kann.

Weiter unten wird gezeigt werden, dafs der in dieser Formel enthaltene Koeffizient α identisch mit der Gröfse α in Formel (3) ist. Vorläufig wollen wir nachweisen, dafs beide von derselben Dimension sind. Die Gröfsen P und K in (3) bedeuten den Druck auf die Oberflächeneinheit; folglich ist ihre Dimension

$$[P] = [K] = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Oberfläche}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L^2 = \frac{M}{LT^2}.$$

Von derselben Dimension mufs auch das zweite Glied sein, in welchem R_1 und R_2 die Dimension L haben; somit ist

$$\left[\frac{\alpha}{L}\right] = \frac{M}{LT^2}$$

und hieraus

$$[\alpha] = \frac{M}{T^2} \qquad (6)$$

Von derselben Dimension aber ist auch die Gröfse α in Formel (5), denn die linke Seite ist eine Arbeit, dS eine Oberfläche, also ist

$$[\alpha] = \left[\frac{\text{Arbeit}}{\text{Oberfläche}}\right] = \frac{ML^2}{T^2} : L^2 = \frac{M}{T^2}.$$

Zur Vergröfserung der Oberfläche mufs eine Arbeit geleistet werden, gerade als ob die Oberfläche selbst ihrer Vergröfserung entgegenwirkt. Auf den ersten Blick scheint es so, als ob die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit sich einer Kraft, welche sie zu dehnen sucht, widersetzt. Hieraus hat man sich denn von der Oberflächenschicht eine solche Vorstellung gebildet, als ob sie vergleichbar einer elastischen, gespannten Membran, etwa einer Gummiblase wäre. Ist eine solche Membran gleichmäfsig gespannt und man zieht auf ihrer Oberfläche an einer beliebigen Stelle in beliebiger Rich-

tung eine Linie, deren Länge σ ist, so hat man an dieser Linie Kräfte angreifen zu lassen, die senkrecht zu ihr sind und sich in Tangentialebenen zur Membran befinden, um den auf einer Seite der Linie σ gelegenen Teil in unveränderter Spannung zu erhalten, wenn der auf der anderen Seite von ihr gelegene Teil fortgenommen wird. Sei α die ganze Kraft, welche längs der Linie, deren Länge $\sigma = 1$ ist, anzubringen ist. Wir wollen diese Kraft die Spannung der Membran nennen.

Um eine elastische Membran zu recken, hat man eine Arbeit zu leisten, die für unendlich kleine Veränderungen der Membranoberfläche sich leicht finden läfst. Die Vergröfserung der Oberfläche S wird erhalten, wenn man die Linie σ, welche sich an ihrem Rande oder irgendwo auf ihr befindet, sich selbst parallel um das Stück σ' verschiebt. Gehört σ nicht der Umgrenzung der Oberfläche S an, so wird vorausgesetzt, dafs der von σ begrenzte, auf derjenigen Seite liegende Teil, nach welcher sich σ verschiebt, seine Spannung unverändert beibehält. Die Summe der Kräfte, welche man an σ angreifen zu lassen hat, ist gleich $\alpha\sigma$; die Angriffspunkte dieser Kräfte verschieben sich in der Richtung der Kräfte um das Stück σ', folglich ist die gesuchte Arbeit $dr = \alpha\sigma\sigma'$. Es ist aber $\sigma\sigma' = dS$, d. h. gleich der Vergröfserung der Oberfläche, woraus sich dann

$$dr = \alpha dS \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

ergiebt.

Diese Formel ist identisch mit der Formel von Gaufs (5). Vergleicht man daher die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit mit einer gespannten elastischen Membran, so bezeichnet die Gröfse α in der Gaufsschen Formel die Spannung der Oberflächenschicht. Letztere Spannung wird durch eine Kraft gemessen, welche auf die Längeneinheit einer beliebigen auf der Flüssigkeitsoberfläche gelegenen Linie wirkt; diese Kraft ist senkrecht zur erwähnten Linie und tangential zur Flüssigkeitsoberfläche. Die Kraft f, welche in dieser Weise auf eine Linie von der Länge σ wirkt, ist gleich

$$f = \alpha\sigma \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Die Gröfse α nennt man die Oberflächenspannung der Flüssigkeit. Zu der Vorstellung von einer solchen „Spannung" der Oberflächenschicht einer Flüssigkeit ist man durch die Analogie zwischen eben dieser Schicht und einer elastischen Membran gekommen; im wesentlichen stützte sich diese Analogie auf den Umstand, dafs eine Vergröfserung der Oberfläche einer Flüssigkeit nur durch Leistung einer gewissen Arbeit möglich ist.

Es giebt indes eine grofse Reihe von Erscheinungen, welche darauf hindeuten, dafs man es hier nicht mit einer blofsen Analogie

zu thun hat, sondern dafs sich die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit auch ihrer inneren Struktur nach in Wirklichkeit von den übrigen tiefer gelegenen Teilen der Flüssigkeit unterscheidet. Man glaubt, dafs sie eine gröfsere Dichte hat und dadurch in mancher Hinsicht einer gespannten, elastischen Membran ähnlich wird. Der erste, welcher die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit mit einer gespannten, elastischen Membran verglichen hat war Segner (1752); als Begründer der Lehre von der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten hat man jedoch Young (1805) anzusehen. Eine sehr grofse Zahl verschiedener Erscheinungen erklärt sich sehr einfach, wenn man die Existenz einer Oberflächenspannung annimmt, die, wie später bewiesen werden soll. mit der Gröfse des Oberflächendrucks in einfachem Zusammenhang steht. Dieser Zusammenhang wird auch durch die Formel (3) von Laplace ausgedrückt, in welcher P der Oberflächendruck und α, wie bereits gesagt war, identisch mit dem α in der Formel (5) von Gaufs ist und die Oberflächenspannung bezeichnet; hierauf hatte uns der Analogie nach die Formel (7) verwiesen. Wenn man aber auch diese oder jene Erscheinungen durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten und überhaupt durch besondere Eigenschaften der Oberflächenhaut erklärt, so darf man doch nicht vergessen, dafs diese Spannung, wenn sie überhaupt existiert, nur eine Folge der Grundursache aller hierher gehörigen Erscheinungen ist, nämlich der Kohäsion der Flüssigkeitsteilchen und des hierdurch unmittelbar hervorgerufenen Oberflächendrucks, dessen Gröfse durch die Formel (3) von Laplace gegeben ist und des Bestrebens der Flüssigkeit eine möglichst kleine Oberfläche anzunehmen, d. h. sich der Kugelgestalt zu nähern. Immerhin bleibt es problematisch, ob man die Gröfse α in der Laplaceschen Formel als Spannung anzusehen hat und ebenso verhält es sich mit der Annahme, dafs die Oberflächenschicht eine gröfsere Dichte besitzt, sich dem Zerreifsen, Spannen widersetzt u. s. w.

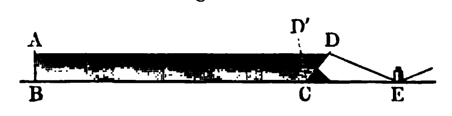
Eine einwandsfreie Erklärung der Ursachen für das Auftreten einer dichteren Oberflächenschicht bei den Flüssigkeiten existiert bis jetzt noch nicht. Der Umstand allein, dafs in dieser Schicht Kräfte auftreten, welche ins Innere der Flüssigkeit gerichtet sind, kann nicht zur Erklärung für eine Verdichtung dieser Schicht dienen. Solche Kräfte müssen einen Druck hervorrufen, der sich nach den Grundgesetzen der Hydrostatik durch die Flüssigkeit hindurch nach allen Richtungen fortpflanzt und eine gleiche Verdichtung in ihrer gesamten Masse hervorruft. Im Gegensatz zu Obigem führen einige Überlegungen eher zu dem Schlufs, dafs die Dichte der Oberflächenhaut kleiner sei als die Dichte der übrigen Flüssigkeitsmasse, wenigstens in der Richtung normal zur Oberfläche. Die verschiedenen Versuche zur Erklärung der besonderen Eigenschaften der Oberflächenschicht kommen auf den Nachweis heraus, dafs die Teil-

chen in dieser Haut parallel zur Oberfläche einander genähert sind; aber diese Beweise sind nur wenig überzeugend. Von den Ursachen für das Zustandekommen der Kohäsionskräfte, wie von den Gesetzen, nach denen sie wirken, ist uns nichts bekannt; wir wissen auch nicht, wie der mittlere Abstand der Teilchen voneinander einerseits unter Einwirkung jener Kräfte, andererseits im Zusammenhange mit der Art und der Geschwindigkeit, mit der sich die Teilchen bewegen, bedingt wird. Es ist daher auch nicht zu verwundern, wenn wir zu keiner irgendwie klaren Vorstellung von der Verteilung der Moleküle in der Oberflächenschicht gelangen können.

Somit ist also die Lehre von der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten ganz und gar auf die Analogie zwischen den Eigenschaften der Oberflächenschicht und den Eigenschaften einer gespannten elastischen Membran beschränkt und es fehlt ihr jede feste wissenschaftliche Grundlage. Diese Lehre ist jedoch von nicht geringem Nutzen, da sie uns in den Stand setzt, eine grofse Gruppe verschiedenartiger Erscheinungen auf ein und dasselbe Prinzip zurückzuführen; sie dient als Grundlage zum Verständnis und bei der Beschreibung vieler Erscheinungen. Die Frage nach der Realität der Oberflächenspannung kann man daher offen lassen. Besonders hat sich mit der Frage nach der Entstehung der Oberflächenspannung van der Mensbrugge beschäftigt. Er, sowie einige andere Forscher glauben, dafs die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit nicht nur keine gröfsere, sondern sogar eine geringere Dichte als die übrigen Teile der Flüssigkeit besitzt. Van der Mensbrugge hat mehrere hierher gehörige Theorien einer äufserst scharfen Kritik unterworfen, wobei er sich unter anderem auf die Arbeiten von Mellberg (in Helsingfors) und Worthington stützte. Unter den zahlreichen theoretischen Untersuchungen über Oberflächenspannung können wir noch die von van der Waals (1894) und Hulshof (1901) erwähnen.

§ 3. Versuche, welche zu Gunsten des Vorhandenseins einer Oberflächenspannung gedeutet werden. In diesem Paragraphen werden wir nur auf einige hierher gehörige Versuche verweisen. Ferner werden wir uns in diesem und den folgenden Kapiteln noch mit mehreren Erscheinungen bekannt machen, die ihre einfachste Erklärung finden, wenn man die Existenz einer Oberflächenspannung annimmt.

Fig. 296.



1. Es sei $ABCD$ (Fig. 296) ein flaches Gefäfs, dessen Seitenfläche CD um die Kante C drehbar ist. Wenn man dieselbe durch ein Klötzchen stützt, mit einem Faden an den Zapfen E bindet, das

Gefäſs mit Wasser füllt und den Faden DE durchbrennt, so hebt sich die Seitenfläche CD und nimmt die Lage CD' an. Als Ursache dient gewissermaſsen die Spannung längs der Oberfläche AD.

2. Füllt man ein tiefes Gefäſs mit Quecksilber, bestreut die Oberfläche des letzteren mit irgend einem Pulver und taucht einen dicken Glasstab vertikal ins Quecksilber, so wird das Pulver ganz in die sich um den Stab bildende Vertiefung hineingezogen, als ob das Quecksilber von einer Haut umgeben wäre, die beim Eintauchen des Stabes nicht zerreiſst. Derselbe Versuch gelingt auch mit Wasser, wenn man den Glasstab vorher mit Fett bestreicht oder statt seiner etwa ein Stearinlicht nimmt.

3. Hält man eine etwas Flüssigkeit enthaltende dünne Röhre in vertikaler Lage, so nimmt der am unteren Ende der Röhre hängende Tropfen dieselbe Form an, wie ein dünnes Kautschukhäutchen, auf welches Wasser gegossen ist, welches dem Häutchen die Form eines kleinen Sackes verleiht. Bringt man noch mehr Wasser in die Röhre, so zieht sich das Säckchen allmählich in die Länge und erinnert dabei in seiner Form fortwährend an einen sich allmählich verlängernden Tropfen.

4. Eine Nähnadel kann man bei einiger Vorsicht auf Wasser zum Schwimmen bringen, sie liegt dabei auf dem Wasser, wie auf einer elastischen Membran, von der sie getragen wird. Auch das Dahingleiten einiger Insekten auf der Wasseroberfläche erinnert an die Bewegung auf einer elastischen Membran.

5. Wählen wir zum folgenden Versuche ein Aräometer oder einen anderen ähnlichen Apparat, der in vertikaler Lage schwimmt und dabei ein wenig über die Wasserfläche hinausragt. Befestigen wir am oberen Ende des Apparats einen kurzen vertikalen Draht und an diesem einen horizontalen Drahtring oder ein kleines Drahtnetz und tauchen den Apparat ganz ins Wasser ein. Er wird darauf emporsteigen; sobald aber der Ring oder das Netz an der Oberfläche angelangt ist, wird er zu steigen aufhören, ganz so als ob er an der Oberfläche den Widerstand einer Haut findet, die ihn nicht hindurchläſst. Hebt man dagegen den Apparat etwas aus dem Wasser hervor und überläſst ihn hierauf sich selbst, so wird er schwimmen, wobei der Ring oder das Netz sogar ziemlich hoch über der Wasserfläche sich befinden kann.

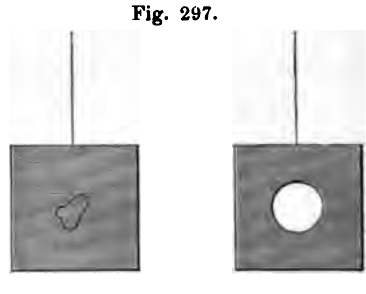
6. Wie wir sehen werden, ist die Oberflächenspannung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; für Schwefeläther ist sie viel geringer als für Wasser. Bringt man Äther selbst in ganz geringer Menge auf Wasser, so vermindert sich die Oberflächenspannung des letzteren ganz bedeutend. Wenn beim vorhergehenden Versuche der Apparat mit dem Drahtringe an der Wasseroberfläche hängen bleibt, so genügt es, einen Tropfen Äther auf das Wasser zu gieſsen, um

dadurch die Oberflächenspannung in dem Maße zu verringern, daß der Apparat im stande ist, die Oberflächenschicht zu durchstoßen und bis zu derjenigen Lage zu steigen, in welcher er im Wasser schwimmt.

7. Eine Wasserfläche sei mit Bärlappsamen (semen lycopodii) bestreut und ein Glas mit Schwefeläther ausgeschwenkt, so daß in ihm nur die Ätherdämpfe zurückgeblieben seien. Gießt man dann aus dem Glase die schweren Ätherdämpfe auf die Wasserfläche, so weicht das Pulver schnell nach allen Seiten von der Stelle zurück, welche mit dem Ätherdampf in Berührung gekommen ist. Die Erscheinung ist sehr effektvoll, da die Ätherdämpfe selbst unsichtbar sind und es den Anschein hat, als ob der Versuch mit einem leeren Glase ausgeführt worden sei. Die Erklärung für diese Erscheinung ist, daß sich die Oberflächenspannung dort, wo der Ätherdampf hingelangt, vermindert, infolgewessen der übrige Teil der Oberflächenhaut, der seine frühere Spannung beibehalten hat, schnell kontrahiert und das aufgestreute Pulver mit sich zieht. Ein am unteren Ende eines vertikalen Röhrchens hängender Tropfen fällt herab, sobald man Äther in seine Nähe bringt.

8. Flüssigkeiten können die Form dünner Häute annehmen, wenn sie sich im sogenannten lamellaren Zustande, von dem weiter unten die Rede sein wird, befinden. Hier sei nur erwähnt, daß man aus reinem Wasser nur schwer Lamellen herstellen kann, aus Seifenwasser dagegen sehr leicht. Es genügt hierzu, einen Drahtring ins Seifenwasser zu tauchen; hebt man dann denselben vorsichtig heraus, so ist er mit einer sehr dünnen Lamelle überzogen. An einer derartigen flüssigen Lamelle treten zu beiden Seiten derselben die Erscheinungen der Oberflächenspannung sehr deutlich auf. Überzieht man den Rand eines Trichters mit einer solchen Lamelle, so beginnt dieselbe, während sich ihre Oberfläche beständig verkleinert, ins Innere des Trichters hineinzugleiten. Wirft man auf eine an einem Drahtgestelle befindliche Seifenwasserlamelle eine Schlinge aus einem angefeuchteten dünnen Faden, so nimmt dieselbe zunächst eine beliebige Gestalt an (Fig. 297 links). Durchstößt man hierauf die Lamelle im Innern der Schlinge, so wird der Faden durch die Spannung der Lamelle, welche sich zwischen dem Faden und dem Draht befindet, zu einem Kreise gespannt (Fig. 297 rechts).

Fig. 297.



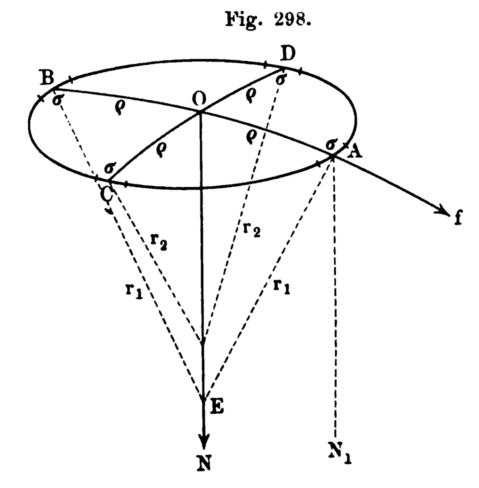
9. Eine ähnliche Erscheinung tritt auf, wenn man die Fadenschlinge auf eine Wasserfläche bringt und hierauf etwas Spiritus oder Äther ins Innere der Schlinge träufelt. Die äußere Spannung überwindet hier die innere und veranlaßt die Schlinge Kreisform anzunehmen.

10. Ein Stückchen Kampfer gerät, auf reines Wasser geworfen, in schnelle und unregelmäfsige Bewegungen. Diese sich seltsam ausnehmende Erscheinung erklärt sich dadurch, dafs sich der Kampfer im Wasser auflöst, wodurch sich die Oberflächenspannung vermindert. Da jedoch die Auflösung nicht von allen Seiten gleichmäfsig von statten geht, so wird das Kampferstückchen jedesmal nach der Seite hingezogen, auf welcher die Oberflächenspannung gröfser ist.

§. 4. Zusammenhang zwischen Normaldruck und Oberflächenspannung. Nehmen wir die Existenz einer Oberflächenspannung α an, wie sie durch Formel (8) auf S. 565 ausgedrückt wird, wo f eine Kraft ist, die längs der Linie σ, senkrecht zu ihr und tangential zur Flüssigkeitsoberfläche wirkt; ebenso wird jene Oberflächenspannung durch Formel (7) wiedergegeben, wo die Gröfse der Arbeit dr bestimmt wird, welche bei Vergröfserung der Oberfläche um dS zu leisten ist. Die Laplacesche Formel (3) giebt in diesem Falle den Zusammenhang zwischen dem Normaldruck P und der Oberflächenspannung α. Wir wollen jetzt diese Formel herleiten.

Wenn man die gekrümmte Oberflächenschicht der Flüssigkeit als gespannte elastische Membran ansieht und den Druck berechnet, welchen sie ausübt, so erhält man den Überschufs des Normaldruckes P über jenen Druck K, welcher auf eine ebene Oberfläche wirkt, d. h. die Gröfse $P - K$. Sei O (Fig. 298) ein Punkt der Flüssigkeitsoberfläche; um denselben sei eine auf der Oberfläche gelegene Kurve beschrieben, deren sämtliche Punkte von O den gleichen Abstand ϱ haben. Ist ϱ unendlich klein, so kann man diese Kurve als Kreislinie betrachten. Die Wirkung der Oberflächenspannung kommt nach der von uns eingeführten Anschauung auf die Wirkung von Kräften heraus, die gleichmäfsig längs dieser Kreislinie senkrecht zu ihr verteilt sind, wobei auf die Längeneinheit die Kraft α wirkt.

Fig. 298.



Fällen wir die Senkrechte ON zur Oberfläche und legen durch sie zwei zu einander senkrechte Ebenen, welche die Oberfläche in den Kurven AB und CD schneiden. In der Umgebung von A wählen wir

das Element σ der Kreislinie und ziehen die Gerade AE senkrecht zur Oberfläche im Punkte A. Für ein unendlich kleines ϱ ist der Grenzwert der Entfernung AE gleich dem Krümmungsradius r_1 des Normalschnitts AB. Auf das Element σ wirkt die Kraft der Spannung $f = \alpha\sigma$ senkrecht zu σ und zu AE. Diese Kraft liefert eine zu ON parallele Komponente, wodurch auch die Vergröfserung des Normaldrucks bei einer konvexen und die Verminderung desselben bei einer konkaven Oberfläche hervorgerufen wird. Die Gröfse dieser Komponente ist gleich $f \cos (f, AN_1)$; da aber $f \perp AE$ ist, so ist sie auch gleich $f \sin OEA = \sigma\alpha \frac{\varrho}{r_1}$. Eine ebensolche normale Komponente giebt die Spannung, welche auf das in der Umgebung von B gelegene Element σ der Kreislinie wirkt. Beide Kräfte geben zusammen den Normaldruck $2\sigma\alpha\frac{\varrho}{r_1}$. Bezeichnet man mit r_2 den Krümmungsradius des Normalschnittes CD, senkrecht zu AB, so erhält man für den Normaldruck, der durch die Spannung an den Elementen σ bei C und D hervorgerufen ist, die Gröfse $2\sigma\alpha\frac{\varrho}{r_2}$. Alle vier Kräfte geben den Druck $2\sigma\alpha\varrho\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$. Nach einem bekannten Lehrsatz ist die Summe $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ gleich $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, wo R_1 und R_2 die Krümmungsradien für die Hauptschnitte der Oberfläche sind. Danach geben die vier an den Elementen σ in A, B, C und D angreifenden Kräfte den Normaldruck

$$p = 2\alpha\sigma\varrho\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \cdots \cdots \quad (9)$$

Den gesamten Normaldruck, welcher durch die Spannung längs der ganzen Peripherie hervorgerufen wird, erhält man, wenn man die Summe der Gröfsen p für alle Gruppen der σ zu je vier genommen bildet, welche die gesamte Peripherie ergeben. Da $\Sigma 4\sigma = 2\pi\varrho$ ist, so ist $\Sigma\sigma = \frac{1}{2}\pi\varrho$ und mithin

$$\Sigma p = 2\alpha\varrho\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Sigma\sigma = \alpha\pi\varrho^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \cdot \quad (10)$$

Den Normaldruck $P - K$, bezogen auf die Oberflächeneinheit, erhält man, wenn man den eben erhaltenen Ausdruck für den Druck Σp durch die Flächenzahl $\pi\varrho^2$ dividiert; sonach ist

$$P - K = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \cdots \cdots \quad (11)$$

woraus sich die Laplacesche Formel ergiebt

$$P = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Somit kann das Vorhandensein eines Unterschiedes zwischen dem Normaldruck für eine ebene und eine nicht ebene Oberfläche thatsächlich durch die Wirkung einer Oberflächenspannung erklärt werden.

Formel (12) lehrt: Je gröfser die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit ist, um so gröfser ist auch der Unterschied zwischen dem Normaldruck für die ebene und die gekrümmte Flüssigkeitsoberfläche.

Die Methoden zur Bestimmung des Zahlenwertes für die Oberflächenspannung α werden im folgenden Kapitel betrachtet werden.

§ 5. Absoluter Wert des Normaldruckes K. Im folgenden Kapitel werden wir, wie gesagt, die Methoden zur Bestimmung der Gröfse α behandeln. Betrachten wir an dieser Stelle die Gröfse des Normaldruckes K für eine ebene Fläche. Auf S. 563 ist bereits erwähnt worden, dafs diese Gröfse nicht unmittelbar gemessen werden kann, und dafs die indirekten Methoden zur Bestimmung derselben auf sehr grofse Werte führen.

Es sei hier auf zwei Versuche zur Bestimmung von K verwiesen. Der erste von ihnen stammt von van der Waals. Auf S. 433 haben wir die van der Waalssche Zustandsgleichung der Gase [Formel (11)] kennen gelernt, in welcher das Glied $\frac{a}{v^2}$ die Druckverminderung eines Gases, welche durch die Kohäsion der Gasmoleküle bewirkt wird, bedeutet. Diese Gröfse ist nichts anderes, als der Oberflächendruck der Gase. Van der Waals macht die Annahme, dafs seine Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

auch für Flüssigkeiten in Geltung bleibt, für welche somit

$$K = \frac{a}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ist.

Drückt man p in Atmosphären aus und wählt als Volumeneinheit das Volumen eines Kilogramms Gas bei 0^0 und 1 Atm. Druck, so erhält man für Kohlendioxyd gemäfs seinen Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze $a = 0{,}008\,74$. Das Volumen ist, wenn sich die Kohlensäure verflüssigt hat, $v = \frac{1}{500}$, mithin ist für flüssige Kohlensäure der Oberflächendruck gleich

$$K = \frac{a}{v^2} = 2180 \text{ Atm.}$$

In ähnlicher Weise erhält man die folgenden Zahlen:

	K
Äther	1300 bis 1430 Atm.
Alkohol	2100 bis 2400 „
Wasser	10 700 „

Sonach befindet sich die innere Masse des Wassers unter einem Drucke von 10 000 Atm., was 100 kg pro Quadratmillimeter beträgt.

Stefan (1886) stützt sich bei Bestimmung von K auf ganz andere Betrachtungen. Er überlegt folgendermafsen: Um ein Flüssigkeitsmolekül aus dem Inneren der Flüssigkeit heraus bis an die Oberfläche zu befördern, wo auf dasselbe nur noch die Halbsphäre (vergl. Fig. 277) wirkt, hat man die Hälfte derjenigen Arbeit zu leisten, welche dazu erforderlich ist, um das Molekül aus dem Inneren der Flüssigkeit heraus in den von gesättigten Dämpfen derselben Flüssigkeit erfüllten Aufsenraum zu befördern. Die letztere Arbeit aber kann man leicht finden, wenn man die Verdampfungswärme kennt. Stefan erhält folgende Formel:

$$(K - p)\,v = \frac{1}{2}\,Q,$$

wo p die Spannung der gesättigten Dämpfe, v das Volumen eines Grammes der Flüssigkeit und Q die Verdampfungswärme, ausgedrückt in mechanischen Einheiten, ist. Für Äther fand Stefan $K = 1284$ Atm.

§ 6. Durch die Oberflächenspannung hervorgerufene Form einer Flüssigkeitsmasse. Die Plateauschen Versuche. Damit eine flüssige Masse, welche keiner Einwirkung von Aufsenkräften unterliegt, im Gleichgewicht bleibt, mufs der Druck, unter dem sie sich befindet, an allen Punkten ihrer Oberfläche denselben Wert haben. Die Laplacesche Formel (12) stellt als Bedingung

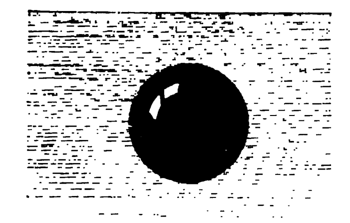
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = Const. \qquad (15)$$

Die Oberfläche einer Flüssigkeit mufs in allen Punkten ein und dieselbe mittlere Krümmung haben. Solcher Flächen giebt es unzählig viele.

Plateau (1843 bis 1863) hat eine Methode angegeben, nach welcher man flüssige Massen erhalten kann, die sich gewissermafsen nur unter Einwirkung der Oberflächenspannung befinden. Man hat zu diesem Zwecke die Flüssigkeit nur in eine andere zu bringen, mit welcher sie sich nicht vermischt, und welche mit ihr die gleiche Dichte besitzt. Als einfachstes Beispiel kann Öl (z. B. Provenceröl) dienen, das man in eine entsprechende Mischung von Wasser und Alkohol bringt, in welchem ein kleiner Öltropfen weder schwimmt, noch unter-

sinkt. Empfehlenswert ist es dabei, das Öl zu färben; es nimmt im Inneren der Mischung Kugelform an (Fig. 299). Eine Mischung von Benzol und Bromäthylen, der besseren Sichtbarkeit wegen mit Jod gefärbt, nimmt in einer entsprechenden Lösung von Kochsalz in Wasser ebenfalls Kugelform an.

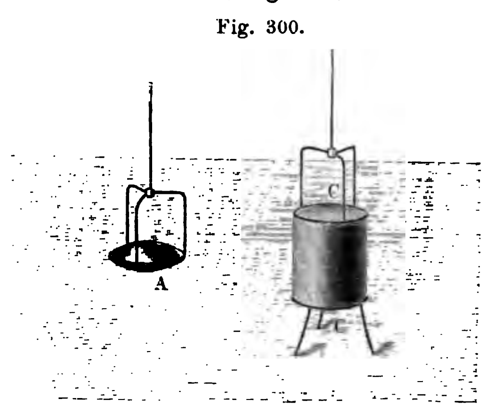
Fig 299.



Steckt man durch die in angegebener Weise erhaltene flüssige Kugel einen Draht hindurch und versetzt ihn in schnelle Rotation, so beginnt auch die Kugel zu rotieren. Sie plattet sich hierbei ab und bei gröfserer Rotationsgeschwindigkeit trennt sich von ihr ein äquatorialer Wulst ab, der sich als Ring loslöst. Die Bedeutung dieser Versuche ist für die Kosmogonie von Wichtigkeit, wie wohl allgemein bekannt ist.

Um Flüssigkeitsmassen von anderer Gestalt zu erhalten, hat man sie in Berührung mit verschiedenen Drahtgestellen zu bringen. So kann sich um einen Drahtring herum eine Flüssigkeitsmasse von der Form einer Linse A, Fig. 300, bilden. Bringt man die flüssige Kugel auf einen von einem Dreifufs getragenen Drahtring, berührt die Kugel von oben mit einem anderen Ring C, und hebt den letzteren in die Höhe, so nimmt das Öl die Gestalt eines geraden Cylinders an, dessen Grundflächen Kugelsegmenthauben sind. Die Radien dieser Segmenthauben sind gleich dem Durchmesser $2R$ der Cylindergrundfläche. Die letztere Beziehung folgt direkt aus Formel (15).

Fig. 300.



Für die Seitenfläche ist $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, für die konvexen Grundflächen ist $R_1 = R_2 = r$; nach Formel (15) ist $\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$ und hieraus folgt $r = 2R$.

Hebt man den oberen Ring noch höher, so schnürt sich der Cylinder in der Mitte ein und erinnert in seiner Form etwa an ein Hyperboloid. Bei einer gewissen Entfernung der Ringe voneinander erhält man eine Fläche mit ebenen Grundflächen, für welche $R_1 = R = \infty$ ist, hieraus folgt, dafs für die Seitenfläche $R_1 = - R_2$ ist.

Eine derartige Fläche heifst Katenoid. Sie kann durch Drehung einer Kettenlinie um eine gewisse Gerade erhalten werden. Hebt man den oberen Ring noch mehr, so bildet sich eine Reihe von Einschnürungen (Unduloid) und hat man einen Draht als Achse hindurchgesteckt, so kann man eine Form erhalten, die sich nur wenig von aneinander gereihten Kugeln unterscheidet; diese Form ist jedoch sehr unbeständig. Auch der gerade Cylinder ist nicht von Bestand, wenn seine Länge π mal gröfser ist als der Querdurchmesser. Er zerfällt in eine Reihe von Kugeln, zwischen denen je ein oder mehrere kleine Kügelchen auftreten, die sich aus den Flüssigkeitsfäden bilden, welche vor dem vollständigen Zerfall des Cylinders die Kugeln miteinander verbanden.

Plateau erhielt auch flüssige Polyeder, wenn er das Öl auf ein Drahtgestell brachte, das die Kanten des Polyeders hatte. Nachdem das überflüssige Öl mit einer Pipette entfernt war, wurden alle Seitenflächen gleichzeitig eben, wie es die Formel (15) verlangt.

§ 7. Lamellenzustand der Flüssigkeiten. Seifenblasen. Als in § 3 von den Versuchen die Rede war, welche die Existenz einer Oberflächenspannung darthun, war der lamellare Zustand bereits erwähnt worden, in welchem man die Flüssigkeiten an geschlossenen Drahtfiguren leicht erhalten kann. Zu diesen Versuchen ist besonders Seifenwasser mit einem Zusatz von Glycerin oder Zuckerlösung geeignet.

Ist das flüssige Häutchen geschlossen und besteht aus keinen ebenen Teilen, so mufs die Luft im Inneren desselben eine höhere Spannung haben als die Aufsenluft. In der That ist der Druck auf der konvexen Aufsenseite des Häutchens

$$P_1 = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

auf der Innenseite dagegen

$$P_2 = K - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Hieraus folgt, dafs es nach innen den Druck

$$P = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

ausübt und um diesen Betrag mufs die Spannung der Luft im Inneren des geschlossenen Häutchens diejenige der äufseren Luft übertreffen. Da diese Differenz für die verschiedenen Stellen des geschlossenen Häutchens die gleiche sein mufs, so erhält man für die Oberfläche des Häutchens folgende Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = Const. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

d. h. dieselbe Bedingung, wie für die Flüssigkeitsoberfläche im vorhergehenden Paragraphen; vergl. (15) auf S. 573.

Die Oberfläche eines ungeschlossenen Häutchens, welches von beiden Seiten dem gleichen Drucke ausgesetzt ist ($P = 0$), mufs folgender Bedingung genügen

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

d. h. sie mufs einen Teil einer Fläche bilden, die in allen Punkten die Krümmung Null hat. Solcher Flächen giebt es unzählig viele; eine solche Fläche erhält man z. B., wenn man die Flüssigkeitshaut zwischen zwei nicht parallelen geraden Drähten hervorruft. Im speziellen Falle kann das Häutchen eben sein ($R_1 = R_2 = \infty$) und nur ein solches kann an einer ebenen Drahtfigur zu stande kommen. Die einzige Rotationsfläche, welche der Bedingungsgleichung (18) Genüge leistet, ist aufser der Ebene das Katenoid (vergl. die vorhergehende Seite). Taucht man ein Drahtgestell in Seifenwasser, so bildet sich an ihm im allgemeinen ein System von flüssigen Lamellen, die sich derart verteilen, dafs die Summe ihrer Oberflächen ein Minimum wird.

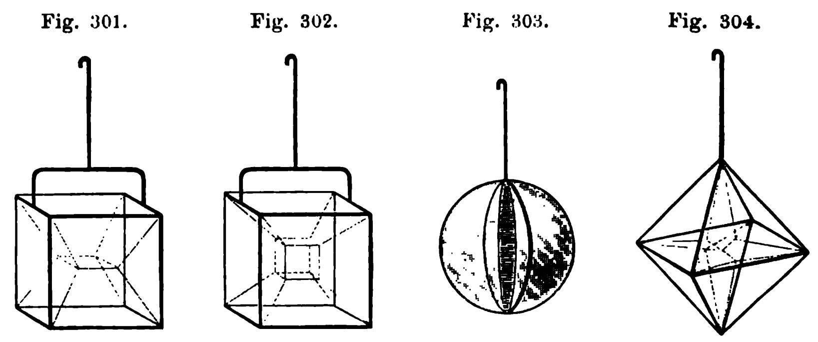
Hieraus erhält man folgende Sätze:

1. An einer flüssigen Kante treffen nie mehr als drei Lamellen zusammen; sie bilden miteinander gleiche Winkel (von 120°).

2. In einem Punkte im Inneren der Figur können nur vier Kanten zusammentreffen, die miteinander gleiche Winkel bilden.

In den Fig. 301 bis 305 sind einige dieser Gleichgewichtsfiguren wiedergegeben. Fig. 301 stellt die Figur dar, welche man mit einem

Fig. 301. Fig. 302. Fig. 303. Fig. 304.



würfelförmigen Draht erhält: 12 Häutchen gehen von den 12 Kanten aus nach innen, 8 von ihnen haben Trapezform und stützen sich auf die Kanten des 13. Häutchens, das sich in der Mitte befindet; die übrigen Lamellen haben Dreieckform und verbinden die Ecken der

mittleren Lamelle mit den gegenüberliegenden Würfelkanten. Taucht man das Gestell nochmals in die Seifenlösung, so erhält man die Gestalt von Fig. 302; im Inneren bildet sich ein Würfel mit konvexen Seitenflächen. In Fig. 303, 304 und 305 sind die Formen dargestellt, welche sich an einem Drahtgestelle aus zwei zu einander senkrechten Ringen, einem solchen von der Form eines Oktaeders oder Tetraeders bilden. Fig. 306 entsteht an einem horizontalen Drahtringe in vertikalem Rahmen.

Eine interessante Form nimmt eine ebene Lamelle beim folgenden Versuche an. Hängt man an das Holzstäbchen AB (Fig. 307) ein

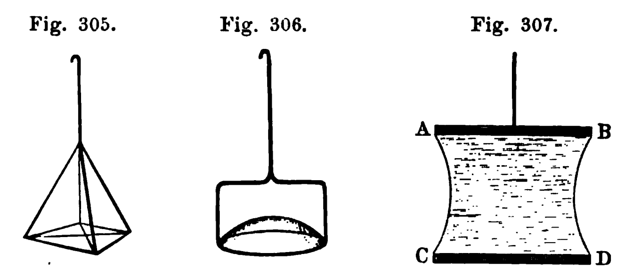


Fig. 305. Fig. 306. Fig. 307.

leichtes Stäbchen CD mittels zweier Fäden AC und CD und taucht dieses Gestell in die Seifenlösung, so überspannt es sich mit einer ebenen Lamelle, die in Folge der Oberflächenspannung das Stäbchen CD hebt, während sich die Fäden zu Kreisbögen spannen.

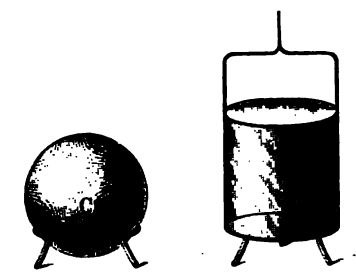
Allbekannt ist es, wie man Seifenblasen mittels eines Röhrchens herstellen kann. Formel (16) zeigt uns, dafs der Druck der Blase auf die in ihr enthaltene Luft gleich

$$P = \frac{4\,\alpha}{R} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

ist, wo R den Radius der Seifenblase bedeutet. Dieser Druck ist also indirekt proportional dem Kugelradius; mithin mufs der Druck im Inneren der kleinen Wasserbläschen, aus welchen vielleicht die Wolken bestehen, sehr grofs sein. Unterbricht man das Aufblasen einer Seifenblase, so wird sie von selbst kleiner, während die Luft aus ihr durchs Blaseröhrchen mit grofser Kraft ausgetrieben wird. Verbindet man eine solche Seifenblase mit einem Manometer, so kann man die Gröfse des Druckes P messen. Verbindet man zwei ungleich grofse Seifenblasen durch ein zweimal rechtwinklig umgebogenes Röhrchen, so wird die kleinere von ihnen noch kleiner und geht die Luft aus ihr in die gröfsere über, die sich infolgedessen noch mehr aufbläht. Einer Seifenblase kann man mit Hülfe von Drahtringen alle jene Oberflächenformen mit gleicher Krümmung geben [vergl. (17)], welche eine Flüssigkeit bei gleicher Behandlung annimmt. Legt man die Seifenblase auf den Drahtring C (Fig. 308 a. f. S.), berührt sie von oben mit einem zweiten Draht-

ringe und hebt letzteren, so bildet sich zuerst eine Figur mit konvexer Seitenfläche und konvexen Grundflächen, darauf ein Cylinder mit Kugelsegmenthauben als Grundflächen ($r = 2R$, vergl. S. 574). Hieraufentsteht ein Katenoid mit ebenen Grundflächen, für welches die Krümmung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist und endlich ein Nodoid mit stark konkaver Seitenfläche und konkaven Grundflächen. Wenn man die Häutchen, die an den Ringen haften, durchsticht, so stellt die Seitenfläche offenbar ein Katenoid dar.

Fig. 308.



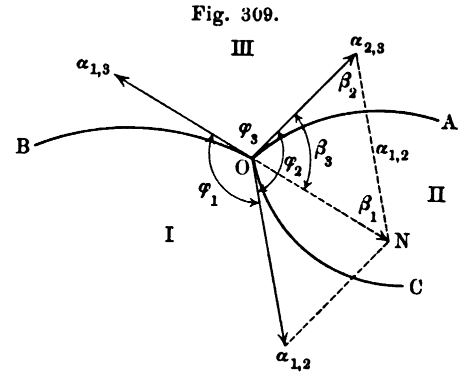
Die Dicke der flüssigen Lamellen kann sehr gering sein; sie wird durch Beobachtung der Farben dünner Blättchen bestimmt, mit denen wir uns im zweiten Bande bekannt machen werden. Plateau beobachtete Seifenblasen, deren Wanddicke 0,000113 mm = 113 $\mu\mu$ betrug. Hieraus folgt, dafs der Radius der molekularen Wirkungssphäre nicht mehr als ϱ = 0,000056 mm beträgt, denn die Wandung mufs mindestens aus zwei Häutchen bestehen, deren jedes die Dicke ϱ hat. Drude fand für die Dicke der Flüssigkeitshäutchen in einigen Fällen 17 $\mu\mu$ und ungefähr dasselbe Resultat erhielten auch Reinold und Rücker (12 $\mu\mu$); E. Johonnott fand (1899), dafs die Dicke des Häutchens sogar nur 6,2 $\mu\mu$ betragen kann.

Nicht alle Flüssigkeiten nehmen gleich leicht den lamellaren Zustand an. Nach Plateaus Untersuchungen spielt hier eine gewisse Oberflächenzähigkeit mit, die für die verschiedenen Flüssigkeiten verschieden ist. Er untersuchte dieselbe, indem er die Zeit bestimmte, innerhalb deren sich eine um 90° aus dem magnetischen Meridian abgelenkte Magnetnadel um 85° zurückdreht, wenn sie einmal vollkommen in die Flüssigkeit eintaucht, ein anderes Mal nur mit der Unterseite die Flüssigkeitsoberfläche berührt. Für Wasser sind im ersten Falle 2,37 Sek., im zweiten Falle 4,59 Sek. erforderlich, an der Wasseroberfläche geht aber dabei die Nadel um 8° über ihre Gleichgewichtslage hinaus, im Inneren des Wassers dagegen nur um 3,5°. Dieser scheinbare Widerspruch löste sich, als Plateau die Wasseroberfläche mit feinem Pulver bestäubte. Es zeigte sich sodann, dafs sich ein Teil der Oberfläche als Ganzes zugleich mit der Magnetnadel verschob. Plateau zog aus seinen Versuchen den Schlufs, dafs die Viskosität des Wassers an der Oberfläche gröfser sei als im Inneren des Wassers. Dasselbe gilt auch für Glycerin, gesättigte Sodalösung u. s. w. Bei anderen Flüssigkeiten ist die Viskosität der Oberfläche im Gegensatz zu obigem kleiner als diejenige im Inneren; hierher gehören Alkohol, Äther,

Schwefelkohlenstoff, Terpentin und Olivenöl. Saponinlösung besitzt eine besonders grofse Oberflächenzähigkeit. Neuere Untersuchungen von Oberbeck, Roiti u. a. haben die Plateauschen Versuche bestätigt. Flüssigkeiten, welche bei nicht allzu grofser Oberflächenspannung grofse Oberflächenzähigkeit besitzen, schäumen stark und lassen sich leicht in den lamellaren Zustand überführen.

§ 8. Oberflächenspannung bei Berührung mehrerer Medien. Bei Bestimmung der Kräfte, denen ein an der Oberfläche befindliches Teilchen unterworfen ist, hatten wir auf S. 533 (Fig. 277) die Voraussetzung gemacht, dafs auf ein solches Teilchen m'' nur die Moleküle der Flüssigkeit selbst einwirken, die in der halben Molekularwirkungssphäre liegen, dafs also oberhalb der Flüssigkeit keine Teilchen vorhanden seien, die auf m'' in der Richtung von unten nach oben einwirken. Diese Annahme kann so lange gelten, als sich über der Flüssigkeit ein Gas befindet, dessen Spannung nur gering ist. Befindet sich aber über derselben ein dichteres Medium, so ist die halbe Molekularwirkungssphäre oberhalb m'' eine andere; sie hat vielleicht einen anderen Radius und wirkt mit einer Kraft, welche die Richtung einer äufseren Normale zur Flüssigkeitsoberfläche hat. Hieraus folgt, dafs der Oberflächendruck P, folglich auch die Spannung α abnehmen, wenn sich über der Flüssigkeit ein anderes flüssiges oder festes Medium befindet. Die Oberflächenspannung $\alpha_{1,2}$ an der Grenze zweier Flüssigkeiten ist nicht gleich der Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ der Oberflächenspannungen jeder der Flüssigkeiten in der Luft dies ist schon aus dem Umstande klar, dafs für mischbare Flüssigkeiten $\alpha_{1\,2} = 0$ ist, während doch α_1 und α_2 auch verschieden sein können.

Fig. 309.



Wir wollen nunmehr die Bedingungen finden, denen die Spannungen in den drei Trennungsflächen dreier Medien genügen müssen, von denen eines Luft sein kann. In Fig. 309 sind die drei Medien I, II und III dargestellt, ihre Berührungsflächen sind OA, OB und OC. Diese Flächen schneiden sich in einer Kurve, deren durch O gehende Tangente senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Die Oberflächenspannungen $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ und $\alpha_{2,3}$ kann man als Kräfte betrachten, die am Punkte O (genauer gesagt an der Längeneinheit der Kurve) in der Richtung der Tangenten zu OC, OB und OA an-

greifen. Mit φ_1, φ_2 und φ_3 wollen wir die Winkel zwischen den Tangenten an diesen Oberflächen bezeichnen. Damit sich die Teilchen, welche sich längs der Trennungskurve der drei Medien befinden, im Gleichgewichte erhalten, ist es erforderlich. dafs sich die drei Kräfte $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ und $\alpha_{2,3}$ gegenseitig aufheben, d. h. dafs eine jede von ihnen der Gröfse nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Resultante der beiden anderen sei. Sei nun ON die Resultante der Kräfte $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,3}$; dann mufs $\alpha_{1,3} = -ON$ sein. Die Winkel β_1, β_2 und β_3 des Dreiecks $O\alpha_{2,3}N$ sind gleich

$$\beta_1 = \pi - \varphi_1; \quad \beta_2 = \pi - \varphi_2; \quad \beta_3 = \pi - \varphi_3 \quad . \quad (20)$$

Hieraus folgt, dafs, wenn man ein Dreieck konstruiert, dessen Seiten den Spannungen $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ und $\alpha_{2,3}$ proportional sind, seine Aufsenwinkel den Winkeln zwischen den Trennungsflächen der drei Medien gleich sind. Offenbar ist $\alpha_{1,2} : \alpha_{1,3} : \alpha_{2,3} = \sin\beta_3 : \sin\beta_2 : \sin\beta_1$, folglich ist nach Formel (20)

$$\frac{\alpha_{1,2}}{\sin\varphi_3} = \frac{\alpha_{1,3}}{\sin\varphi_2} = \frac{\alpha_{2,3}}{\sin\varphi_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Ferner ist $\alpha_{1,2}^2 = \alpha_{2,3}^2 + \alpha_{1,3}^2 - 2\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{1,3}\cos\beta_3$, also

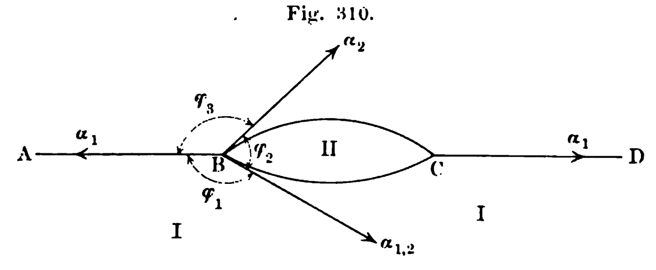
$$\cos\beta_3 = -\cos\varphi_3 = \frac{\alpha_{2,3}^2 + \alpha_{1,3}^2 - \alpha_{1,2}^2}{2\,\alpha_{2,3}\,\alpha_{1,3}} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Die wichtigste Folgerung aus dem Vorhergehenden ist, dafs jede der drei Spannungen kleiner sein mufs als die Summe der beiden anderen, also z. B.

$$\alpha_{1,3} < \alpha_{2,3} + \alpha_{1,2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Ist eines der Medien Luft, so stellt obige Ungleichheit zugleich die Bedingung dafür dar, dafs Gleichgewicht einer begrenzten Flüssig-

Fig. 310.



keitsmasse II (α_2) an der Oberfläche der anderen Flüssigkeit I (α_1) eintritt, nämlich

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_{1,2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Diese Bedingung mufs erfüllt sein, damit ein Tropfen BC der Flüssigkeit II (Fig. 310) auf der Oberfläche AD einer anderen Flüssigkeit I liegen kann. Ist der Tropfen sehr flach, also Winkel φ_2 sehr

klein, so kann man als Gleichgewichtsbedingung die Gleichung

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_{1,2} \quad \ldots \ldots \quad (24,\text{a})$$

gelten lassen.

Ist $\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha_{1,2}$, so erhält die Kraft α_1 das Übergewicht und der Tropfen zerfliefst schnell an der Oberfläche der anderen Flüssigkeit. So zerfliefst z. B. ein Öltropfen auf Wasser, ein Wassertropfen auf reinem Quecksilber. Ist jedoch die Quecksilberoberfläche nicht vollkommen rein, so nimmt der Wassertropfen auf ihr Linsenform an. Bringt man daneben einen Öltropfen, so bewegt sich der Wassertropfen zur Seite, d. h. vom Öltropfen fort. Lehmann und Stark haben eine ganze Reihe verschiedenartiger Erscheinungen untersucht, die einesteils bei Ausbreitung einer Flüssigkeit an der Oberfläche einer anderen, anderenteils durch die ungleiche Spannung an verschiedenen Stellen der Oberfläche einer und derselben Flüssigkeit auftreten.

Besonders bemerkenswert ist das Zerfliefsen von Öl auf einer Wasseroberfläche; hierbei erhält man aufserordentlich dünne Ölschichten. Die Dicke derselben ist von Sohnke, Rayleigh (für Olivenöl betrug die Schichtdicke $\delta = 1{,}6\,\mu\mu$, wo $1\,\mu\mu = 10^{-6}\,\text{cm}$ ist), Röntgen ($\delta = 0{,}6\,\mu\mu$), Oberbeck ($0{,}3\,\mu\mu$) u. a. bestimmt worden. K. T. Fischer hat die Ausbreitung von Wasser, Öl und einer Lösung von Glycerin in Wasser auf einer Quecksilberoberfläche untersucht. Er fand, dafs man hierbei Schichten erhalten kann, deren Dicke weniger als $5\,\mu\mu$ beträgt.

Aus dem Vorhergehenden leuchtet ein, dafs sich der Normaldruck, also auch die Oberflächenspannung des Wassers vermindert, wenn sich auf ihm selbst die geringsten Spuren von Öl befinden. Auf eine horizontale Seifenwasserlamelle kann man, ohne es zu verletzen, einen Wassertropfen bringen; jedoch das kleinste Tröpfchen Spiritus oder Äther zerstört das Häutchen, da sich durch dasselbe die Spannung an einer Stelle plötzlich vermindert. Ein Wasser- oder Quecksilberstrahl geht ungehindert durch eine solche Lamelle hindurch, ohne sie zu zerstören. Bespritzt man Seifenschaum mit Wasser, so erhält sich derselbe; er verschwindet aber, wenn man ihn mit Äther besprengt. Giefst man soviel Wasser in ein Gefäfs, dafs es den ebenen Boden desselben grade bedeckt und hierauf einige Tropfen Alkohol, so weicht das Wasser nach allen Seiten zurück, nimmt den Alkohol mit und der Boden des Gefäfses wird auf diese Weise freigelegt.

Ein Tropfen, der sich an der Oberfläche einer anderen Flüssigkeit befindet, mufs die Form einer Linse haben, d. h. die Kontur BC des Tropfens mufs ein Kreis sein, da die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 an allen Punkten der Kontur dieselben Werte haben müssen; nach Analogie von (22) ist

$$\cos\varphi_2 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_{1,2}^2}{2\,\alpha_1\,\alpha_{1,2}} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Die hierher gehörige Litteratur ist am Schlusse des fünften Kapitels zitiert.

Fünftes Kapitel.

Erscheinungen der Adhäsion und Kapillarität.

§ 1. Berührung von Flüssigkeiten mit festen Körpern. Die Kohäsionskräfte wirken auch zwischen den Molekülen einander berührender fester und flüssiger Körper. Daher mufs sich, wenn eine Flüssigkeit an einen festen Körper grenzt, der Oberflächendruck P, folglich auch die Oberflächenspannung α der Flüssigkeit ändern. Die um das Teilchen m'' (Fig. 277) sonst fehlende Halbkugel ist hier vorhanden, indem die Moleküle des festen Körpers dieselbe ausfüllen.

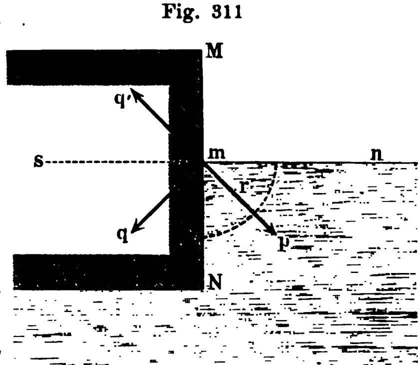
Je nach der relativen Gröfse der Kohäsion zwischen den Flüssigkeitsteilchen untereinander und mit den Teilchen des festen Körpers hat man zwei Fälle zu unterscheiden, welche dadurch gekennzeichnet sind, dafs der feste Körper von der Flüssigkeit einmal benetzt wird, das andere Mal nicht. Rein äufserlich genommen bestehen diese Erscheinungen in folgendem. Wenn der feste Körper von der Flüssigkeit benetzt wird, so haftet letztere an ihm. Ein Tropfen der Flüssigkeit zerfliefst in obigem Falle an der Oberfläche des festen Körpers; taucht man einen solchen Körper in die Flüssigkeit und hebt ihn wieder heraus, so ist er von einer dünnen Flüssigkeitsschicht überzogen, die langsam abtropft; taucht man nur einen Teil eines solchen Körpers in die Flüssigkeit, so wird die Oberfläche der letzteren konkav, d. h. sie erhebt sich ein wenig rings um den festen Körper. So wird beispielsweise reines Glas von Wasser benetzt.

Wenn eine Flüssigkeit durch einen festen Körper nicht benetzt wird, so haftet sie eben nicht an ihm. Ein Tropfen dieser Flüssigkeit zerfliefst nicht an der Oberfläche des festen Körpers, sondern nimmt eine konvexe Oberfläche an, die sich der Kugelform um so mehr nähert, je kleiner der Tropfen ist. Taucht man den Körper in die Flüssigkeit ein, so ist beim Herausheben keine Flüssigkeitsschicht an demselben vorhanden. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist dort, wo sie an einen in sie teilweise eintauchenden Körper grenzt — konvex, d. h. liegt rings um die vertikale Oberfläche des festen Körpers herum etwas niedriger. Nicht benetzt wird beispielsweise Glas durch Quecksilber, ebenso werden Körper, die mit einer dünnen Fettschicht oder einer Schicht von Paraffin bedeckt sind, vom Wasser nicht benetzt.

§ 2. Randwinkel. Die elementare Erklärung dafür, dafs

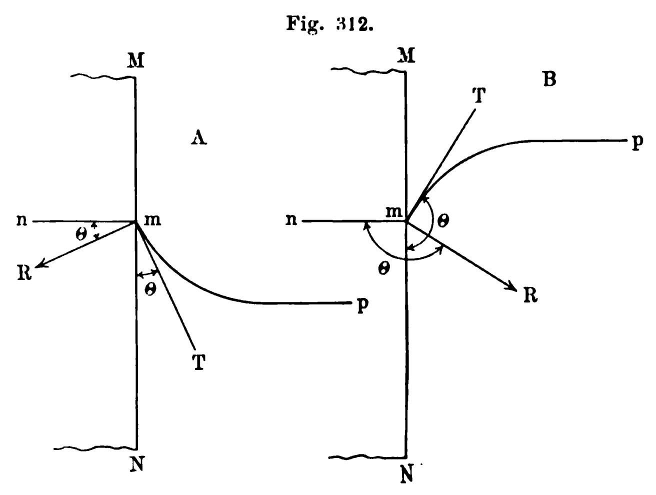
sich die Horizontalität der Flüssigkeitsoberfläche mn (Fig. 311) an der Grenze eines festen Körpers MN ändert, ist die folgende. Auf das Teilchen m wirkt einerseits die Kohäsionskraft p der benachbarten Flüssigkeitsteilchen, andererseits die Anziehungskräfte q und q' der beiden Hälften des festen Körpers MN. Die Resultante R aller Kräfte, welche auf m wirken, kann entweder nach dem Innern des festen Körpers (Fig. 312 A) oder aber ins Innere der Flüssigkeit hineingerichtet sein (Fig. 312 B).

Fig. 311



Damit sich eine Flüssigkeit im Gleichgewicht befindet ist es erforderlich, dafs die auf ihre Teilchen wirkende Kraft in jedem Punkte der Oberfläche normal zur Oberfläche sei. Hieraus folgt, dafs die Tangente mT zur Flüssigkeitsoberfläche in m einen spitzen Winkel $\Theta = \angle\, TmN$ mit der eingetauchten Oberfläche des Körpers bildet. Die Oberfläche mp selbst erscheint daher konkav und gehoben. Es ist dies der Fall, wenn die Wirkung des festen Körpers auf die

Fig. 312.



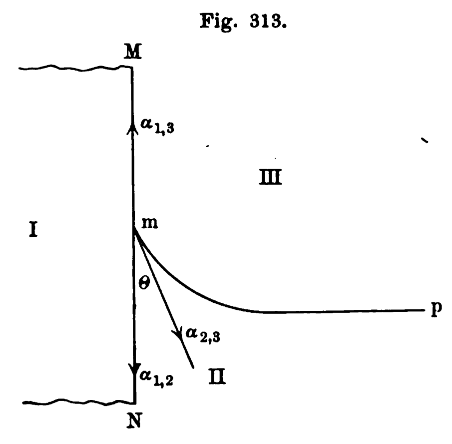
Flüssigkeit bedeutend ist, wenn also Benetzung des ersteren stattfindet. Der Winkel Θ, welcher gleich dem Winkel nmR zwischen den inneren Normalen zur Oberfläche des festen und flüssigen Körpers gleich ist, heifst der Randwinkel. Die Gröfse desselben hängt von der Lage der Kraft R ab, d. h. also ausschliefslich von der Be-

schaffenheit der Flüssigkeit und des festen Körpers. Wenn die Flüssigkeit den festen Körper benetzt, so ist der Randwinkel spitz.

Im zweiten Falle, wenn die Kohäsion der Flüssigkeitsteilchen das Übergewicht hat und die Resultante R ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist, Fig. 312 B, ist der Randwinkel Θ zwischen der Tangente mT und der eintauchenden Oberfläche des festen Körpers gleich dem Winkel nmR zwischen den inneren Normalen mn und R; der Randwinkel Q ist stumpf. In diesem Falle ist die Oberfläche mp konvex, der feste Körper wird von der Flüssigkeit nicht benetzt.

Betrachten wir nunmehr genauer die Gleichgewichtsbedingungen für die drei sich berührenden Medien (Fig. 313), von denen das eine (I) fest, das zweite (II) flüssig ist, während das dritte (III) flüssig oder gasförmig sein kann. Bezeichnen wir mit $\alpha_{1,2}$ die Spannung an der Grenze des festen Körpers I und der Flüssigkeit II, mit $\alpha_{2,3}$ die Spannung an der Grenze der Flüssigkeit II und des Gases, resp. der Flüssigkeit III und mit $\alpha_{1,3}$ die Spannung an der Grenze von I und III. Wir nehmen somit auch eine Spannung an der Oberfläche eines von einem Gase oder vom Vakuum begrenzten festen Körpers an, wobei wir indes die Frage nach der physikalischen Bedeutung oder aber der Realität einer solchen Spannung offen lassen. Das Flüssigkeitsteilchen m wird, falls der feste Körper von der Flüssigkeit benetzt wird, gewissermafsen von der Masse des festen Körpers in der Richtung mM angezogen. Man kann daher der Analogie halber auch hier die Existenz einer Spannung $\alpha_{1,3}$ gelten lassen. Quincke hat darauf hingewiesen, dafs, wenn eine Flüssigkeitsmasse Oberflächenspannung besitzt, kein Grund vorhanden ist, weshalb dieselbe beim Erstarren der Flüssigkeit verschwinden sollte. Im sechsten Abschnitte werden wir eine Erscheinung kennen lernen, welche darauf hinweist, dafs in der Oberflächenschicht fester Körper etwas der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten analoges vorhanden ist. Übrigens kann man, wenn das Medium III Luft ist, die Oberflächenspannung $\alpha_{1,3}$ auch dem an der Oberfläche mM kondensierten Wasserdampfe zuschreiben.

Fig. 313.



Die zu MN normale Komponente der Kraft $\alpha_{2,3}$ wird durch den Widerstand des festen Körpers aufgehoben, daher lautet die Gleich-

gewichtsbedingung des Teilchens m

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} \cos \Theta \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus ergiebt sich

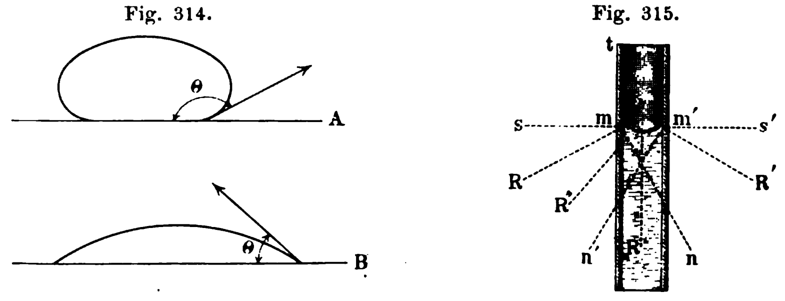
$$\cos \Theta = \frac{\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}}{\alpha_{2,3}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$, so ist der Randwinkel spitz, die Oberfläche mp konkav; ist dagegen $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$, so ist der Randwinkel stumpf und die Oberfläche mp konvex. Ist $\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} > \alpha_{2,3}$, so ist kein Randwinkel vorhanden, eine dünne Schicht der Flüssigkeit bedeckt die Oberfläche des festen Körpers und wir haben vollständige Benetzung des festen Körpers vor uns.

Bringt man einen Tropfen der Flüssigkeit auf eine horizontale Fläche eines festen Körpers, so nimmt derselbe die Gestalt der Fig. 314 A an, wenn $\alpha_{1,3} < \alpha_{1,2}$ ist, dagegen die Form B, falls $\alpha_{1,3} > \alpha_{1,2}$ ist.

Ist die Oberfläche einer Flüssigkeit von einem festen Körper allseitig umgeben, so wird sie von allen Seiten durch einen konkaven oder

Fig. 314. Fig. 315.



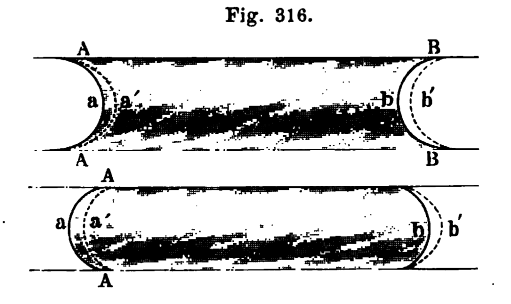
konvexen Teil umgrenzt. Sind dabei die Dimensionen der Oberfläche gering, so verschwindet der mittlere ebene Teil vollständig und man erhält einen konkaven oder konvexen Meniskus. Das letztere tritt ein, wenn sich die Flüssigkeit in einer genügend engen Röhre befindet. In Fig. 315 ist die Gestalt einer Flüssigkeitsoberfläche im Innern einer Röhre dargestellt, die von der Flüssigkeit benetzt wird; n und n' sind die Tangenten an die Flüssigkeitsoberfläche, R, R', R'', „R die Richtungen der Normalen, d. h. der Resultanten der in den verschiedenen Punkten wirkenden Kräfte.. Wird der Stoff, aus welchem die Röhre besteht, von der Flüssigkeit nicht benetzt (Glas und Quecksilber), so wird die Flüssigkeitssäule oberhalb von einem konvexen Meniskus begrenzt.

Infolge der Änderung der Gestalt der Oberfläche ändert sich auch der Oberflächendruck P, wie es die Laplacesche Formel (S. 572) verlangt. An einer konkaven Oberfläche ist der Druck geringer, an einer konvexen Fläche gröfser als der auf einer ebenen

Fläche lastende Druck K. Hierauf beruhen die zahlreichen Erscheinungen der Kapillarität, welche weiter unten betrachtet werden sollen. An dieser Stelle möge noch ein interessanter Versuch Erwähnung finden, der ebenfalls auf der Änderung des Oberflächendruckes einer Flüssigkeit infolge der Änderung ihrer Oberflächenform bei Begrenzung durch einen festen Körper beruht. Dient als Boden eines kleinen Gefäfses ein Drahtnetz mit Maschen, durch welche eine Nadel von mittlerer Gröfse hindurchgesteckt werden kann und man giefst in dasselbe Wasser hinein, so fliefst letzteres natürlich heraus, da der Metalldraht vom Wasser benetzt wird, das mithin leicht die Maschen durchdringt. Taucht man das Netz jedoch zuvor in flüssiges Paraffin und schüttelt letzteres derart ab, dafs nur die Drähte von einer dünnen Paraffinschicht bedeckt bleiben, die Maschen aber nicht, so kann man das Gefäfs, wenn man den Boden zuvor mit einem Papierblatt bedeckt hat, mit Wasser füllen. Nimmt man hierauf das Papierblatt vorsichtig heraus, so sieht man, dafs das Wasser im Gefäfse bleibt und die Maschen nicht durchdringt. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung darin, dafs das Wasser den mit Paraffin überzogenen Draht nicht benetzt und daher an jeder Masche eine nach unten konvexe Oberfläche hat. Die Vergröfserung des Oberflächendruckes reicht hin, um die Wassersäule zu tragen.

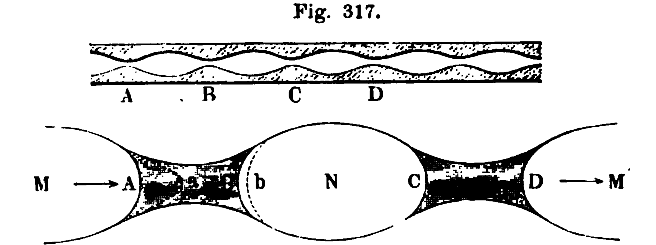
§ 3. Widerstand und Bewegung von Tropfen in Röhren. Befindet sich in einer Röhre eine Reihe von Tropfen (Säulchen) irgend einer Flüssigkeit, so ist ein sehr grofser Druck erforderlich, um dieselben im Inneren der Röhre zu verschieben, einerlei, ob sie die Röhrenwandungen benetzen oder nicht. In Fig. 316 ist oben ein Flüssigkeitstropfen ab dargestellt, welcher die Röhre AB benetzt; vergröfsert man links den Druck, so verschiebt sich die Oberfläche a nach a', b nach b'. Dabei nimmt die Konkavität ersterer zu, diejenige der letzteren ab, infolgedessen der Oberflächendruck in b' gröfser als in b wird. Daher tritt also ein von rechts nach links wirkender Druck auf, welcher der äufseren Kraft entgegenwirkt. Benetzt der Tropfen ab die Röhrenwandungen nicht (vergl. Fig. 316 unten), so giebt ein von links wirkender Druck dem Tropfen die Gestalt $a'b'$, wobei die stärkere Konvexität in b' wiederum einen von rechts nach links wirkenden Druck hervorruft.

Fig. 316.



Der Widerstand von Tropfen, welche die Gefäfswandungen benetzen, nimmt noch stärker zu, wenn sich die sie enthaltende Röhre

Fig. 317.



wechselweise verjüngt und verbreitert, wie dies in Fig. 317 dargestellt ist, wobei die untere Zeichnung eine Vergröfserung der oberen giebt. Die Tropfen AB, CD bleiben in den verjüngten Teilen der Röhre hängen (aus der weiter unten durch Fig. 319 erläuterten Ursache). Ein Druck von M aus ruft eine starke Zunahme der Konkavität (a) auf der linken und Abnahme derselben (b) auf der rechten Seite hervor; infolgedessen tritt ein starker Überdruck in b von rechts nach links auf. Eine Röhre von der Gestalt ABC (Fig. 318) kann man leicht mit Wasser bis zur Höhe MM' füllen. Will man mittels komprimierter Luft das Wasser langsam aus dem Schenkel MN derart heraustreiben, dafs in den verjüngten Stellen α, β u. s. w. Wassertropfen übrig bleiben, so ist ein grofser Druck erforderlich, um das Niveau bis nach N zu bringen. Indessen füllt Wasser sogar unter geringem Drucke leicht die Röhre NM an, indem es einen Tropfen nach dem anderen an sich heranzieht und gewissermafsen verschluckt. Man sieht hieraus, dafs durch einen Kanal mit Unebenheiten, der Luft und eine Flüssigkeit enthält, diese Flüssigkeit selbst leicht hindurchdringt, während der Kanal für Luft fast undurchdringlich ist. Ein Tropfen AB (Fig. 319) bewegt sich im Inneren einer konisch verjüngten Röhre von selbst nach dem engeren Teile hin, wenn er die Röhrenwandungen benetzt, da der geringeren Konkavität in A ein gröfserer Druck entspricht. Benetzt dagegen der Tropfen die Röhre nicht (Fig. 320), so

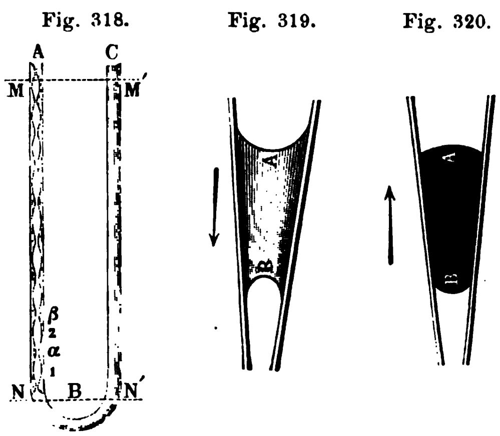
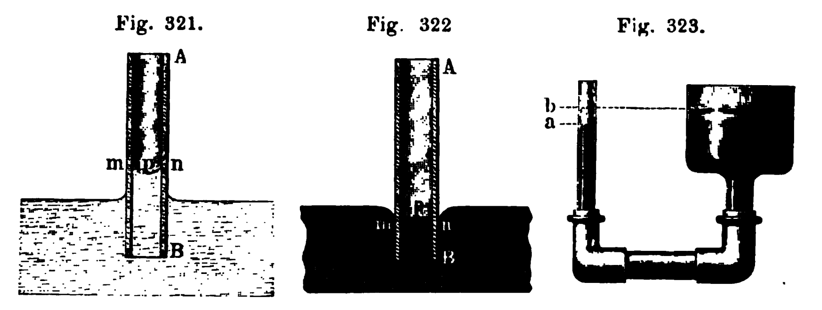


Fig. 318. Fig. 319. Fig. 320.

bewegt er sich von selbst nach dem weiteren Ende hin, denn auf der stärker konvexen Oberfläche B lastet ein gröfserer Druck.

§ 4. **Kapillarität.** Taucht man in ein weites Gefäfs mit Flüssigkeit eine enge Röhre AB (Fig. 321), die von der Flüssigkeit benetzt wird, so steigt letztere in der Röhre empor; wird dagegen die Röhre nicht benetzt, so senkt sich das Flüssigkeitsniveau im Inneren der Röhre unter dasjenige im weiten Gefäfse (Fig. 322). Um diese Niveau-

Fig. 321. Fig. 322 Fig. 323.



erniedrigung bequemer beobachten zu können, bedient man sich kommunizierender Röhren, wie etwa der in Fig. 323 abgebildeten. Die Erscheinung, welche hier zu Tage tritt, heifst Kapillarität.

Die elementare Erklärung dieser Erscheinung ist die folgende. Im weiten Gefäfse kann man die Oberfläche der Flüssigkeit als eben ansehen und den Normaldruck gleich K nach der Laplaceschen Formel (S. 572) setzen. Auf einer konkaven Flüssigkeitsoberfläche wirkt der Druck

$$P = K - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

wo R_1 und R_2 die positiven Krümmungsradien der Oberfläche sind. Somit erhält man einen Überschufs p des Aufsendruckes, welcher gleich

$$p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

ist.

Durch diesen Druck mufs sich die Flüssigkeit in der Röhre um eine solche Höhe h heben, dafs der Druck der gehobenen Flüssigkeitssäule auf die Flächeneinheit der in gleicher Höhe mit der äufseren horizontalen Oberfläche liegenden Fläche gleich p wird. Die Gröfse p hängt indes nur von der Oberflächenspannung α und den Krümmungsradien ab, welche wiederum ihrerseits vom Röhrendurchmesser an der Stelle, wo sich der Meniskus befindet, abhängen. Hieraus folgt, dafs die Höhe h einer Flüssigkeitssäule, welche sich im Inneren einer Röhre halten kann, von den Dimensionen der unterhalb des

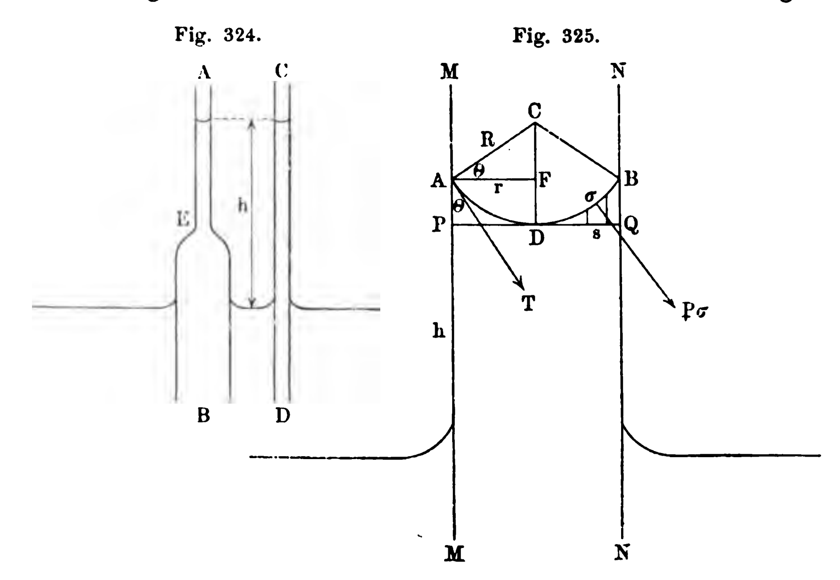
Meniskus gelegenen Teile der Röhre unabhängig ist. So steht z. B. die Flüssigkeit gleich hoch in AB und CD (Fig. 324), falls AE und CD gleichen Durchmesser haben. Allerdings steigt die Flüssigkeit in CD von selbst bis auf jene Höhe, während sie in AB zunächst durch Fortsaugen der Luft bis E gehoben werden mufs. Die gleiche Höhe h würde man auch erhalten, wenn der untere Teil von CD enger als der obere wäre.

Benetzt die Flüssigkeit die Röhrenwandungen nicht, so bildet sich ein konvexer Meniskus mit dem Oberflächendruck

$$P = K + \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

wo R_1 und R_2 wiederum positive Krümmungsradien sind. Der Drucküberschufs p, dessen Wert durch Formel (4) gegeben ist, erniedrigt das Flüssigkeitsniveau im Inneren der Röhre um einen derartigen

Fig. 324. Fig. 325.



Betrag h, dafs der hydrostatische Druck der aufserhalb der Röhre befindlichen Flüssigkeit dem Drucküberschufs p auf die konvexe Oberfläche das Gleichgewicht hält. Auch in diesem Falle hängt die Niveauerniedrigung h nur von dem Röhrendurchmesser an der Stelle ab, an welcher sich der Meniskus bildet.

§ 5. **Gesetz von Jurin.** (1718). Mit diesem Namen bezeichnet man ein bereits vor Jurin im Jahre 1670 von Borelli ausgesprochenes Gesetz: Die Höhe h, um welche eine Flüssigkeit im Inneren einer Kapillarröhre ansteigt oder sich senkt,

ist dem Durchmesser d oder dem Radius r der Röhre **indirekt proportional.**

Die Gröfse h kann auf zwei Wegen berechnet werden.

Sei $MMNN$ (Fig 325 a. v. S.) eine Röhre, deren innerer Radius gleich r ist; ADB stelle die Flüssigkeitsoberfläche dar, die man als Teil einer sphärischen Oberfläche mit dem Zentrum in C und dem Radius $R = AC$ ansehen kann. Den Randwinkel bezeichnen wir mit $\Theta = \angle PAT = \angle CAF$; wir sahen, dafs derselbe nur von der Art der Flüssigkeit und des festen Körpers abhängt, falls deren Oberflächen vollkommen rein sind. Weiter unten wird gezeigt werden, wie man, falls die Röhrenwandung von der Flüssigkeit benetzt wird $\Theta = 0$ machen kann. Setzt man in Formel (3) $R_1 = R_2 = R$, so kommt

$$P = K - \frac{2\alpha}{R} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Auf jedes Element σ der Oberfläche ADB wirkt ein Normaldruck $P\sigma$, dessen vertikale Komponente offenbar gleich Ps ist, wenn s die Projektion des Elementes σ auf eine Horizontalebene bedeutet. Der gesamte vertikale Druck auf die Einheit der horizontalen Ebene PQ ist gleich $P = K - \frac{2\alpha}{R}$. Auf der äufseren horizontalen Oberfläche ist der Druck auf die Oberflächeneinheit gleich K, folglich mufs der Druck der Flüssigkeitssäule auf die Flächeneinheit ihrer horizontalen Basis gleich $\frac{2\alpha}{R}$ sein. Der Druck der Säule ist gleich $h\delta$, wenn δ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet; folglich ist $\frac{2\alpha}{R} = h\delta$. Es ist aber $R = \frac{r}{\cos\Theta}$, mithin

$$\frac{2\alpha\cos\Theta}{r} = h\delta \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

woraus sich

$$h = \frac{2\alpha}{\delta}\cdot\frac{\cos\Theta}{r} = \frac{4\alpha}{\delta}\cdot\frac{\cos\Theta}{d} \quad \dots \dots \quad (7)$$

ergiebt, wo $d = 2r$ der Röhrendurchmesser ist. Wir wollen hierfür noch eine andere Ableitung geben. Auf die Längeneinheit der Kontur des Meniskus wirkt die Spannung α in der Richtung der Tangenten an die Flüssigkeitsoberfläche; die gesamte Spannung beträgt alsdann $2\pi\alpha r$ und die vertikale Komponente derselben $2\pi\alpha r\cos\Theta$. Stellen wir uns vor, diese Spannung trage eine Flüssigkeitssäule von der Höhe h, dem Querschnitt πr^2 und der Dichte δ; dann ist

$$2\pi\alpha r\cos\Theta = \pi r^2 h\delta \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

woraus sich wiederum Formel (7) ergiebt. Dieselbe Formel gilt auch für die Depression einer Flüssigkeit, welche die Röhrenwandungen

unbenetzt läfst und ist es leicht, beide Herleitungen für diesen Fall vorzunehmen.

Tritt vollständige Benetzung ein, so ist $\Theta = 0$, mithin

$$h = \frac{2\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\alpha}{\delta} \cdot \frac{1}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

Die Formel (7) bestätigt das Jurinsche Gesetz.

§ 6. Benennungen und Bezeichnungsweise der Konstanten. Leider haben sich bis jetzt weder allgemein übliche Bezeichnungen, noch auch, was besonders unbequem ist, allgemein übliche Benennungen jener Gröfsen eingebürgert, mit denen man es in der Lehre von den Kapillaritäts- und verwandten Erscheinungen zu thun hat. Die Hauptrolle spielen hier namentlich zwei Gröfsen.

I. Die erste unserer beiden Gröfsen ist die Gröfse α in der Laplaceschen Formel (12) auf S. 572; Laplace selbst schreibt sie in der Form $H:2$. Es ist dies die Gröfse der Spannung, welche auf die Längeneinheit einer auf der Oberfläche vorhanden gedachten Linie wirkt. Man pflegt sie in Milligrammen pro Millimeter der Länge auszudrücken. Nicht selten bezeichnet man α als eine der beiden sogenannten „Kapillaritätskonstanten“. Zur Vermeidung etwaiger Mifsverständnisse wollen wir indes die Gröfse α nur als Oberflächenspannung bezeichnen.

Somit setzen wir also

$$\left(\frac{H}{2}\right)_{\text{Laplace}} = \alpha = \text{„Oberflächenspannung“} \quad . \quad . \qquad (10)$$

Die Dimension von α ist nach (6) auf S. 564 gleich

$$[\alpha] = \left[\frac{\text{mgr}}{\text{mm}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L = \frac{M}{T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

Die C. G. S.-Einheit der Spannung ist

$$1 \, \frac{\text{Dyne}}{\text{Centimeter}} = \frac{1{,}02 \text{ mgr}}{10 \text{ mm}} = 0{,}102 \, \frac{\text{mgr}}{\text{mm}},$$

also wird der Zahlenwert der Gröfse α in C. G. S.-Einheiten durch Multiplikation der gewöhnlich angegebenen Zahlenwerte $\left(\text{in } \frac{\text{mgr}}{\text{mm}} \text{ Einheiten}\right)$ mit 9,81 erhalten.

II. Die zweite unserer Gröfsen, welche man mit a^2 zu bezeichnen pflegt, ist gleich

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

wo δ die Dichte der Flüssigkeit ist, also die Anzahl der Gramme, die ein Kubikcentimeter oder der Milligramme, die ein Kubikmillimeter der

Flüssigkeit wiegt. Die Dimension der Gröfse δ ist gleich

$$[\delta] = \left[\frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}}\right] = \frac{ML}{T^2} : L^3 = \frac{M}{T^2 L^2} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Hieraus ergiebt sich die Dimension der Gröfse a^2, nämlich:

$$[a^2] = [\alpha] : [\delta] = \frac{M}{T^2} : \frac{M}{T^2 L^2} = L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Gröfse a^2 ist also von der Dimension L^2; man pflegt sie in Quadratmillimetern auszudrücken, nennt sie gewöhnlich die specifische Kohäsion und betrachtet sie als zweite Kapillaritätskonstante.

Wir wollen indes nur die Gröfse a^2 als Kapillaritätskonstante bezeichnen.

Es sei hier noch bemerkt, dafs Gaufs die Gröfse $\frac{1}{2}\, a^2 = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{H}{2\,\delta}$ mit α^2 bezeichnet.

Die Formeln (9) und (12) geben

$$a^2 = h\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

oder, wenn man annimmt, dafs für $r = 1$ der Wert $h = h_1$ erhalten wird

$$a^2 = h_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Kapillaritätskonstante einer gegebenen Flüssigkeit ist numerisch gleich der Steighöhe dieser Flüssigkeit in einer Röhre, deren innerer Durchmesser gleich 1 mm ist und deren Wandungen von der Flüssigkeit vollkommen benetzt werden [$\Theta = 0$ in Formel (7)]. Nach Formel (15) mufs das Produkt aus dem Röhrendurchmesser $2\,r$ in die Steighöhe h für eine gegebene Flüssigkeit konstant sein. Dies wird durch die Versuche von Gay-Lussac, wie aus folgenden Zahlen ersichtlich, vollkommen bestätigt.

Flüssigkeit	Röhrendurchmesser $2\,r$	Steighöhe h	$2\,r\,h$
Wasser	1,274 mm	23,739 mm	30,262
	1,903 „	15,903 „	30,263
Spiritus von der Dichte $\delta = 0{,}8196$	1,294 „	9,398 „	12,164
	1,903 „	6,389 „	12,158

§ 7. **Kapillaritätserscheinungen in nichtcylindrischem Raume.** I. Parallele Platten. Taucht man in eine Flüssigkeit zwei parallele Platten ein, deren Abstand d ist, so steigt oder senkt sich die Flüssigkeit um den Betrag h, den man leicht bestimmen kann. Die Flüssigkeit ist an ihrer Oberfläche von einer Cylinderfläche begrenzt, deren Axe den Platten parallel ist. Es mögen etzt MM und NN

(Fig. 325) zwei Platten sein, deren gegenseitiger Abstand $PQ = d$ ist. Der Druck P auf die Einheit der Oberfläche ADB ist, wie immer, gleich $K - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$; für den Cylinder ist jedoch $R_1 = \infty$, $R_2 = R = AC$, also $P = K - \frac{\alpha}{R}$. Analog dem früheren sehen wir, dafs der Druck $h\delta$ der gehobenen Flüssigkeitsschicht hier gleich dem Überschusse des Druckes K auf die ebene Aufsenfläche über den Druck P ist, also

$$h\delta = \frac{\alpha}{R} = \frac{\alpha \cos \Theta}{r} = \frac{2\alpha \cos \Theta}{d};$$

hieraus folgt

$$h = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\delta d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

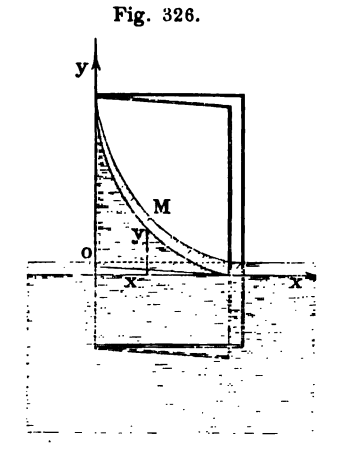
Vergleicht man diese Formel mit (7), so sieht man, dafs die Steighöhe einer Flüssigkeit zwischen parallelen Platten gleich der Hälfte ihrer Steighöhe in einer Röhre ist, deren Durchmesser dem Plattenabstande gleichkommt. Werden die Platten vollkommen benetzt, so ist [vergl. (12)]

$$h = \frac{2\alpha}{\delta d} = \frac{a^2}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Die Steighöhe einer Flüssigkeit zwischen parallelen Platten ist dem Plattenabstande umgekehrt proportional.

II. Nicht parallele Platten. Senkt man in eine Flüssigkeit zwei Platten, welche miteinander den Flächenwinkel φ bilden (Fig. 326), so steigt die Flüssigkeit zwischen ihnen um so höher, je kleiner der Plattenabstand d ist, d. h. je näher sie der Kante des Flächenwinkels ist. Die Flüssigkeitsoberfläche ist von einer gewissen Kurve begrenzt, deren Gleichung sich leicht finden läfst. Wir wählen die Kante des Flächenwinkels als y-Achse, den Anfangspunkt O der Koordinaten an der Flüssigkeitsoberfläche und die x-Achse in der Richtung der Winkelhalbierenden des horizontalen Winkels φ. Der Punkt M hat dann die Koordinaten x und y; die Steighöhe y wird durch Formel (17) bestimmt, in welcher d den Plattenabstand an der Stelle bedeutet, welche von der Kante Oy um die Strecke x entfernt ist. Führt man durch M eine horizontale Ebene, so erhält man im Durchschnitt ein gleich-

Fig. 326.



schenkeliges Dreieck mit der Spitze auf der Kante Oy, der Grundlinie d, der Höhe x und dem Winkel φ an der Spitze. Offenbar ist $d = 2\,x\,tg\,\frac{\varphi}{2}$; setzt man diesen Ausdruck in (17) ein, und schreibt y anstatt h, so ist

$$y = \frac{\alpha \cos \Theta}{\delta\, x\, tg\, \frac{\varphi}{2}}$$

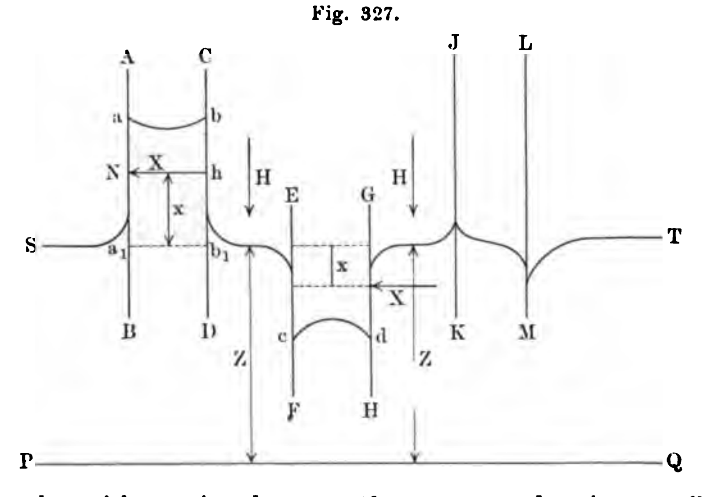
mithin

$$x y = \frac{\alpha \cos \Theta}{\delta\, tg\, \frac{\varphi}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (19)$$

Auf der rechten Seite kommen nur Konstante vor, mithin hat die gesuchte Gleichung die Form $xy = Const.$ Es ist dies die Gleichung einer Hyperbel. Wenn die Flüssigkeit die Platten vollständig benetzt, so ist in (19) $\cos \Theta = 1$ zu setzen.

§ 8. Scheinbare Anziehung und Abstofsung teilweise in Flüssigkeit tauchender Körper. Zwei schwimmende oder an Fäden hängende und teilweise in eine Flüssigkeit eintauchende Körper suchen sich zu nähern, wenn beide benetzt oder beide nicht benetzt werden;

Fig. 327.



sie suchen sich voneinander zu entfernen, wenn der eine von ihnen benetzt wird, der andere nicht. Diese Erscheinung erklärt sich leicht durch den hydrostatischen Druck. Sei ST (Fig. 327) die Flüssigkeitsoberfläche; AB und CD seien zwei von der Flüssigkeit vollkommen benetzte Platten, zwischen welchen die Flüssigkeit um die Höhe h bis nach ab gestiegen sei; der Luftdruck betrage H. Der Druck unter-

halb der ebenen Oberfläche ist dann gleich $H + K$, unter der konkaven Oberfläche ab dagegen gleich $H + K - \frac{\alpha}{R}$ (vergl. § 7). Zieht man nun die horizontale Ebene PQ unterhalb der Platten im Abstande z von der Oberfläche, so ist der Druck p auf die Einheit dieser Oberfläche überall der gleiche. Unterhalb der horizontalen Oberfläche ist dieser Druck gleich $H + K + \delta z$, wenn δ die Dichte der Flüssigkeit ist, unter ab dagegen gleich $H + K - \frac{\alpha}{R} + (z + h)\delta$. Mithin ist

$$p = H + K + \delta z = H + K - \frac{\alpha}{R} + (z + h)\delta,$$

woraus sich wie früher $\delta h = \frac{\alpha}{R}$ ergiebt. Bestimmen wir nun noch den Druck X auf die Platte AB im Punkte N, in der Höhe x über dem Flüssigkeitsspiegel ST. Der Druck p_x im Innern der Flüssigkeit ist an dieser Stelle gleich $p_x = p - (x + z)\delta = H + K - x\delta$, der gesuchte Druck dagegen ist $X = p_x - K$, da sich der Druck K auf die Platte nicht überträgt. Danach ist also

$$X = H - x\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Dieser Druck ist geringer als der Aufsendruck H, daher sucht sich die Platte AB nach rechts zu bewegen; ebenso sucht sich die Platte CD nach links zu bewegen und die Platten ziehen daher einander scheinbar an. Ist l die Breite der Platte, so ist die ganze auf sie einwirkende Kraft F gleich

$$F = l\delta \int_0^h x\,dx = \frac{l\delta}{2} h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Werden die Platten EF und GH nicht benetzt, so wird offenbar in der Höhe x über der Oberfläche ST der Aufsendruck $X = H + \delta x$. Der Überschufs über den inneren Druck H ist auch hier gleich δx.

Wird endlich JK benetzt, LM dagegen nicht, so steigt die Flüssigkeit an der Aufsenseite von JK höher und senkt sich an der Aufsenseite von LM tiefer als an den Innenseiten. In diesem Falle befindet sich die Platte JK gewissermafsen in derselben Lage wie CD, sie bewegt sich nach links, während sich LM in der Lage wie EF befindet und nach rechts bewegt. Es tritt daher eine scheinbare Abstofsung von JK und LM auf.

Hierdurch erklärt es sich auch, weshalb Körper, die auf einer Flüssigkeit schwimmen und von ihr benetzt werden, sich an einer Stelle anhäufen, wie z. B. Schaumblasen, Blätter auf Teichen u. s. w.

§ 9. Aufsaugung von Flüssigkeiten durch poröse und durch pulverförmige Körper. Auf Kapillarität beruht eine sehr grofse Zahl verschiedenartiger Erscheinungen. Schwamm, Zucker, Löschpapier, Sand, Kreide, Holz, die Steine der Lithographen u. s. w. saugen mit bedeutender Kraft Flüssigkeiten auf. In Fig. 328 ist ein Apparat von Jamin dargestellt, der folgende Einrichtung hat. In das mit Wasser gefüllte Gefäfs *MM* ist ein Stück Kreide *AA* gebracht, in welchem sich eine cylindrische Vertiefung befindet. Das heberartig

Fig. 328.

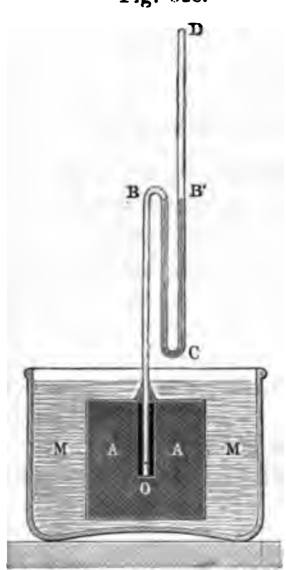
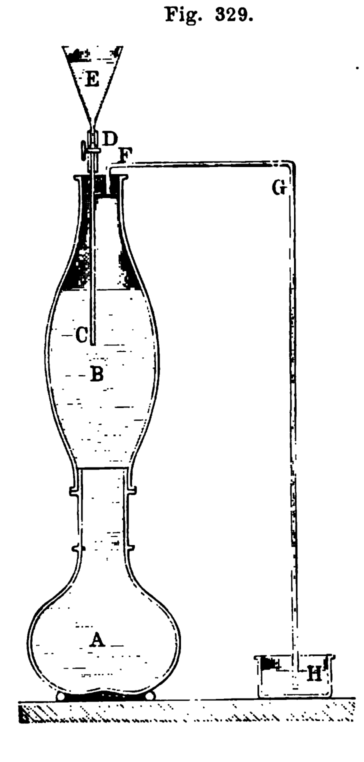


Fig. 329.



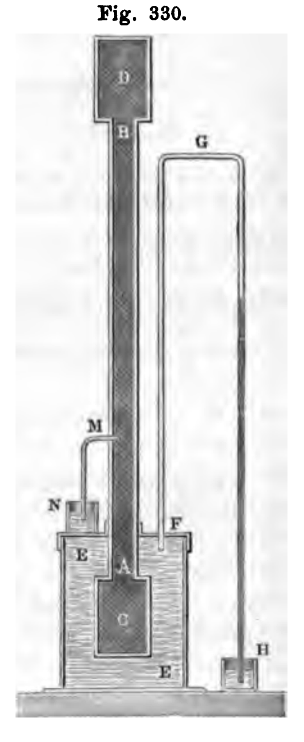
gebogene Glasrohr *OBCB'D* enthält in *BCD* Quecksilber oder gefärbtes Wasser und dient als Manometer; es ist mit seinem unteren Ende in die genannte Vertiefung versenkt und oben mit Siegellack am Kreidestück befestigt. Wird nun Wasser von der Kreide angesaugt, so treibt es die in ihren Poren befindliche Luft in den kleinen Hohlraum *O* und in die Röhre hinein. Ist das Ende *D* zugeschmolzen, so kann man eine Kompression der Luft bis zu 3 Atm. und darüber hinaus beobachten. In Fig. 329 ist ein anderer Apparat von Jamin abgebildet. Die unglasierten Thongefäfse *A* und *B* werden mittels des Trichters *E* mit ausgekochtem Wasser gefüllt; die Röhre *FGH* reicht in eine Schale mit Quecksilber hinein. Während nun das Wasser ununterbrochen durch die Gefäfswandungen hindurchsickert und an der Aufsenseite derselben verdunstet, entsteht

oberhalb des Wassers ein luftverdünnter Raum und das Quecksilber steigt in der Röhre HG bis zu 600 mm und darüber empor.

Die Kapillaritätserscheinungen spielen im Leben der Pflanzen eine hervorragende Rolle.

In Fig. 330 ist ein ebenfalls von Jamin konstruierter interessanter Apparat dargestellt, welcher sowohl jene Rolle als auch die des Verdunstens von Wasser an der Oberfläche der Blätter illustriert. D und C sind poröse, mit Gips gefüllte Gefäſse, AB eine Säule aus Gips, umschlossen von einer Blechröhre. Die Oberfläche des Gefäſses D entspricht der Blattoberfläche, an ihr verdunstet das aus dem hermetisch verschlossenen Gefäſse E aufsteigende Wasser. Die Röhre FGH reicht mit ihrem unteren Ende in Quecksilber, die Röhre MN in Wasser hinein. Man kann sich nun überzeugen, wie das Verdunsten in D ein sehr bedeutendes Steigen des Quecksilbers in der Röhre HG und ein recht schnelles Ansaugen des Wassers aus N durch die Röhre NM bewirkt.

Fig. 330.



Jungk fand (1865), daſs beim Anfeuchten fein gepulverter Körper eine Wärmeentwickelung stattfindet. Diese Erscheinung wurde von Langergren experimentell und theoretisch untersucht und durch eine Kompression des in das Pulver eindringenden Wassers bis zu einem Druck von mehr als 6000 Atm. erklärt.

§ 10. Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung α und der Kapillaritätskonstanten $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$ (wo δ die Dichte der Flüssigkeit ist).

I. Methode der Kapillarröhren (Bestimmung von a^2). Wir hatten in Früherem auf S. 590 die Formel (8) abgeleitet, aus welcher hervorging, daſs die Spannung $2\pi\alpha r \cos\Theta$ das Gewicht der Flüssigkeitssäule $\pi r^2 h \delta$ trägt. Nimmt man an, h sei die Höhe der Flüssigkeitssäule bis zum tiefsten Punkte des Meniskus, so muſs man noch das Gewicht des Meniskus selbst hinzufügen. Benetzt die Flüssigkeit die Gefäſswandungen vollständig, so ist $\Theta = 0$ und das Volumen des Meniskus, welches von einer Halbkugelfläche begrenzt ist, ist gleich

dem Volumen eines Cylinders mit Höhe und Grundflächenradius r, vermindert um das Volumen einer Halbkugel, also gleich $\pi r^2 r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$. Daher mufs man (für $\Theta = 0$) den Ausdruck (8) in folgender Form schreiben

$$2\pi r\alpha = \pi r^2 h\delta + \frac{1}{3}\pi r^3\delta + \pi r^2\delta\left(h + \frac{1}{3}r\right) \quad . \quad (22)$$

Hieraus ergiebt sich

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} = r\left(h + \frac{1}{3}r\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Für weniger enge Röhren gab Poisson als zweiten Faktor den Ausdruck $h + \frac{1}{3}r - \frac{r^3}{3a^2}(lg\ 4 - 1)$ oder $h + \frac{1}{3}r - 0{,}1288\ \frac{r^2}{h}$. Hagen und Desains führten anstatt $h + \frac{1}{3}r$ in Formel (23) den Faktor $h + b$ ein, wo b den folgenden Wert hat

$$b = \frac{3a^2 r}{3a^2 + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Mifst man r und h und bringt nach einer der gegebenen Formeln die Korrektion an, so kann man die Kapillaritätskonstante a^2 finden und kennt man ferner die Dichte δ — auch die Spannung α erhalten. Die Gröfsen r und h müssen in Millimetern ausgedrückt sein. Um Formel (23) anwenden zu können, hat man die Beobachtung derart anzustellen, dafs der Randwinkel $\Theta = 0$ wird. Dies wird dadurch erreicht, dafs man die innere Röhrenwandung zunächst mit einer Schicht der zu untersuchenden Flüssigkeit bedeckt, indem man sie bis über die Höhe h hinaus ansaugt und sie sich dann selbst überläfst; sie senkt sich dann bis zur Höhe h hinab, es tritt vollständige Benetzung ein und der Randwinkel verschwindet.

Nach obiger Methode sind Bestimmungen vorgenommen worden von Gay-Lussac, Desains, Simon de Metz, Quet, Mendelejew, De Heen, Quincke, Volkmann, Frankenheim u. a. N. Piltschikow hat obige Methode in der Weise abgeändert, dafs er den Höhenunterschied in Röhren von verschiedenem Durchmesser beobachtete. Den Einflufs des Stoffes, aus welchem die Röhren bestehen und ihres Radius r auf die Versuchsergebnisse haben Quincke (1897) und Volkmann (1898) untersucht; letzterer findet, dafs diese Gröfsen keinen Einflufs ausüben.

Es möge hier eine Zusammenstellung der Werte von a^2 und α für einige Stoffe folgen:

Stoff	$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$	$\alpha = \frac{\delta a^2}{2}$
Quecksilber	7,0 qmm	47,0 mg/mm
Wasser (0°)	15,40 „	7,70 „
Alkohol (0°)	6,06 „	2,58 „
Äther (0°)	5,43 „	1,97 „
Benzol (15°)	6,82 „	2,88 „
Chloroform (12,5°) . .	3,80 „	2,81 „
Terpentin	— „	3,03 „
Schwefelkohlenstoff . .	— „	3,27 „
Olivenöl	7,16 „	3,27 „

So beträgt z. B. die Spannung des Wassers 7,70 mg pro Millimeter der Länge. Die von den verschiedenen Beobachtern gefundenen Zahlen differieren untereinander im allgemeinen recht bedeutend. Von grofser Bedeutung ist die Reinheit der Flüssigkeitsoberfläche; die Spannung α des Wassers steigt fast auf das Doppelte, wenn man seine Oberfläche künstlich reinigt. Verschaffelt hat nach dieser Methode die kapillaren Eigenschaften von flüssigem CO_2 und N_2O untersucht.

Eine Abänderung der Methode der Kapillarröhren stellt die Methode von Jäger (1891) dar, die sich übrigens nur wenig von derjenigen von Simon de Metz (1831) unterscheidet. Zwei Röhren von verschiedener Weite sind mit ihren Enden in einer Flüssigkeit bis zu verschiedenen Tiefen versenkt, ihre oberen Enden sind miteinander und mit einem Raume verbunden, in welchem sich schwach verdichtete Luft befindet. Hierauf stellt man die Röhren derart ein, dafs die Luftbläschen gleichzeitig aus den unteren Röhrenenden entweichen; zu diesem Zwecke mufs die weitere Röhre bis zu einer etwas gröfseren Tiefe reichen als die engere.

Jäger giebt die Formel

$$\alpha = c\,\frac{h\delta}{1 + \beta\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24,a)$$

an, wo h der Vertikalabstand der unteren Röhrenenden, δ die Dichte der Flüssigkeit und β und c Konstanten sind, von denen β für jede Röhre ein- für allemal bestimmt ist. Formel (24,a) liefert nur relative Werte der Gröfse α. A. Brjuchanow hat die Jägersche Methode derart abgeändert, dafs man nach ihr die absoluten Werte von α finden kann.

II. Methode der parallelen Platten (zur Bestimmung von a^2). Wir hatten Formel (17) auf S. 593 unter der Voraussetzung abgeleitet, dafs h die Höhe der Flüssigkeitsschicht zwischen den um d voneinander abstehenden Platten sei. Wir erhalten hier die Korrektion für

h, wenn wir zum Gewichte $dh\delta$ der Flüssigkeitssäule mit der Einheit der Breite noch das Gewicht des cylindrischen Meniskus hinzufügen; letzteres ist gleich dem Gewichte $d \cdot \frac{1}{2} d\delta$ des Prismas, vermindert um das Gewicht $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \delta$ des Halbcylinders. Das Gewicht der gehobenen Masse ist folglich gleich $d\delta\left(h + \frac{1}{2} d - \frac{\pi}{8} d\right)$. Offenbar ergiebt Formel (18) den Wert $\left(\text{es ist } \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = 0{,}107\right)$

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\delta} = d(h + 0{,}107\,d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Nach dieser Formel ist die Gröfse a^2 von vielen Physikern bestimmt worden.

III. Methode von Wilhelmy (zur Bestimmung von α). Läfst man eine vertikale Platte teilweise in eine Flüssigkeit eintauchen, so hebt sich an derselben entlang eine gewisse Flüssigkeitsmenge. Das Gewicht derselben, welches auf die Längeneinheit der Umgrenzung kommt, ist gleich $\alpha \cos \Theta$, d. h. gleich der vertikalen Komponente der Spannung. Bezeichnet man mit l die Breite, mit d die Dicke der Platte, so ist $2(l + d)\alpha \cos \Theta$ das Gewicht der gehobenen Flüssigkeitsmenge, so dafs der scheinbare Gewichtsverlust der Platte

$$p = l d h \delta - 2(l + d)\alpha \cos \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

beträgt, wo h die Tiefe bedeutet, bis zu welcher die Platte eingetaucht ist.

Richtet man es derart ein, dafs $\Theta = 0$ wird, so kann obige Formel zur Bestimmung der Gröfse α dienen.

Wilhelmy glaubte, dafs aus seinen Versuchen ein besonderer Verdichtungs-Koefficient der Flüssigkeit an der Oberfläche des festen Körpers gefunden werden könne; doch haben spätere Versuche von Röntgen und Schleiermacher die Existenz einer derartigen Verdichtung nicht bestätigt.

IV. Methode der abreifsenden Platte (zur Bestimmung von α und a^2). Eine horizontale Platte, deren Oberfläche gleich S, deren Umfang gleich s ist, wird zur Berührung mit der Flüssigkeitsoberfläche gebracht, während sie an einem Ende eines Wagebalkens hängt. Man bestimmt nun dasjenige Gewicht P, welches dazu erforderlich ist, um die Platte von der Flüssigkeitsoberfläche loszureifsen. Vergröfsert man die Belastung der Wage ganz allmählich, so sieht man, wie sich die Flüssigkeit zugleich mit der Platte bis zu einer gewissen Höhe z hebt, die für den Moment des Losreifsens, d. h. für den Augenblick, wo sie ihren gröfsten Wert erreicht, mit h bezeichnet werden möge.

Es sei Θ der Winkel zwischen der Tangentialebene an die Flüssigkeitsoberfläche dort, wo sie den Plattenrand berührt und einer vertikalen durch den Plattenrand gehenden Ebene (oder einer vertikalen Tangente an denselben); das Gewicht der gehobenen Flüssigkeitsmenge ist gleich $Sz\delta$, die vertikale Komponente der Spannung ist gleich $s\alpha \cos\Theta$ und die Belastung p ist daher gleich

$$p = Sz\delta + s\alpha \cos\Theta \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Im Moment des Losreifsens ist $\Theta = 0$, $p = P$ und $z = h$, so dafs $P = S\delta h + s\alpha$ ist.

Nach der Theorie von Laplace, s. u. (33), ist die Höhe

$$h = a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}},$$

folglich ist

$$P = S\sqrt{2\alpha\delta} + s\alpha = S\delta a + \frac{s\delta a^2}{2} \quad \ldots \quad (28)$$

Hat man P bestimmt, so kann man a^2 oder α durch Rechnung finden.

V. Methode der Tropfenwägung (zur Bestimmung von α). Wenn eine Flüssigkeit aus einer engen vertikalen Röhre langsam herausfliefst, so bilden sich Tropfen, die, nachdem sie ein gewisses Gewicht p erlangt haben, herabfallen. Vor dem Niederfallen nehmen die Tropfen die in Fig. 331 dargestellte Form an; dieselbe wird durch die Spannung längs dem Umfange des etwas kontrahierten Teiles aufrecht erhalten. Bezeichnet man den Radius des horizontalen Querschnittes an der Kontraktionsstelle mit r, so ist

Fig. 331.

$$p = 2\pi r\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Bestimmt man nun p und r, so findet man auch α; p wird durch Wägung einer bestimmten Anzahl von Tropfen gefunden. Schwieriger ist die Bestimmung des Radius r, welcher etwas kleiner als der innere Radius der Röhre ist. Man kann die Tropfen auch erhalten, indem man die Flüssigkeit an einem Stäbchen herabrinnen läfst. Guye und Perrot haben diese Methode kritisch untersucht (1901).

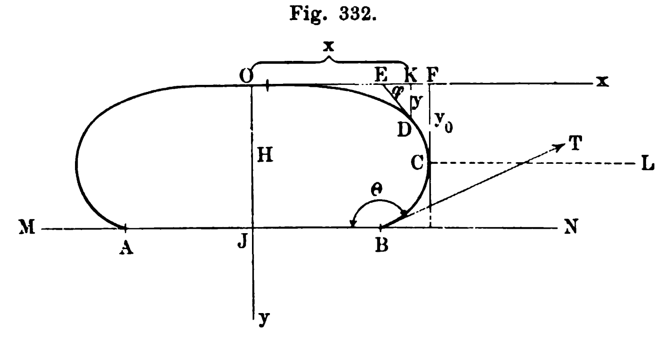
Duclaux hat ein Alkobolometer in der Gestalt einer Pipette konstruiert, dessen inneres Volumen gleich 5 ccm war und aus dessen unterer Öffnung die Flüssigkeit abtropfte. Die Zahl der Tropfen, die man bei Entleerung der Pipette erhielt, gab nach einer zugehörigen Tabelle den Prozentgehalt des reinen Alkohols an; so gab z. B. reines Wasser 100 Tropfen, 10 prozentiger Spiritus 145 Tropfen, 90 prozentiger Spiritus 259 Tropfen. Quincke hat die Methode der Tropfenwägung zur Bestimmung der Oberflächenspannung α von geschmolzenen Metallen und anderen Körpern verwandt, indem er die Enden von Stäbchen

oder Drähten glühend machte und das Gewicht der sich bildenden und niederfallenden Tropfen bestimmte. So fand er z. B. für Ag den Wert $\alpha = 42{,}75$. Bei Bestimmung von $a^2 = \frac{2\alpha}{\delta}$ (wo δ die Dichte des flüssigen Körpers bedeutet) fand er, daſs die Körper in Gruppen zerfallen, in denen a^2 ein bestimmtes Vielfaches von 4,3 ist:

a^2 ist nahezu gleich 4,3 für Se, Br, S, P, NaBr, KBr, AgBr, KJ.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 2 = 86$ für Hg, Pb, Ag, Bi, Sb, $NaNO_3$, KNO_3, NaCl, AgCl, $CaCl_2$, Wachs, Paraffin, Zucker u. a.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 3 = 12{,}9$ „ Au.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 4 = 17{,}2$ „ Pt, Cd, Sn, Na_2CO_3, K_2CO_3, K_2SO_4, H_2O, Glas u. a.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 6 = 25{,}8$ „ Pd, Zn, Fe.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 12 = 51{,}6$ „ Na.
a^2 „ „ „ $4{,}3 \times 20 = 86$ „ K.

VI. Methode der Gröſsenbestimmung von Tropfen und Bläschen. Auf einer horizontalen Fläche MN (Fig. 332) befinde sich

Fig. 332.



ein Tropfen AOB von solcher Grösse, daſs man unweit seines konvexen Randes die Krümmung seiner horizontalen Querschnitte vernachlässigen kann. Wählen wir zum Anfangspunkte der Koordinaten den höchsten Punkt O des Tropfens, die x-Achse verlaufe horizontal, die y-Achse vertikal; ein beliebiger Punkt D auf dem Meridiane des Tropfens hat dann die Koordinaten x und y. Der Druck im Punkte O ist gleich $K + H$, wo H den Aussendruck, K den Normaldruck nach der Laplaceschen Formel bedeutet. Ist δ die Dichte der Flüssigkeit, so beträgt der im Inneren des Tropfens auf den Punkt D übertragene Druck $K + H + y\delta$; derselbe muſs dem in D herrschenden Drucke das Gleichgewicht halten, welcher nach der Laplaceschen Formel gleich $H + K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ ist. Nach der Voraussetzung ist aber der

Krümmungsradius des horizontalen Querschnittes im Punkte D unendlich grofs, somit ist $R_1 = \infty$, R_2 dagegen ist gleich dem Krümmungsradius R des Meridians OCB im Punkte D. Aus der Gleichheit der auf den Punkt D wirkenden Drucke folgt

$$K + H + y\delta = K + H + \frac{\alpha}{R} \quad \ldots \quad (30)$$

oder

$$y = \frac{\alpha}{\delta}\frac{1}{R} \quad \ldots \quad (31)$$

Für die Krümmung $\frac{1}{R}$ gilt der Ausdruck

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Formel (31) ein, so erhält man nach Multiplikation mit $dy = \frac{dy}{dx}dx$

$$ydy = \frac{\alpha}{\delta}\,\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}dx}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha}{\delta}\,d\left\{\frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Zieht man durch D die Tangente DE und setzt $\angle DEx = \varphi$, so ist $tg\varphi = \frac{dy}{dx}$, folglich $ydy = -\frac{a}{\delta}d\cos\varphi$. Man hat hier das (—) Zeichen zu nehmen, da für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ der Ausdruck $d\cos\varphi < 0$ wird.

Durch Integration erhält man

$$\int_0^y ydy = -\frac{\alpha}{\delta}\int_0^\varphi d\cos\varphi$$

oder

$$y^2 = \frac{2\alpha}{\delta}(1 - \cos\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}}\sqrt{1 - \cos\varphi} \\ y &= \sqrt{a^2}\;\sqrt{1 - \cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

Für den Punkt C, in welchem die Vertikalebene den Rand des Tropfens berührt, ist $\varphi = 90^0$, daher erhält man für die Ordinate $CF = y_0$ dieses Punktes den Ausdruck

$$y_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta}} = \sqrt{a^2} = a \quad \cdots \cdots \quad (33)$$

Obiges Resultat läfst sich leicht verallgemeinern: der Vertikalabstand zweier Elemente einer Flüssigkeitsoberfläche, von denen das eine horizontal, das andere vertikal ist, ist gleich der Quadratwurzel aus der Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit. Hieraus erklärt sich auch, weshalb bei Ableitung der Formel (28) $h = a$ gesetzt wurde. Formel (33) ergiebt

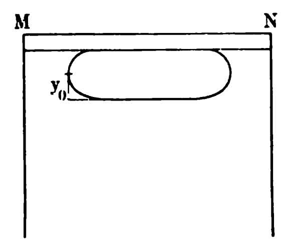
$$\left.\begin{array}{l} a = y_0 \\ \alpha = \frac{\delta y_0^2}{2} \end{array}\right\} \quad \cdots \cdots \quad (34)$$

Siedentopf hat nach obiger Methode den Wert von a^2 für geschmolzene Metalle (Cd, Sn, Pb, Hg, Bi) und Legierungen bestimmt. Für die Legierungen aus Zinn und Wismut konnte a^2 nach der Mischungsregel berechnet werden, wenn die Werte a_1^2 und a_2^2 für geschmolzenes Sn und Bi bekannt waren. Ähnliche Untersuchungen hat Herzfeld für geschmolzenes Ni, Co und Fe ausgeführt, ferner Lohnstein, Heydweiller, Gnadenwitz (1899), Stökle (Hg, 1898), G. Meyer (Hg, 1898) u. a.

Fig. 332 gilt für den Fall, dafs der Flüssigkeitstropfen die Oberfläche MN des festen Körpers nicht benetzt; man sieht aber leicht ein, dafs Formel (34) sich auch auf eine unterhalb der Platte MN (Fig. 333) im Inneren einer Flüssigkeit vorhandene Luftblase beziehen mufs.

Um die Entfernung $CF = y_0$ zu messen, bringt Lippmann nach L einen leuchtenden Punkt und stellt das Fernrohr des Kathetometers auf die helle Fokallinie ein, die bei C wie in einem Konvexspiegel erscheint. Begeht man bei Einstellung von L einen Fehler von 1 mm in vertikaler Richtung, so verschiebt sich hierdurch die Fokallinie nur um 0,001 mm. Quincke hat nach obiger Methode unter Benutzung liegender Tropfen resp. schwimmender Luftblasen zahlreiche Bestimmungen von α ausgeführt. N. Kasterin benutzte kleine Tropfen und leitete für dieselben eine genauere Theorie ab, als sie der im Vorhergehenden gegebenen Methode von Quincke zu Grunde liegt.

Fig. 333.



VII. Messung von α für Flüssigkeiten im Lamellenzustande. Von den verschiedenen Methoden sei hier nur auf diejenige verwiesen, welcher die Formel (19) auf S. 577 zu Grunde liegt. Um α zu finden hat man hiernach den Radius und den inneren Druck einer Blase (z. B. einer Seifenblase) zu messen.

VIII. Messung der Spannung $\alpha_{1,2}$ an der Grenze zweier Medien. Die Methode VI kann unmiltelbar auch hier angewandt werden. Nehmen wir an, es befinde sich oberhalb des Tropfens AOB (Fig. 332) eine andere Flüssigkeit oder Fig. 333 stelle statt einer Luftblase einen Flüssigkeitstropfen dar, der in einer anderen Flüssigkeit schwimme. In diesem Falle erhält man statt (30) die Formel

$$K + H + y(\delta_1 - \delta_2) = K + H + \frac{\alpha_{1,2}}{R} \quad \ldots \quad (35)$$

wo δ_1 und δ_2 die Dichten zweier Flüssigkeiten und $\delta_1 > \delta_2$ ist. Offenbar giebt dann (35) anstatt der Formel (34) die Relation

$$\alpha_{1,2} = \frac{y_0^2}{2}(\delta_1 - \delta_2) \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Nach dieser Methode hat Quincke die Gröfse $\alpha_{1,2}$ für verschiedene Kombinationen aus je zwei Flüssigkeiten bestimmt. Es mögen hier einige der Resultate folgen, die er für die Spannung $\alpha_{1,2}$ erhalten:

	α_1	α_2	$\alpha_{1,2}$
Quecksilber—Wasser	55,03	8,25	42,58
Quecksilber—Alkohol	55,03	2,60	40,71
Quecksilber—Chloroform . . .	55,03	3,12	40,71
Quecksilber—CS_2	55,03	3,27	37,97
Quecksilber—Olivenöl	55,03	3,76	34,19
Wasser—CS_2	8,25	3,27	4,26
Wasser—Chloroform	8,25	3,12	3,01
Wasser—Olivenöl	8,25	3,76	2,09

Frl. A. Pockels hat $\alpha_{1,2}$ mit Hülfe der Relation $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_{1,2}$ [vergl. (24, a) S. 581] bestimmt, indem sie α_1 und α_2 gesondert ermittelte.

Die Gröfse $\alpha_{1,2}$ nimmt bisweilen, nachdem man die Flüssigkeiten miteinander in Berührung gebracht hat, schnell ab; dies erklärt sich dadurch, dafs eine Schicht entsteht, welche ein Gemisch beider Flüssigkeiten darstellt.

IX. Messung des Randwinkels Θ. Der Randwinkel Θ kann unmittelbar bestimmt werden analog der Messung von Flächenwinkeln an Krystallen (S. 322), d. h. durch Beobachtung der Reflexion eines Lichtstrahles am Rande einer Flüssigkeitsmenge. Winkel Θ kann auch aus den Beobachtungen der Meniskushöhe h oder der Höhe H eines grofsen ebenen Tropfens berechnet werden.

Stellt KD in Fig. 332 eine vertikale Wandung dar, so ist $KD = h$ und $\Theta = 180^0 - \angle EDK = 180^0 - (90^0 - \varphi) = 90^0 + \varphi$, also $\varphi = \Theta - 90^0$; aus Formel (32) ergiebt sich dann

$$h = a\sqrt{1 - \sin\Theta} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Für Punkt B ist $y = H$ und $\varphi = 0$, folglich

$$H = a\sqrt{1 - \cos\Theta} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Die Formeln (37) und (38) liefern a^2 und Θ; für Quecksilber findet man $\Theta = 138^0$.

X. Methode der kleinen Wellen. Eine Glasplatte ist an einer der Zinken einer tönenden Stimmgabel befestigt und ruft auf der Oberfläche einer in einer flachen Schale befindlichen Flüssigkeit eine kontinuierliche Reihe von Wellen hervor, welche sich in konzentrischen Kreisen anordnen. Kennt man die Schwingungszahl N der Stimmgabel, so hat man nur die Wellenlänge λ zu messen (nach der stroboskopischen Methode, wobei die Wellen unbeweglich scheinen). Im neunten Kapitel dieses Abschnittes werden wir die Formel

$$\alpha = \frac{N^2 \lambda^3 \delta}{2\pi g} \quad \ldots\ldots \quad (38, a)$$

herleiten (δ ist hier die Gewichtsdichte der Flüssigkeit), welche für kleine λ den Zusammenhang zwischen N und α liefert und auf diese Weise α finden läfst. Die vorliegende Methode ist insbesondere von Dorsey (1897) und Grunmach (1890) angewandt worden. Letzterer benutzte sie zur Bestimmung von α für verflüssigte Gase und für geschmolzene Metalle. Von den ersteren untersuchte er verflüssigte SO_2, NH_3, Cl und die Pictetsche Flüssigkeit (Mischung von CO_2 und SO_2).

Aufser den im vorhergehenden aufgezählten Methoden zur Bestimmung der Gröfsen α und a^2 existieren noch manche andere, so z. B. die interessante Methode von Sentis für Quecksilber, auf welchem dieser Forscher ein Prisma aus Eisen schwimmen liefs. Aus der Gröfse der Vertiefung, welche das Prisma hervorrief, konnte er die Gröfsen α und a^2 berechnen. A. M. Mayer (1897) brachte reine Metallringe, welche ein kleines Schälchen tragen, auf Wasser, streute Sand auf das Schälchen und bestimmte das Gesamtgewicht von Ring und Schälchen, bei welchem der Ring ins Wasser einzutauchen begann.

§ 11. Weitere Messungsergebnisse für α und a^2. Einflufs der Temperatur. Wir hatten bereits einige Zahlenwerte für α und a^2 angeführt, wir wollen nunmehr auf einige Folgerungen verweisen, die sich aus diesen Zahlen ergeben und auch noch einige weitere Resultate anführen.

Die Zusammenstellung auf S. 599 zeigt, dafs die Spannung des Chloroforms gröfser als diejenige des Äthers, aber kleiner als diejenige des Wassers ist. Die Dichte des Chloroforms ist 1,52, diejenige des Äthers 0,74. Giefst man in eine Schenkelröhre (Fig. 334) Chloroform AB und auf dasselbe Wasser BC und Äther AD, so entsteht in B ein konvexer, in A ein konkaver Meniskus.

Quincke hat (1877) die Werte von α und a^2 für Lösungen von Salzen und Säuren im Wasser und Alkohol bestimmt. Es zeigte sich dabei, dafs die Spannung α nahezu proportional der Zahl y der Äquivalente des Salzes wächst, welche in 100 Äquivalenten Wasser gelöst sind. So ist z. B. für NaCl-Lösung

$$\alpha = 7{,}36 + 0{,}157\,y.$$

Die kapillaren Eigenschaften der Lösungen haben ferner untersucht Sentis, Kasankin, Klupathy, C. Forch (1899) u. a. Forch fand, dafs das Gesetz, nach welchem die Spannung proportional der Menge der gelösten Substanz wächst, sich für Lösungen von NaCl, Na_2SO_4, $NaNO_3$, Phosphorsäure und Zucker bestätigt.

Fig. 334.

C D A B

Durch Zunahme der Spannung erklärt sich auch das Kriechen des Salzes längs den Gefäfswandungen: die Lösung, welche an den Gefäfswandungen emporgestiegen ist, verdunstet, wird konzentrierter, erhält eine stärkere Spannung und zieht daher frische Lösung empor u. s. w.

Mit Zunahme der Temperatur nehmen α und a^2 ab. Es mögen hier einige von Brunner, Wolf u. a. gefundene Werte folgen:

t^0	Wasser		Alkohol		Äther	
	a^2 qmm	$\alpha \frac{mg}{mm}$	a^2 qmm	$\alpha \frac{mg}{mm}$	a^2 qmm	$\alpha \frac{mg}{mm}$
0°	15,39	7,69	6,062	2,585	5,434	1,971
20°	14,83	7,40	5,776	2,409	4,916	1,737
35°	14,41	7,16	5,562	2,277	4,526	1,562
60°	13,71	6,84	5,204	2,057		
75°	13,29	6,55	4,948 (78°)	1,898		
90°	12,86	6,25				
100°	12,58	6,04				

Neuere Untersuchungen von Volkmann (1895) haben für Wasser ergeben:

$t =$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$a^2 =$	15,387	15,266	15,109	14,969	14,833	14,694	14,552	14,41	14,29
$\alpha =$	7,693	7,633	7,552	7,478	7,403	7,325	7,245	7,16	7,09

Ferner fand derselbe noch folgende Werte:

	Benzol	Anilin	Toluol
$t = 12{,}5^0$	6,864	8,87	6,813
$t = 17{,}5^0$	6,739	8,78	6,719

Monti fand (1897), dafs α für Wasser beständig abnimmt, wenn die Temperatur von 0 bis 30° wächst. Zwischen 4° und 0° tritt keine besondere Erscheinung auf.

N. Kasterin hat die Oberflächenspannung des Äthers bei hohen Temperaturen untersucht und auch überhaupt die Abhängigkeit der Kohäsion von Flüssigkeiten von der Temperatur studiert. Er fand unter anderem, dafs bei Temperaturzunahme die Kohäsion einer Flüssigkeit schneller abnimmt als das Quadrat der Dichte.

Für viele Flüssigkeiten werden α und a^2 durch lineare Funktionen der Temperatur dargestellt

$$\alpha = \alpha_0 (1 - \beta t) \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

$$a^2 = a_0^2 (1 - \gamma t) \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

B. Weinberg findet für Wasser $\beta = 0{,}002\,254$, $\gamma = 0{,}001\,975$, wenn t zwischen 0 und 70° schwankt. Hall findet für Wasser

$$\alpha = 7{,}700\,(1 - 0{,}001\,85\,t) \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Knipp (1900) hat die Oberflächenspannung des Wassers für Temperaturen t über 100° bestimmt und folgende relativen Werte für α erhalten (C ist ein Proportionalitätsfaktor):

$t =$	0°	100°	200°	300°	350°	357,5°
$C\alpha =$	44,2	31,6	19,3	7,2	3,4	1

Bei der kritischen Temperatur wird $\alpha = 0$ (s. Band III).

Humphreys und Mohler (1894) bestimmten α für unterkühltes Wasser (bis —8,3°) und fanden das Gesetz der linearen Abhängigkeit, d. h. des konstanten Temperaturkoeffizienten vollkommen bestätigt. Dasselbe fand Hock (1900) für eine Reihe anderer Flüssigkeiten.

Für Äther ist nach Brunner

$$a^2 = 5{,}35\,(1 - 0{,}005\,25\,t) \quad \ldots \ldots \quad (41,\text{a})$$

Mit Zunahme der Temperatur nähert sich a^2 der Null und bei einer gewissen Temperatur, die durch die Gleichung

$$t_1 = \frac{1}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

gegeben wird, erhält man $a^2 = 0$; die Flüssigkeit steigt bei dieser Temperatur in der Kapillarröhre nicht empor und die für den flüssigen Aggregatzustand charakteristische Kohäsion ihrer Teilchen verschwindet; die Flüssigkeit hört auf, sich von einem Gase zu unterscheiden. Auf S. 427 nannten wir diese Temperatur die kritische und in der That geben Formel (41, a) und (42) für Äther den Wert $t_1 = 191°$, was mit den unmittelbaren Bestimmungen der kritischen Temperatur des Äthers (193°) in guter Übereinstimmung steht. Für Wasser erhält man $t_1 = 332°$ (anstatt 365°) u. s. w.

Verschaffelt hat die kapillaren Eigenschaften von flüssigem CO_2 und N_2O untersucht. Für flüssige Kohlensäure fand er als Steighöhe h in einer der Röhren

$$h = 26,04 - 0,825\,t$$

woraus $h = 0$ für $t = 31,5^0$ wird.

Für die Kapillaritätskonstante der flüssigen CO_2 und N_2O fand er

$$a^2 = A\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wo T_c die absolute kritische Temperatur der Flüssigkeit, A und B für beide Gase gleiche Zahlen sind, und zwar ist $B = 1,31$. Das Verhältnis $T : T_c$ stellt die sogenannte reduzierte Temperatur dar, mit deren Bedeutung wir uns im III. Bande bekannt machen werden.

Die Elektrisierung hat, wie wir im IV. Bande sehen werden, einen grofsen Einflufs auf die Oberflächenspannung.

Nach einem Zusammenhange zwischen der Gröfse α und der chemischen Zusammensetzung haben Mendelejew, Wilhelmy, Schiff, Eötvös, Ramsay und Shields u. a. gesucht.

Eötvös war der erste, der den Begriff der molekularen Oberflächenenergie einführte. Ist M das Molekulargewicht einer Flüssigkeit, v das specifische Volumen, so ist, wie wir sahen, Mv das Molekularvolumen. Die Gröfse

$$(Mv)^{\frac{2}{3}}$$

kann als Molekularoberfläche aufgefafst werden. Die Gröfse

$$\alpha\,(Mv)^{\frac{2}{3}}$$

ist dann die molekulare Oberflächenenergie. Eötvös und besonders Ramsay und Shields haben nun gezeigt, dafs folgende Gleichung gilt:

$$\alpha\,(Mv)^{\frac{2}{3}} = k\,(\tau - d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

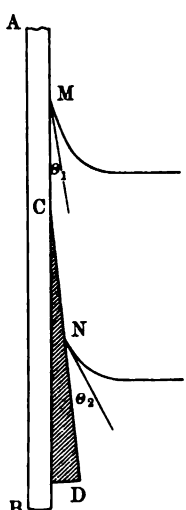
Hier ist τ die Differenz zwischen der kritischen und der beobachteten Temperatur, d und k sind konstante Gröfsen und zwar ist d stets nahe gleich 6 (manchmal auch gröfser). Die Konstante k sollte nun nach Ramsay und Shields für alle Flüssigkeiten ungefähr den gleichen Wert haben und zwar sollte im Mittel $k = 2,12$ sein. Wird dieser Wert als gegeben angenommen, so kann aus den bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Werten von α das Molekulargewicht der Substanz berechnet und auf diese Weise die Existenz einer Polymerisation entdeckt werden. Versuche von Dutoit und Friederich (1900) zeigten, dafs k für verschiedene Flüssigkeiten Werte besitzt, die zwischen 1,53 und 2,63 schwanken. Für eine gegebene Flüssigkeit ist aber k thatsächlich konstant, falls dieselbe in dem Versuchsintervall ihr Molekulargewicht nicht ändert.

§ 12. Gröfse des Radius ϱ der Molekularwirkungssphäre und Dicke der Übergangsschicht. Betrachten wir zuerst einige Versuche, die Gröfse ϱ zu bestimmen.

Auf S. 578 war bereits erwähnt worden, dafs Plateau aus Beobachtungen über die Dicke von Seifenblasen aus glycerinhaltigem Seifenwasser den Schlufs zog, dafs ϱ nicht mehr als 56 $\mu\mu$ oder 0,056 μ, was etwa 0,1 der Wellenlänge des gelben Lichts entspricht, betragen kann. Die Beobachtungen von Drude geben für ϱ nicht mehr als 9 $\mu\mu$, die Beobachtungen von Reinold und Rücker sogar nicht mehr als 6 $\mu\mu$, wobei freilich vorausgesetzt ist, dafs die Dicke des flüssigen Häutchens nicht kleiner als 2 ϱ sein könne.

Quincke hat ϱ nach folgender Methode bestimmt: er bedeckte eine Glasplatte AB (Fig. 335) mit einer keilförmigen Silberschicht CD, versenkte dieselbe bis zu verschiedenen Tiefen ins Wasser und mafs den Randwinkel Θ. In M am reinen Glase wurde ein Wert Θ_1 für diesen Winkel erhalten, in N, wo die Silberschicht schon eine genügende Dicke besafs, ein anderer Wert Θ_2. Wenn man von C weiter nach unten ging, wuchs der Randwinkel allmählich von Θ_1 bis auf Θ_2 und nahm Zwischenwerte an, was darauf hinweist, dafs die Glasmasse durch die Silberschicht hindurch ihre Wirkung äufserte. Quincke mafs die Dicke der Silberschicht an der Stelle, an welcher der Randwinkel den konstanten Wert Θ_2 annahm; diese Dicke mufs dem gesuchten ϱ gleich sein. An Stelle von Wasser wurde auch Quecksilber genommen, wobei das Silber durch Kollodium, AgJ oder Ag_2S ersetzt wurde. Quincke findet für ϱ etwa 0,05 μ und nur für Glas-Kollodium-Quecksilber erhält er $\varrho = 0{,}08\,\mu = 80\,\mu\mu$.

Fig. 335.



G. Vincent (1900) stellte sich die Aufgabe, die Dicke der Übergangsschicht an der Oberfläche eines Körpers zu messen. Es ist dies diejenige inhomogene Schicht, welche sich an der Oberfläche eines jeden flüssigen oder festen Körpers befinden mufs, während unterhalb dieser Schicht sich erst die eigentliche homogene Substanz befindet. Er untersuchte dünne Silberschichten, die auf Spiegelglasplatten auf chemischem Wege niedergeschlagen waren. Die Dicke der Silberschichten variierte zwischen 0 und 170 $\mu\mu$. Indem er den elektrischen Widerstand solcher Schichten studierte, gelangte er zu folgendem Ergebnis:

Jede Silberschicht, deren Dicke gröfser als 50 $\mu\mu$ ist, besteht aus einer inneren homogenen Schicht, die sich zwischen zwei Übergangsschichten (von geringerer elektrischer Leitfähigkeit) befindet. Die

Summe der Dicken der beiden Übergangsschichten ist gleich 50 $\mu\mu$. Dürfte man annehmen, dafs beide Schichten die gleiche Dicke haben, so würde man für die Dicke der Übergangsschicht 25 $\mu\mu$ erhalten. G. Vincent glaubt, dafs auch die von Quincke gemessene Gröfse nicht der Radius der Wirkungssphäre, sondern die Dicke der Übergangsschicht sei und spricht die Vermutung aus, dafs diese Dicke für alle Körper die gleiche sei.

Litteratur.

Oberflächenspannung und Kapillarität.

Geschichtliches: Gehler, Physikalisches Wörterbuch II, Kapillarität.
Jurin: Phil. Trans. **30**, Nr. 355, 363, 759, 1083 (1718).
Young: Phil. Trans. **1**, 65, 1805. Lectures on natural philosophy II, p. 649, 1807.
Laplace: Supplem. au X livre du traité de mécanique céleste. Oeuvres, T. IV, p. 389.
Gaufs: Principia generalia u. s. w. Gesamm. Werke **5**, 9 (1867).
Poisson: Nouvelle théorie de l'action capillaire.
Weinstein: (Eine Vergleichung der Theorien.) Wied. Ann. **27**, 544, 1886.
Stahl: Pogg. Ann. **139**, 239, 1870.
Quet: Progrès de la capillarité. Paris 1867.
Segner: Commentationes Soc. sc. Goettingensis I, 1752.
Bakker: (Theorie.) Ztschr. f. phys. Chem. **21**, 497, 1897; **33**, 477, 1900.
Bertrand: Journ. de Liouville **13**, 1832; **9**, 117, 1844.
Van der Mensbrugghe: Bull. de l'Acad. de Belgique (2) **22**, 272, 1866; **39**, 375, 1875; (3) **11**, 338, 1886; **17**, 518, 1889; **21**, 327, 1891; **24**, 343, 1892; **25**, 233, 1893; **26**, 37, 1893; **37**, 558, 1899. Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles. T. 18, 1 partie. Mém. couronnés de l'Acad. de Belg. **34**, 1869. Compt. rend. **115**, 1059; **121**, 461. Rapports Congrès internat. **1**, 487, 1900; Phys. Ztschr. **1**, 521, 1900.
Mellberg: Om Ytspänningen. hos. vätskor. Helsingfors 1871.
Van der Waals: Ztschr. f. phys. Chem. **13**, 657, 1894.
Hulshof: Drud. Ann. **4**, 165, 1901.
Worthington: Phil. Mag. (5) **18**, 334, 1884.
Quincke: Pogg. Ann. **134**, 356, 1868; **135**, 621, 1868; **137**, 402, 1869; **139**, 1, 1870; **160**, 371, 1877. Ann. d. chem. et phys (4) **16**, 502, 1869. Wied. Ann. **27**, 222, 1886; **52**, 1, 1894; **61**, 266, 1897; **64**, 618, 1898.
B. Sresnewski: Kohäsion der wässerigen Lösungen des Chlorzinks (russ.). Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **13**, 242, 1881.
Duclaux: Théorie élém. de la capillarité. Paris 1872.
P. Hersel: Methoden zur Bestimmung der Oberflächenspannung. Iserlohn 1893.
J. Gromeka: Zur Theorie der Kapillaritätserscheinungen (russ.). Kasan 1886.
Plateau: Mém. de l'Acad. de Belg. 1843 bis 1863. Statique des liquides soumis aux seules forces molécul. Gand et Paris 1873; Pogg. Ann. **114**, 604, 1861.
Drude: Wied. Ann. **43**, 158, 1891.
Ruecker: Proc. R. Soc. London **26**, 334, 1877.

Reinold und Ruecker: Phil. Trans. London **174**, II, 645, 1883; **184**, A, 505, 1893; Wied. Ann. **44**, 778, 1891; Proc. R. Soc. **31**, 524, 1881.
E. Johonnott: Phil. Mag. (5) **47**, 501, 1899.
Simon (de Metz): Compt. rend. **12**, 892 (1841); Ann. ch. et phys. (3) **32**, 5, 1851.
Van der Waals: Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Übers. von Roth. Leipzig 1881, S. 103.
Stefan: Sitzber. Wien. Akad. **94**, II. 1886; Wied. Ann. **29**, 655, 1886.
Boys: Seifenblasen. Deutsch. Übers. Leipzig 1893.
Oberbeck: Wied. Ann. **11**, 634, 1880.
Roiti: Nuov. Cim. (3) **3**, 1878. (Beibl. 1878, p. 381.)
Lehmann: Wied. Ann. **56**, 771, 1895.
Stark: Wied. Ann. **65**, 287, 1898; Münch. Ber. 1898, S. 91.
Rayleigh: Nature (engl.) **42**, 43, 1890.
Sohncke: Wied. Ann. **40**, 345, 1890.
Röntgen: Wied. Ann. **41**, 321, 1890.
Oberbeck: Wien. Ann. **49**, 366, 1893.
K. T. Fischer: Die geringste Dicke von Flüssigkeitshäutchen. Diss. München, 1897; Wied. Ann. **68**, 414, 1899 (enthält eine genaue Zusammenstellung der betreffenden Litteratur).
Jamin: Leçons sur les lois de l'équilibre et du mouvement des liquides dans les corps poreux.
Jungk: Pogg. Ann. **125**, 292, 1865.
Lagergren: Bihang K. Svenska Vet. Akad. Hand. **24**, Abt. 2, 1899; Beibl. 1900, S. 754.
Hagen: Pogg. Ann. **67**, 1, 170, 1846.
Désains: Ann. chim. et phys. **51**, 385, 1832.
De-Heen: Recherches touchant la phys. comparée. Paris 1888, p. 77.
Frankenheim: Die Lehre von der Kohäsion. Breslau 1835. Pogg. Ann. **72**, 177, 1847.
Wilhelmy: Pogg. Ann. **119**, 186, 1863; **121**, 44; **122**, 1, 1864.
Duclaux: Ann. chim et phys. (4) **21**, 386, 1870.
Guye et Perrot: Arch. sc. nat. (4) **11** p. 225, 345, 1901.
Brunner: Pogg. Ann. **70**, 485, 1847.
Wolf: Pogg. Ann. **98**, 643, 1856; **101**, 550; **102**, 571, 1857.
Weinberg: Ztschr. f. phys. Chem. **10**, 34, 1892; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **24**, 13 u. 44, 1892 (enthält ausführliche Litteraturangaben bezüglich der Frage nach der Bestimmung von α und a^2 für Wasser).
Kasankin: Kapillare Eigenschaften der Salzlösungen (russ.). Kasan 1893.
Kasterin: Über Änderung der Kohäsion von Flüssigkeiten mit der Temperatur (russ.). Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **24**, phys. Teil, 196, 1892; **25**, 51, 203, 1893.
Lord Rayleigh: Phil. Mag. (5) **33**, 363, 1892.
Eötvös: Wied. Ann. **27**, 448, 1886.
Hall: Phil. Mag. (5) **36**, 385, 1893.
Sentis: Compt. rend. **118**, 1132, 1894; Journ. de phys. (2) **6**, 571, 1887; **9**, 384, 1890; (3) **6**, 183, 1897.
Siedentopf: Wied. Ann. **61**, 267, 1897.
Herzfeld: Wied. Ann. **62**, 450, 1897.
Lohnstein: Wied. Ann. **53**, 1062, 1894; **54**, 713, 1895.
Heydweiller: Wied. Ann. **62**, 695, 1897; **65**, 311, 1898.
Gnadenwitz: Wied. Ann. **67**, 467, 1899.
Stoeckle: Wied. Ann. **66**, 499, 1898.
Monti: Nuovo Cim. (4) **5**, 5, 186, 1897.

G. Meyer: Wied. Ann. **66**, 523, 1898.
Jaeger: Wien. Ber. **100**, IIa, 258, 493, 1891.
Brjuchanow: Mitteil. der phys.-math. Ges. bei der kaiserl. Univ. zu Kasan (russ.) (2) **7**, 203, 1898.
Agnes Pockels: Wied. Ann. **67**, 669, 1899.
A. M. Mayer: Sill. Journ. (4) **3**, 253, 1897.
Dorsey: Phys. Rev. **5**, 170, 213, 1897; Phil. Mag. (5) **44**, 369, 1897.
Grunmach: Verh. d. phys. Ges. **1**, 13, 1899; Berl. Ber. 1900, S. 829; Drud. Ann. **3**, 660, 1900; **4**, 367, 1901; Phys. Ztschr. **1**, 613, 1900.
C. Forch: Wied. Ann. **68**, 801, 1899.
Knipp: Phys. Rev. **11**, 129, 1900.
Humphreys und Mohler: Phys. Rev. **2**, 387, 1894.
Hock: Wien. Ber. **108**, 1516, 1900.
Wilhelmy: Pogg. Ann. **121**, 55.
Schiff: Lieb. Ann. **223**, 47.
Mendelejew: Compt. rend. **50** u. **51**.
Ramsay und Shields: Ztschr. f. phys. Chem. **12**, 433, 1894.
Eötvös: Wied. Ann. **27**, 448, 1886.
Dutoit und Friederich: Arch. sc. phys. (4) **9**, 105, 1900; Compt. rend. **130**, 327, 1900.
Volkmann: Wied. Ann. **11**, 187, 1880; **17**, 356, 1882; **28**, 136, 1886; **56**, 457, 1895; **62**, 507, 1897; **66**, 194, 1898.
Marangoni: Journ. de phys. (3) **2**, 68, 1893.
Klupathy: Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn **5**, 101, 1887; Beibl. **12**, 750 1888.
Piltschikow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **20**, phys. Teil, 83, 1888.
Verschaffelt: Zittingsverslag. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 1895 bis 1896, S. 74; Beibl. **20**, 343, 1896; Communic. from the labor. of the univers. of Leyden Nr. 18, 28; Referat in Journ. de phys. (3) **6**, 444, 445, 1897.
Krajewitsch: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **7**, 129, 1875.
Kasankin: Das Aufsteigen von wässerigen Lösungen in Kapillarröhren (russ.). Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 122, 1891.
Kasankin: Kapillaritätskonstanten gesättigter Lösungen (russ.) Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 468, 1891.
G. Vincent: (Übergangsschicht.) Ann. chim. et phys. (7) **19**, 421, 433, 1900; **9**, 78, 1900; Phys. Ztschr. **1**, 429, 1900.

Sechstes Kapitel.

Lösungen von festen und flüssigen Körpern.

§ 1. **Allgemeines über Lösungen.** Wenn sich ein fester Körper in Berührung mit einer Flüssigkeit befindet, so geht derselbe oder ein Teil desselben ebenfalls in den flüssigen Zustand über und bildet mit der gegebenen Flüssigkeit eine gleichartige Mischung, die Lösung genannt wird. Die Menge der festen Substanz, welche sich in einer gegebenen Flüssigkeitsmenge zu lösen vermag, ist begrenzt und zwar hängt diese Grenze von der Art der beiden gewählten Sub-

stanzen, von der Temperatur, dem Druck und überhaupt denjenigen Verhältnissen ab, unter welchen die Lösung vor sich geht. Ist die erwähnte Grenze erreicht, so sagt man, die Lösung sei gesättigt.

Leider wird der Begriff der Löslichkeit bis jetzt auf zwei verschiedene Arten definiert, wodurch leicht Mifsverständnisse entstehen. Als Löslichkeit oder Löslichkeitskoeffizienten bezeichnet man:

1. Die Gewichtsmenge S einer Substanz, welche in 100 Gewichtsteilen des Lösungsmittels (Wasser, Alkohol u. s. w.) enthalten ist.

2. Die Gewichtsmenge P einer Substanz, welche in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthalten ist.

Der Zusammenhang zwischen S und P läfst sich leicht finden; sind S Teile der Substanz in 100 Teilen des Lösungsmittels enthalten, so sind sie in $100 + S$ Teilen der Lösung enthalten, daher sind in 100 Teilen der Lösung

$$P = \frac{100\,S}{100 + S} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Teile der gelösten Substanz enthalten. Umgekehrt ist

$$S = \frac{100\,P}{100 - P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Häufiger wird der Koeffizient S gegeben; er kann zwischen Null und irgend beliebigen Zahlen liegen. Der Koeffizient P kann den Grenzwert 100 nie erreichen, da derselbe einer unendlichen Löslichkeit entsprechen würde ($S = \infty$). Ist von nichtgesättigten Lösungen die Rede, so wird deren Zusammensetzung durch die Gröfsen s und p bestimmt, welche dieselben Werte wie S und P (Maximum von s und p) haben und durch dieselben Formeln (1) und (2) miteinander verknüpft sind. Nur selten wird die Löslichkeit statt durch das Gewichtsverhältnis, durch das Volumenverhältnis zwischen Lösungsmittel, gelöster Substanz und Lösung bestimmt. Bei Berührung zweier Flüssigkeiten, die sich nicht in allen Verhältnissen mischen, entstehen ebenfalls Lösungen. Wahrscheinlich löst sich ein jeder Stoff, wenigstens in gewisser Menge, in jeder Flüssigkeit. Ist diese Menge aber sehr gering oder läfst sie sich überhaupt nicht bestimmen, so spricht man von Unlöslichkeit des einen Stoffes im anderen.

Der Lösungsvorgang ist eine äufserst verwickelte Erscheinung und spielen bei demselben eine ganze Reihe verschiedener Faktoren mit. Die Lehre von den Lösungen stellt gegenwärtig einen Hauptabschnitt einer umfangreichen Wissenschaft dar, die man als physikalische Chemie bezeichnet. Begründer dieser Disciplin sind Mendelejew, Ostwald, Arrhenius, Raoult, van 't Hoff, Nernst, Pfeffer u. a. Es existieren für diese Disciplin besondere Lehrbücher und Zeitschriften; sie wird als gesonderter Lehrgegenstand vorgetragen und giebt es an einigen Universitäten besondere Lehrstühle für dieselbe.

In diesem Bande soll blofs ein kurzer Hinweis auf einige besonders wichtige Sätze aus der Lehre von den Lösungen gegeben werden.

Wenn sich ein fester Körper löst, so geht er erstlich in den flüssigen Aggregatzustand über und verteilt sich ferner in der ganzen Masse des Lösungsmittels. Der Übergang aus einem Aggregatzustand in den anderen, sowie die Ausdehnung einer Substanz sind mit Arbeitsverlust verbunden, welcher gewöhnlich auf Kosten der Wärmeenergie der Substanzen selbst erfolgt. Deshalb ist der Lösungsvorgang sehr oft mit einer Temperaturerniedrigung verbunden.

Beim Lösungsvorgange spielt eine grofse und vielleicht die Hauptrolle der Chemismus, dessen Äufserungen sehr verschiedenartig sind. Zunächst kann man die Lösung selbst in vielen Fällen als eine besondere Art einer unbeständigen chemischen Verbindung des Lösungsmittels und der zu lösenden Substanz ansehen. Einen direkten Beweis dafür, dafs man den Lösungsvorgang nicht als ein einfaches sich Mischen mit der gelösten Substanz ansehen kann, giebt die Dichteänderung der Lösung, von welcher später die Rede sein soll. Der Lösungsvorgang von Salzen, Säuren u. s. w. im Wasser kann ferner begleitet werden vom Zerfall derselben oder von Bildung verschiedener Hydrate innerhalb der Lösung. Aufserdem wird, was das Interessanteste in der Lehre von den Lösungen ist, von einer grofsen Zahl von Gelehrten der elektrolytischen Dissociation (S. 524) der gelösten Substanz eine aufserordentlich hohe Bedeutung beigemessen. Nach dieser Auffassung sind in sehr verdünnten Salzlösungen fast sämtliche Moleküle der gelösten Substanz dissociiert, d. h. in ihre Bestandteile zerlegt und zwar in diejenigen, welche sich beim Hindurchleiten eines elektrischen Stromes durch die Lösung an den Elektroden abscheiden und Ionen heifsen. Auf diese Lehre von den freien Ionen werden wir noch häufig zurückzukommen haben. Wir wollen hier nur soviel bemerken, dafs wir nicht beabsichtigen, in diesem Kapitel alles dasjenige zusammenzufassen, was sich auf die Lösungen bezieht; auf einiges Hierhergehörige ist schon früher eingegangen worden, z. B. auf die Kompressibilität der Lösungen (S. 554) und ihre Oberflächenspannung (S. 607). In den folgenden Abschnitten werden wir uns noch mit einigen weiteren Eigenschaften derselben bekannt machen, z. B. mit ihren optischen, thermischen und insbesondere mit ihren elektrischen Eigenschaften. Ausführlich wird die Theorie der Lösungen im dritten Bande behandelt werden.

Einige Eigenschaften der Lösungen sind, zahlenmäfsig ausgedrückt, derart, wie man sie erwarten könnte, wenn man die Lösung als einfache Mischung zweier Stoffe ansieht. Solche Eigenschaften nennt man auf Vorschlag von Ostwald „additive Eigenschaften“.

Eine Lösung, welche ein Grammmolekül (S. 20) der ge-

lösten Substanz in jedem Liter der Lösung enthält, heifst normale Lösung.

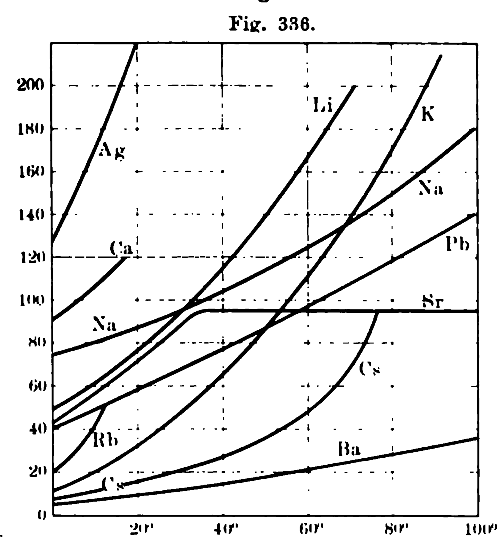
§ 2. **Scheidung des Lösungsmittels von der gelösten Substanz und umgekehrt.** Man kennt drei Methoden zur Trennung der Bestandteile einer Lösung.

1. Erwärmung der Lösung. Hierbei geht das flüssige Lösungsmittel in den gasförmigen Zustand über und kann im besonderen Falle durch Abkühlung wieder in flüssiger Form rein erhalten werden, falls die gelöste Substanz keine flüchtige ist, d. h. sich bei der Erwärmung nicht auch selbst in Dampf verwandelt. Wenn indes die gelöste Substanz sich beim Erwärmen ebenfalls in Dampf verwandelt, jedoch einen anderen Siedepunkt als das Lösungsmittel hat (z. B. Alkohol und Wasser), so wird eine mehr oder weniger vollständige Trennung beider durch wiederholte fraktionierte Destillation erreicht, wobei die überdestillierte Substanz bei jeder Wiederholung der Destillation reicher an demjenigen Bestandteile der Lösung wird, dessen Siedepunkt der niedrigere ist.

2. Abkühlung der Lösung. Bei Abkühlung einer konzentrierten Lösung irgend einer Substanz in einer Flüssigkeit scheidet sich im allgemeinen jene Substanz aus der Lösung und zwar oft in Form von Krystallen; bei hinreichender Abkühlung schwacher wässeriger Lösungen scheidet sich im allgemeinen Eis aus. Auf diese interessante Erscheinung werden wir in der Wärmelehre zurückkommen.

3. Durch Hinzufügen einer dritten Substanz, welche nicht als Lösungsmittel dienen kann, bringt man es sehr oft dahin, dafs sich ein Teil der gelösten Substanz aus der Lösung ausscheidet.

Fig. 336.



§ 3. **Abhängigkeit der Löslichkeit von der Temperatur.** Mit Zunahme der Temperatur nimmt die Löslichkeit im allgemeinen zu, doch kommen auch Abweichungen von dieser Regel vor. Es sind von vielen Forschern empirische Formeln für den Zusammenhang der Löslichkeit mit der Temperatur gegeben worden, wobei wiederum einige der Formeln sich auf die Gröfse S, andere auf P

beziehen. Am anschaulichsten wird dieser Zusammenhang durch Kurven dargestellt. So ist beispielsweise in Fig. 336 dieser Zusammenhang für die salpetersauren Salze von Ag, Ca, Na, Li, Sr, Pb, Rb, K, Cs und Ba dargestellt. Auf der Abscissenachse sind die Temperaturen aufgetragen, auf der Ordinatenachse die Gröfsen S, d. h. die Gewichtsmengen des Salzes, welche sich in 100 Teilen Wasser lösen. Wir sehen aus diesen Kurven beispielsweise, dafs die Löslichkeit von $Pb(NO_3)_2$ sich mit Zunahme der Temperatur ganz besonders regelmäfsig steigert und dafs bei niedrigen Temperaturen $NaNO_3$ leichter löslich ist, als $LiNO_3$ und KNO_3, bei höheren Temperaturen dagegen schwerer löslich als die beiden letzteren Salze. Ferner sieht man, dafs für KNO_3 die Löslichkeit mit der Temperatur besonders schnell wächst, und dafs die Löslichkeit von $Sr(NO_3)_2$ eine auffallende Eigentümlichkeit zeigt: sie wächst von 0^0 bis etwa 33^0 und wird darauf fast konstant.

Von Salzen, deren Wasserlöslichkeit sich graphisch durch eine von einer geraden Linie wenig abweichenden Kurve darstellt, für welche somit S eine lineare Funktion der Temperatur ist, seien die folgenden genannt:

$BaCl_2$	$S = 30{,}62 + 0{,}2711\,t$
KCl	$S = 28{,}5 + 0{,}29\,t$
K_2SO_4	$S = 8{,}36 + 0{,}1741\,t$
KBr	$S = 54{,}43 + 0{,}5128\,t$
KJ	$S = 126{,}23 + 0{,}8088\,t$

Für andere Salze sind die empirischen Formeln im allgemeinen komplizierter. So lautet z. B. die Formel von Mendelejew für die Löslichkeit von KNO_3 im Wasser:

$$S = 13{,}3 + 0{,}574\,t + 0{,}01717\,t^2 + 0{,}0000036\,t^2.$$

Nordenskjöld giebt eine ganze Reihe empirischer Formeln von folgender Gestalt:

$$lg\,S = a + b\left(\frac{t}{100}\right) + c\left(\frac{t}{100}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

z. B.

$$Ba(NO_3)_2 \; . \; . \; . \; lg\,S = 0{,}7207 + 1{,}2495\left(\frac{t}{100}\right) - 0{,}4307\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Étard drückt P für ein bestimmtes Temperaturintervall zwischen $t_1{}^0$ und $t_2{}^0$ durch empirische Formeln aus, in denen $\vartheta = t_2 - t_1$ ist, so z. B.

$CaCl_2$	$P_{50^0-170^0} = 54{,}5 + 0{,}0755\,\vartheta$
$AgNO_3$	$P_{55^0-198^0} = 81{,}0 + 0{,}1328\,\vartheta$
$ZnSO_4$	$P_{(-5^0)-81^0} = 27{,}6 + 0{,}2604\,\vartheta.$

Bei einigen Stoffen nimmt die Löslichkeit mit der Temperaturzunahme zunächst zu, erreicht ein Maximum und nimmt darauf

wieder ab. Hierher gehört die Soda; $Na_2CO_3 + 10 H_2O$ hat bei 38° ein Maximum der Löslichkeit, nämlich $S = 1142,17$; für das wasserfreie Salz gelten folgende Zahlen:

t^0	10°	20°	30°	32,5°	34° bis 79°	100°
S	12,6	21,4	38,1	59,0	46,2	45,4

Ein Beispiel unregelmäfsiger Änderung der Löslichkeit bei Temperaturzunahme stellt das Eisenvitriol, $F_2SO_4 + 7 H_2O$, dar, für welches Étard folgende Formeln giebt:

$$P_{(-2^0)-65^0} = 13,5 + 0,3784\,\vartheta$$
$$P_{65^0-98^0} = 38,8$$
$$P_{98^0-156^0} = 38,8 - 0,6685\,\vartheta$$
$$P_{156^0} = 0.$$

Das Maximum der Löslichkeit liegt für $3 CdSO_4 + 8 H_2O$ bei 68°, für $MnSO_4$ bei 57°, für (wasserfreies) $ZnSO_4$ bei 81°. Auffallend wenig ändert sich die Löslichkeit von NaCl bei Änderung der Temperatur:

$t^0 =$	— 15°	0°	40°	80°	100°
$S =$	32,73	35,52	36,64	38,22	40,35.

Für das Intervall von 0° bis 10° giebt Mendelejew die Formel

$$S = 35,7 + 0,024\,t + 0,0002\,t^2.$$

Für Rohrzucker ist

t^0	0°	25°	50°	75°	100°
S	179,2	211,4	260,4	339,9	487,2
P	64,18	67,89	72,25	77,27	82,97.

Im Jahre 1894 veröffentlichte Étard eine umfangreiche Untersuchung über die Löslichkeit einer grofsen Zahl verschiedener Salze im Wasser und einer ganzen Reihe von organischen Flüssigkeiten. Wir können hier auf die interessanten Resultate dieser Untersuchung nicht näher eingehen.

Die Löslichkeit in Wasser sehr schwer löslicher Substanzen haben F. Kohlrausch und Rose, Herz, Hollemann und andere untersucht. Es mögen hier einige Resultate des letzteren folgen, wobei N die Zahl der Teile Wasser, in denen sich ein Teil des Salzes löst, bedeutet:

	N	t_0
$BaSO_4$	429 700	18,4°
AgBr	1 971 650	20,2°
AgJ	1 074 040	28,4°
$BaCO_3$	64 070	8,8°
$SrCO_3$	121 760	8,8°
$CaCO_3$	99 500	8,7°.

Kohlrausch hat die Wasserlöslichkeit verschiedener Salze speziell bei einer Temperatur von 18° untersucht; irgendwelche allgemeinere oder klar ausgesprochene Beziehungen zwischen der Löslichkeit eines Salzes und seiner Zusammensetzung haben sich indes hierbei nicht ergeben.

Im Jahre 1900 erschien eine sehr eingehende Untersuchung über die Löslichkeit verschiedener Salze in Wasser, aufgeführt von Dietz, Funk u. a. in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Die Löslichkeit von Stoffen in verschiedenen organischen Lösungsmitteln hat auch W. Timofejew untersucht.

A. Larsen hat (1900) den Einfluſs der Temperatur auf die Löslichkeit von Metallen im Quecksilber untersucht. Ausgehend von der Formel

$$S = S_{20}[1 + \beta (t - 20)],$$

wo S_{20} die Löslichkeit bei 20° bedeutet, findet Larsen für eine Lösung von Blei $\beta = 0{,}017$, für Zink $\beta = 0{,}021$, für Zinn $\beta = 0{,}025$ und Wismut $\beta = 0{,}058$.

§ 4. Lösung in Gemischen von mehreren Flüssigkeiten und Löslichkeit von Gemischen in einer Flüssigkeit. Gieſst man zu einer Lösung eine Flüssigkeit hinzu, in der sich die gegebene Substanz nur schwer löst, so scheidet sich ein Teil dieser Substanz aus; dies tritt z. B. bei vielen wässerigen Salzlösungen ein, wenn man Alkohol hinzufügt. Überhaupt kann man den Satz aussprechen, daſs die Löslichkeit in einem Flüssigkeitsgemisch kleiner ist, als die Summe der Löslichkeiten derselben Substanz in den einzelnen Flüssigkeiten. Hierauf war schon im § 2, 3 auf S. 616 aufmerksam gemacht worden. Die Verteilung einer Substanz im Inneren zweier (z. B. durch Schütteln) gemischten Flüssigkeiten haben Berthelot und Jungfleisch, van 't Hoff, Riecke, Aulich, Nernst und Jakowkin untersucht. Letzterer hat die Lösung von J und Br in Gemischen aus Wasser und CS_2, Wasser und $CHBr_3$, sowie Wasser und CCl_4 studiert.

Bodländer beschäftigte sich mit der interessanten Frage, wie sich ein gegebenes Salz in einer Mischung von zwei Flüssigkeiten löst, von denen nur die eine das Salz in beträchtlicherem Maſse auflöst. Er fand, daſs sich eine in Alkohol unlösliche Substanz in einer Mischung aus Wasser und Alkohol proportional dem Kubus des Prozentgehalts an Wasser löst. Ebenso ist die Löslichkeit eines Gemenges aus mehreren Salzen in einer Flüssigkeit geringer als die Summe der Löslichkeiten aller Bestandteile des Gemenges. In einigen Fällen entstehen Lösungen, in denen die Menge der gelösten Substanzen sich in einem bestimmten Verhältnis zu einander befinden. Hierher gehören KNO_3 und $Pb(NO_3)_2$, Na_2SO_4 und $CuSO_4$, $NaCl$ und $CuCl_2$, KJ und KCl, $NaCl$ und KCl, NH_4Cl und $NaCO_3$. Andere Salze wiederum ver-

drängen einander aus den Lösungen, so dafs man gesättigte Lösungen mit verschiedenem relativen Salzgehalt bekommen kann.

§ 5. **Übersättigte Lösungen.** Läfst man eine gesättigte Lösung sich langsam abkühlen, so scheidet sich aus ihr in vielen Fällen die gelöste Substanz nicht aus, obgleich von derselben bereits eine weit gröfsere Menge in der Lösung enthalten ist, als zur Sättigung bei der neuen, niedrigeren Temperatur erforderlich ist. Eine derartige Lösung heifst übersättigt. Besonders schön läfst sich diese Erscheinung zeigen, wenn man vier Teile Na_2SO_4 in einem Teil siedenden Wassers löst und die Lösung langsam erkalten läfst. Man kann es dann dahin bringen, dafs die Lösung das Achtfache von derjenigen Salzmenge enthält, die zur unmittelbaren Sättigung bei der gleichen Temperatur hinreicht. Gerät aber nun die geringste Menge des Salzes $Na_2SO_4 + 10 H_2O$ in diese Lösung hinein, so beginnt sich das Salz schnell auszuscheiden. Da im Staube der Zimmerluft Partikelchen dieses Salzes vorhanden sind, so krystallisiert die übersättigte Lösung, wenn man sie offen an der Luft stehen läfst, ziemlich schnell. In einem zugeschmolzenen Gefäfse oder wenn nur gereinigte Luft hinzutreten kann, läfst sich jene übersättigte Lösung sehr lange aufbewahren. Löwel und Gernez haben die mechanischen Vorgänge, welche sich in derartigen übersättigten Lösungen abspielen, klar gelegt. Man hat nämlich drei verschiedene Salze zu unterscheiden: das wasserfreie Na_2SO_4, ferner $Na_2SO_4 + 7 H_2O$ und endlich $Na_2SO_4 + 10 H_2O$, die alle verschiedene Löslichkeit besitzen. Beim Erkalten einer gesättigten Lösung von $Na_2SO_4 + 10 H_2O$ geht ein Teil des Salzes in $Na_2SO_4 + 7 H_2O$ über. Bringt man einen Krystall des letzteren Salzes in die Lösung, so ruft dies keine Ausscheidung des gelösten Salzes hervor, während diese Ausscheidung sofort eintritt, sobald nur das kleinste Partikelchen von $Na_2SO_4 + 10 H_2O$ vorhanden ist.

Überhaupt wird ein Salz aus einer übersättigten Lösung ausgeschieden, sobald eine feste Partikel desselben Salzes oder eines anderen isomorphen (vergl. sechster Abschnitt, Kap. 1), d. h. mit derselben Krystallform begabten Salzes vorhanden ist. So ruft z. B. $Na_2SO_4 + 10 H_2O$ Krystallisation einer übersättigten Lösung von $Na_2Cr_2O_7 + 10 H_2O$ hervor.

Es giebt Salze, welche in zwei Krystallformen auftreten können, die nur wenig voneinander abweichen; die Lösungen dieser Salze jedoch unterscheiden sich voneinander beträchtlich durch ihre optischen Eigenschaften; das eine dreht die Polarisationsebene des Lichtes (vergl. II. Band, Kap. 17) nach rechts, das andere nach links. Wirft man in eine Lösung, welche beide Modifikationen enthält, einen Krystall, das der einen von ihnen angehört, so scheiden sich blofs Krystalle dieser Art aus, während das Salz der anderen Art in Lösung bleibt.

Schnelles Ausscheiden der gelösten Substanz aus einer übersättigten Lösung ist bisweilen mit beträchtlicher Wärmeentwicklung verbunden.

§ 6. Dichte der Lösungen. Die Auflösung ist fast immer von einer Verdichtung der Substanz begleitet, d. h. das Volumen der Lösung ist kleiner als die Summe der Volumina von gelöster Substanz und Lösungsmittel. Mendelejew hat dieser Frage eine umfangreiche Arbeit gewidmet, die unter dem Titel „Untersuchungen wässeriger Lösungen nach dem specifischen Gewichte" (russ.) im Jahre 1887 in St. Petersburg erschienen ist.

Unter Kontraktion versteht man die relative Volumenverminderung bei der Lösung. Ist v_1 das Flüssigkeitsvolumen, v_2 das Volumen der gelösten Substanz und V das Volumen der Lösung, so ist die Kontraktion k gleich

$$k = \frac{v_1 + v_2 - V}{v_1 + v_2} = 1 - \frac{V}{v_1 + v_2} \quad \dots \quad (4)$$

Bezeichnet man die entsprechenden Gewichtsmengen mit p_1, p_2 und P, die Dichten mit d_1, d_2 und D, so ist

$$v_1 = \frac{p_1}{d_1} \cdot v_2 = \frac{p_2}{d_2} \quad \text{und} \quad V = \frac{P}{D},$$

also

$$k = 1 - \frac{\frac{P}{D}}{\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Wüllner löste 21,522 ccm Salpeter (44,293 g) in 554,077 ccm Wasser und erhielt für das Volumen der Lösung anstatt 554,077 + 21,522 = 575,599 den Wert von 570,838 ccm. Hieraus folgt $k = 0{,}00827$.

Nimmt die Menge der gelösten Substanz zu, so nimmt im allgemeinen auch die Kontraktion zu und erreicht bei einer gewissen Zusammensetzung der Lösung ihr Maximum. So entspricht das Maximum der Kontraktion einer Lösung von $SrCl_2$ in Wasser dem Werte $S = 100$ oder $P = 50$ (gleichen Gewichtsteilen Salz und Wasser). Geritsch findet für die Volumenverminderung δ des Wassers, die bei Bildung von 100 g der Lösung auftritt, in welcher p Prozent Salz enthalten sind, folgenden Ausdruck: $\delta = C\,(100 - p)p$. Hier ist C eine in Bezug auf p konstante, jedoch von der Temperatur abhängige Gröfse. Das Maximum der Kontraktion entspricht dem Werte $p = 50$.

Im Zusammenhange mit der Kontraktion befindet sich auch die Erscheinung, dafs beim Verdünnen von Lösungen mittels reinen Wassers entweder Erwärmung oder aber Abkühlung eintritt. Mischt man gleiche Volumina der gesättigten Lösung und reinen Wassers, so

tritt eine Temperaturerhöhung ein für Lösungen von KCl, $ZnSO_4$, die essigsauren Salze von Natrium und Zink; eine Temperaturerniedrigung dagegen für Lösungen von Na_2SO_4, KNO_3, HNO_3 u. s. f.

Valson hat eine bemerkenswerte Regel gefunden, nach welcher sich die Dichte normaler Lösungen berechnen läfst, die äquivalente Salzmengen in gleichen Volumina Wasser enthalten, nämlich 1 Grammmolekül pro Liter der Lösung. Ausgegangen wird hierbei von der Dichte 1,015 einer normalen Lösung von NH_4Cl (53,5 g pro Liter). Die Dichte der normalen Lösungen anderer Salze erweist sich danach als „additive“ Eigenschaft (S. 615), die durch Addition der Teile erhalten wird. Letztere hängen im einzelnen vom Metall und der Säure ab, denen bestimmte „Moduli“ entsprechen. Diese Moduli sind für Metalle die folgenden

K	Na	Ca	Mg	Sr	Ba	Mn	Fe	Zn	Cu	Cd	Pb	Ag
30	25	27	20	55	73	37	37	41	42	61	103	105

für Säuren

HBr	HJ	H_2SO_4	HNO_3	H_2CO_3
34	64	20	15	14

Man hat obige Moduli zur dritten Dezimale der Zahl 1,015 hinzuzuaddieren, um die Dichte der normalen Lösung zu erhalten; so ist z. B. die Dichte der normalen Lösung von $Ca(NO_3)_2$ gleich

$$1{,}015 + \frac{27 + 15}{1000} = 1{,}057.$$

Bender hat (1883) die Valsonsche Regel auch auf die vielfachnormalen Lösungen ausgedehnt.

In einigen Fällen ist der Lösungsvorgang von einer Ausdehnung begleitet, d. h. das Volumen der Lösung fällt gröfser aus, als die Summe der Volumina von Lösungsmittel und gelöster Substanz. Zuerst beobachteten diese Erscheinung an einer Lösung von Salmiak in Wasser Michel und Krafft (1854), danach Schiff (1859), Gerlach (1859), Nicol (1883) und Lecoq de Boisbaudran. Eine umfangreiche Untersuchung dieser Erscheinung haben Schiff und Monsacchi (1896) ausgeführt. Sie fanden eine erhebliche Ausdehnung bei Lösung von NH_4NO_3 in Wasser (bis zu 4 Proz. in 63 Proz. Lösung), in Salpetersäure, in Salpeterlösung und in einer Salmiaklösung. Bei Lösung in Methyl- und Äthylalkohol dagegen tritt Kontraktion ein. Ferner fanden sie eine Ausdehnung bei Lösung von NH_4Cl und NH_4Br in Wasser, während Lösung von NH_4J in Wasser von Kontraktion begleitet ist. Einige Stoffe (NH_3, $OHCl$, $Na_2S_2O_3 + 5H_2O$) rufen Kontraktion in schwachen und Ausdehnung in konzentrierteren Lösungen hervor.

§ 7. **Zusammstellung einiger weiterer Eigenschaften der Lösungen.** Es seien hier noch einige weitere, wichtigere Eigenschaften der Lösungen aufgezählt, auf welche wir zum Teil später zurückkommen werden.

I. Der Druck vergröfsert die Löslichkeit solcher Substanzen, deren Lösung von Kontraktion begleitet ist; tritt umgekehrt eine Volumenzunahme ($V > v_1 + v_2$ und folglich $k < 0$) bei der Lösung zu Tage, so nimmt die Löslichkeit mit Zunahme des Aufsendruckes ab. Diese Thatsache ist von Sorby beobachtet worden. Die Löslichkeit von Kochsalz nimmt beispielsweise fast um $^1/_2$ Proz. zu, wenn der Druck bis auf 121 Atm. gesteigert wird, die Löslichkeit von Salmiak dagegen nimmt bei einer Drucksteigerung bis zu 164 Atm. um mehr als 1 Proz. ab.

Braun hat für die Änderung der Löslichkeit bei Zunahme des Aufsendruckes um eine Einheit folgende theoretische Formel aufgestellt

$$\varepsilon = \frac{\eta \varphi}{Q} T,$$

in der ε diejenige Salzmenge bedeutet, welche sich in einer gesättigten Lösung auflöst, wenn letztere sich unter dem Drucke p befindet und p um eine Einheit wächst; η ist diejenige Salzmenge, die sich in der gesättigten Lösung auflöst, wenn die absolute Temperatur T um 1^0 wächst, φ — die Volumenzunahme und Q die (in mechanischen Einheiten ausgedrückt) bei Lösung von 1 g Salz in einer nahezu gesättigten Lösung absorbierte Wärmemenge. E. Stackelberg hat den Einflufs des Druckes auf die Löslichkeit von NaCl, NH_4Cl und Alaun untersucht.

II. Beim Aufsaugen von Lösungen scheidet sich oft die gelöste Substanz teilweise aus. So halten z. B. Sand und Kohle, wenn sie von Salzlösungen durchdrungen werden, einen Teil der Salze zurück. Ähnliches gilt von ungeleimten Papier, welches das Wasser schneller aufsaugt, als die in demselben gelösten Salze.

III. Die Spannung p' des Dampfes einer Lösung ist geringer als die Spannung p des Dampfes ihres Lösungsmittels. Nehmen wir an, es seien g Gramme einer Substanz in G Grammen des Lösungsmittels enthalten, dann ist für schwache Lösungen der relative Spannungsabfall des Dampfes gleich

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{gM}{gM + Gm} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wo M und m die Molekulargewichte des Lösungsmittels resp. der gelösten Substanz bedeuten. Die Formel (6) kann man auch folgendermafsen schreiben

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{n}{n + N} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wo n die Anzahl der Moleküle der gelösten Substanz bedeutet, welche auf N Moleküle des Lösungsmittels kommen. Für sehr verdünnte Lösungen kann man setzen

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{g M}{G m} = \frac{n}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Für Lösungen von Elektrolyten mufs man die rechte Seite der Formeln (6), (7) und (8) mit einem gewissen Faktor i multiplizieren, von welchem im § 4 des folgenden Kapitels die Rede sein soll.

IV. Der Siedepunkt t' einer Lösung liegt höher als der Siedepunkt t des reinen Lösungsmittels; die Siedepunktserhöhung $\Delta t = t' - t$ ist gleich

$$\Delta t = \frac{2 g T^2}{m G \varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo g, G und m dieselbe Bedeutung haben wie in (6), T die absolute Siedetemperatur und ϱ die latente Verdampfungswärme ist.

V. Die Erstarrungstemperatur t' liegt niedriger, als die Erstarrungstemperatur t des Lösungsmittels. Die Erniedrigung derselben $\Delta t_1 = t - t'$ ist gleich

$$\Delta t_1 = \frac{2 g T_0^2}{m G \varrho_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wo T_0 die absolute Temperatur, ϱ_1 die latente Schmelzwärme ist.

Die Formeln (6), (8) und (9) können zur Bestimmung des Molekulargewichtes m der gelösten Substanz dienen.

VI. Die Wärmekapazität von wässerigen Salzlösungen ist kleiner als die Summe der Wärmekapazitäten des Wassers und Salzes.

VII. Die Temperatur der gröfsten Dichte von wässerigen Lösungen liegt unterhalb + 4° C., d. h. unterhalb derjenigen des reinen Wassers.

VIII. Viele optische und elektrische Eigenschaften der Lösungen, insbesondere der verdünnten Lösungen, sind „additive“. Hierher gehören die Brechbarkeit, die Drehung der Polarisationsebene (natürliche und elektromagnetische), die Elektrizitätsleitung u. s. w.

§ 8. Gegenseitige Lösung von Flüssigkeiten. Man hat hierbei drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, die übrigens nicht scharf voneinander getrennt sind.

1. Einige Flüssigkeiten lösen sich ineinander gar nicht auf oder, was das wahrscheinlichere ist, in unmerklich geringem Grade; hierher gehört z. B. Wasser und Öl.

2. Einige Flüssigkeiten können miteinander in jedem beliebigen Verhältnisse gemischt werden, wie z. B. Alkohol und Wasser, viele Säuren und Wasser, Chloroform und Schwefelkohlenstoff u. s. w.

3. Einige Flüssigkeiten lösen sich ineinander in bestimmten Mengen auf. Mischt man zwei solche Flüssigkeiten, schüttelt sie durcheinander und läfst die Mischung abstehen, so teilt sie sich nach einiger Zeit in zwei Teile. Im unteren Teile sammelt sich die schwerere Flüssigkeit an, gesättigt von der in ihr gelösten leichteren Flüssigkeit und darüber eine gesättigte Lösung der schwereren Flüssigkeit in der leichteren. Zwei solche Lösungen erhält man z. B. aus Wasser und Äther, Alkohol und CS_2; 100 Volumina Wasser lösen z. B. 8,11 Vol. Äther (bei 20°), 100 Vol. Äther 2,93 Vol. Wasser.

Die gegenseitige Lösung von Flüssigkeiten hat zuerst D. Abaschew (1857) untersucht, hierauf W. Aleksejew (1876 bis 1886), F. Guthrie (1884), Klobbie (1897), Rothmund (1898), Kuenen und Robson (1899), sowie Aignan und Dugas (1899). Die genannten Autoren haben gefunden, dafs sich mit Zunahme der Temperatur die gegenseitige Löslichkeit (Fall 3) erhöht und schliefslich eine solche Temperatur Θ erreicht wird, bei welcher sich die Flüssigkeiten in jedem beliebigen Verhältnisse miteinander mischen. Aus Gründen, welche im III. Bande erörtert werden, kann man diese Temperatur die kritische Lösungstemperatur nennen.

Aleksejew hat diese Temperatur Θ für 14 Paare von Flüssigkeiten bestimmt, so u. a. für Lösungen von Phenol, Anilin, Kreosol, Salicylsäure u. s. w. in Wasser und für Lösungen von Schwefel in Anilin, Benzol, Toluol u. s. w. Eine ähnliche Erscheinung fand er auch für die Paare Zn — Pb und Ag — Bi. Rothmund und Guthrie fanden Fälle auf, wo die Temperatur Θ durch Abkühlung erreicht wird, so dafs bei $t < \Theta$ sich die Flüssigkeiten vollkommen mischen, für $t > \Theta$ dagegen der Fall 3 eintritt.

Die gegenseitige Lösung von Flüssigkeiten wird von Wärmeabsorption oder von Wärmeentwicklung begleitet; so tritt z. B. beim Mischen von Chloroform und Benzin eine Temperaturerhöhung (um 7,2°) auf, beim Mischen von essigsaurem Äther mit Alkohol eine Temperaturerniedrigung (um 2,4°). Die interessante Frage nach der Dampfspannung eines Gemisches aus mehreren Flüssigkeiten wird im III. Bande behandelt werden.

Beim Mischen von Flüssigkeiten tritt bisweilen eine beträchtliche Verdichtung ein: das Volumen der Mischung ist kleiner als die Summe der Volumina ihrer Bestandteile. Besonders interessant ist die Verdichtung, welche beim Mischen von Wasser mit Alkohol auftritt; dieselbe ist von Mendelejew eingehend studiert worden. Diese Verdichtung kann bis zu 4,15 Proz. der Volumensumme gehen, falls man nämlich 45,88 Teile Alkohol mit 54,12 Teilen Wasser mischt, was der Bildung einer Substanz von der Zusammensetzung $C_2H_6O + 3H_2O$ entspricht. Für Zimmertemperatur (etwa 20°) kann die Gröfse der Verdichtung aus folgender Tabelle bestimmt werden:

100 Vol. Wasser	+ 0 Vol. Alkohol	geben	100	Vol. der Mischung
90 " "	+ 10 " "	"	99,4	" " "
80 " "	+ 20 " "	"	98,2	" " "
60 " "	+ 40 " "	"	96,6	" " "
50 " "	+ 50 " "	"	96,3	" " "
40 " "	+ 60 " "	"	96,5	" " "
20 " "	+ 80 " "	"	97,4	" " "
10 " "	+ 90 " "	"	98,3	" " "
0 " "	+ 100 " "	"	100	" " "

Die Gröfse der Verdichtung hängt von der Temperatur ab und das Maximum der Verdichtung entspricht bei verschiedenen Temperaturen nicht genau denselben Gemischen.

Eine theoretische Erklärung des Verdichtungsvorganges, welcher beim Mischen von Wasser mit Alkohol auftritt, ist von J. **van Laar** (1899) gegeben worden. Auf S. 536 war gesagt worden, dafs im Wasser Moleküle $(H_2O)_2$ enthalten seien, deren Bildung aus $H_2O + H_2O$ mit einer beträchtlichen Vergröfserung des Volumens verbunden ist. Ähnliches gilt auch vom Äthylalkohol; die Bildung von 46 g $(C_2H_6O)_2$ aus $2\,C_2H_6O$ ist mit einer Volumenzunahme um 2 ccm verbunden. Beim Mischen von Wasser mit Alkohol wird die Dissociation vermehrt, d. h. es zerfallen zahlreiche Moleküle $(H_2O)_2$ und $(C_2H_6O)_2$, was eine Verminderung des Gesamtvolumens zur Folge hat.

Taylor hat Gemische aus drei Flüssigkeiten untersucht, von denen jede nur bestimmte Mengen der beiden anderen zu lösen vermochte.

§ 9. Lösungen in Gasen. Hannay und Hogarth (1880) sowie Cailletet (1880) waren die ersten, welche darauf hingewiesen haben, dafs sich feste und flüssige Körper in Gasen, die sich unter grofsem Drucke befinden, aufzulösen vermögen. Genauer hat diese Erscheinung Villard (1896) untersucht, welcher fand, dafs Sauerstoff und Luft bei 200 Atm. Druck sechsmal mehr Brom auflösen, als beim Drucke von nur 1 Atm. Ferner fand er, dafs Methan CS_2, J, Paraffin und Kampfer auflöst, die sich bei Druckverminderung ausscheiden; Äthylen löst J, Paraffin, Stearinsäure und Kampfer; Br löst sich in Stickstoffoxydul, J in Kohlensäure. N. N. Schiller hat für diese Erscheinungen eine Erklärung gegeben, auf die wir im III. Bande zurückkehren werden (Einwirkung äufserer Kräfte auf die Dampfspannung).

Litteratur.

D. J. Mendelejew: Untersuchung wässeriger Lösungen nach dem specifischen Gewichte (russ.). St. Petersburg 1887.
Nordenskjöld: Pogg. Ann. 136, 309, 1869.

Etard: Compt. rend. **98**, 1432, 1884; **104**, 1615, 1887; **106**, 740, 1888; **108**, 117, 1889. Ann. chim. et phys. (7) **2**, 503, 1894.

Gernez: Annales de l'École Normale (1) **3**, 167, 1866; (2) **5**, 9, 1876.

Valson: Compt. rend. **73**, 441, 1871; **77**, 806, 1873.

Bender: Wied. Ann. **20**, 560, 1883.

D. J. Mendelejew: Über die Vereinigung des Aethylalkohols mit Wasser (russ.). St. Petersburg 1865.

Wir beschränken uns hier darauf, die im Texte erwähnten Arbeiten zu zitieren. Umfangreichere Litteraturangaben findet man in Landolts Phys.-chem. Tabellen. Berlin 1894, S. 235 bis 256.

W. Timofejew: Löslichkeit von Stoffen in organischen Lösungsmitteln (russ.). Arbeiten der phys.-chem. Sektion d. Ges. f. experim. Wissenschaften bei der Charkower Univers. Jahrg. 21, Beilagen, 6. Lieferung. Charkow 1894.

A. Geritsch: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **21**, 51, 1889. Arb. d. phys. Sekt. d. Moskauer Naturf.-Ges. **3**, Lieferung 1, S. 18, 23, 1890.

Heritsch (Geritsch): Wied. Ann. **36**, 115, 1889.

Ljubawin: Über die Untersuchungen von A. Geritsch. Arb. d. phys. Sekt. d. Moskauer Naturf.-Ges. **3**, Lieferung 2, S. 9, 1890.

Kohlrausch und Rose: Wied. Ann. **50**, 127, 1893.

Dietz, Funke, Wrochem und Mylius: Abhandl. d. Physik.-Techn. Reichsanst. **3**, 427, 1900.

Hollemann: Ztschr. f. phys. Chem. **12**, 125, 1893.

Herz: Chem. Ber. **31**, 2669, 1898.

Kohlrausch: Berl. Ber. 1897, S. 90.

A. Larsen: **1**, 123, 1900 (Drud. Ann.).

Berthelot et Jungfleisch: Ann. chim. et phys. (4) **26**, 400, 1872.

van 't Hoff: Ztschr. phys. Chem. **5**, 322.

Riecke: Zeitschr. phys. Chem. **7**, 97.

Aulich: Zeitschr. phys. Chem. **8**, 105.

Nernst: Zeitschr. phys. Chem. **8**, 111.

Jakowkin: Zeitschr. phys. Chem. **13**, 539 und Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **28**, Chem. Teil, S. 175 u. 860, 1896.

Bodländer: Zeitschr. phys. Chem. **7**, 308, 358; **16**, 729.

Michel et Krafft: Ann. chim. et phys. (3) **41**, 471, 1854.

Schiff: Lieb. Ann. **109**, 325, 1859; **113**, 349, 1860.

Gerlach: Zeitschr. f. anal. Chem. **27**, 271, 1888.

Nicol: Proc. R. Soc. Edinburg 1881 — 1882, p. 819.

Lecoq de Boisbaudran: Compt. rend. **120**, 540; **121**, 100, 1895.

Schiff und Monsacchi: Zeitschr. phys. Chem. **21**, 277, 1896; **24**, 512, 1897.

Braun: Wied. Ann. **30**, 250, 1887; Zeitschr. phys. Chem. **1**, 259, 1887.

Sorby: Proc. Roy. Soc. **12**, 538, 1863.

Stackelberg: Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. (5) **4**, Nr. 2, 1896; Zeitschr. phys. Chem. **20**, 159, 1896.

Kasankin: Kontraktion von Salzlösungen. Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **26**, 218, 1844.

D. Abaschew: Recherches sur la dissolubilité mutuelle des liquides. Bull. de la soc. Impér. des natural. de Moscou **30**, 271. Moskau 1857.

W. Alekseiew: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 1876 bis 1885; Wied. Ann. **28**, 305, 1886.

F. Guthrie: Phil. Mag. (5) **18**, 29, 499, 1884.

Klobbie: Zeitschr. phys. Chem. **24**, 618, 1897.

V. Rothmund: Zeitschr. phys. Chem. **26**, 433, 1898.

J. Kuenen und W. Robson: Zeitschr. phys. Chem. **28**, 342, 1899.

A. Aignan et E. Dugas: Compt. rend. **129**, 643, 1899.
J. van Laar: Zeitschr. phys. Chem. **31**, 8, 1899.
Hannay and Hogarth: Proc. R. Soc. **30**, 178, 1880.
Cailletet: J. de phys. (1) **9**, 193, 1880.
Villard: J. de phys. (3) **5**, 453, 1896; Ann. chim. et phys. **11**, 289, 1897; Rév. gén. des Sc. **9**, 824, 1899.
Taylor: Journ. phys. Chem. (engl.) **1**, 461, 542, 1897.

Siebentes Kapitel.

Diffusion und Osmose.

§ 1. Freie Diffusion der Flüssigkeiten. Auf Seite 515 war eine allgemeine Definition des Ausdrucks „Diffusion" gegeben worden. Zwei mischbare Flüssigkeiten, die miteinander in Berührung gebracht sind, diffundieren ineinander; die Diffusion ist beendet, wenn eine vollkommen homogene Mischung entstanden ist. Die Flüssigkeiten können entweder vollkommen verschieden sein, wie z. B. Wasser und Alkohol oder die eine von ihnen ist eine reine Flüssigkeit, die andere eine Lösung irgend einer Substanz in dieser Flüssigkeit. Im letzteren Falle, der zugleich am wichtigsten und interessantesten ist, besteht die Diffusion darin, daſs sich die gelöste Substanz allmählich im überschüssigen Quantum des Lösungsmittels verteilt.

Graham hat (1850) die Erscheinungen der Diffusion nach zwei Methoden untersucht. Auf den Boden eines groſsen mit Wasser gefüllten Gefäſses (Fig. 337) wurde eine kleine Flasche, welche die zu untersuchende Lösung enthielt, gestellt. Nach Ablauf einer gewissen Zeit wurde die Flasche herausgenommen und bestimmt, welches Quantum der gelösten Substanz aus der Flasche ins Wasser übergetreten war. Bei späteren Untersuchungen brachte Graham die Flüssigkeiten direkt übereinander und analysierte nach bestimmten Zeitintervallen die Zusammensetzung der Flüssigkeit in verschiedenen horizontalen Schichten, aus denen er Proben mittels eines Kapillarhebers entnahm. Hieraus konnte er die relative Zeitdauer bestimmen, innerhalb deren verschiedene Substanzen in gleicher Weise diffundieren, d. h. in gleicher Menge in gegebener Entfernung von der ursprünglichen Trennungsfläche zwischen der Lösung und dem reinen Wasser auftreten. Die verschiedenen Lösungen hatten dabei den gleichen Konzentrationsgrad. Die Zeit, welche für HCl erforderlich

Fig. 337.



war, wurde als Einheit angenommen und ergaben sich für die anderen Substanzen folgende Werte:

Chlorwasserstoffsäure	1
Kochsalz	2,3
Zucker	7
Albumin	49
Karamelzucker	98

Besonders langsam diffundieren somit Albumin und Karamelzucker, die zu den am Ende dieses Abschnittes betrachteten sogenannten Kolloiden gehören.

W. Thomson (jetzt Lord Kelvin) hat eine bequeme Methode angegeben, um die aufeinander folgenden Stadien der Diffusion zu beobachten. In ein cylindrisches Gefäfs, in dessen unterem Teile sich die schwerere Flüssigkeit (z. B. eine Lösung) und über dieser die leichtere befindet, wird eine Anzahl hohler Glaskügelchen von verschiedener mittlerer Dichte hineingebracht. Anfangs befinden sich alle Kügelchen an der Grenzfläche beider Flüssigkeiten, sobald sich aber die Dichte in den verschiedenen Horizontalschichten ändert, sinken einige der Kügelchen in die untere Flüssigkeit ein, während andere in die obere aufsteigen. Aus der Lage, welche die Kügelchen einnehmen, kann man auf die Zusammensetzung der Flüssigkeit in verschiedenen Abständen von der ursprünglichen Trennungsfläche schliefsen.

Beilstein brachte (1856) die Lösungen in ein Gefäfs, dessen Gestalt an einen umgekehrten Heber erinnerte; das kurze Knierohr desselben endete unter der Oberfläche des in einem grofsen Gefäfse befindlichen Wassers.

Berthollet (1803), Fick (1855), Stefan (1874) u. a. haben die Theorie der Diffusion mathematisch entwickelt. Wir haben es hier mit einer Formel zu thun, welche der Formel (24) auf S. 516 vollkommen analog ist. Es sei dq diejenige Menge der Substanz (eines Salzes, einer Säure u. s. w.), welche im Verlaufe der Zeit dt in der vertikalen Richtung x (von unten nach oben) durch die horizontale Fläche s geht; dann ist

$$dq = -ks \frac{du}{dx} dt \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

falls u die Konzentration der Lösung (die Gewichtsmenge der gelösten Substanz in der Volumeneinheit der Lösung) in derjenigen Horizontalfläche bedeutet, deren vertikale Koordinate x ist und in welcher sich der betrachtete Flächenraum s befindet. Der Faktor k ist für die gegebene Lösung charakteristisch und hängt von ihrer Zusammensetzung und ihrem physikalischen Zustande ab; er heifst der Diffusionskoeffizient. Dieser Koeffizient ist numerisch gleich derjenigen Ge-

wichtsmenge der gelösten Substanz, welche in der Zeiteinheit die Einheit der Horizontalfläche passiert, wenn der Konzentrationsunterschied zweier um die Längeneinheit entfernter Schichten gleich Eins ist. Es läfst sich hieraus leicht die Definition der C. G. S.-Einheit für den Diffusionskoeffizienten geben. Die Dimension dieser Gröfse wird erhalten, wenn man beachtet, dafs dq eine gewisse Substanzmenge, du dagegen die in der Volumeneinheit enthaltene Substanzmenge ist, dafs also $[du] = [dq] : L^3$ ist. Es ist

$$k = -\frac{dq}{s\frac{du}{dx}dt},$$

s ist eine Fläche, dx eine Länge, dt eine Zeit, mithin

$$[k] = \frac{[dq]}{L^2 \frac{[dq]}{L^3 . L} T} = \frac{L^2}{T} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Sehr oft wird als Einheit der Zeit der Tag, als Einheit der Länge das Centimeter angenommen; bedient man sich des C. G. S.-Systems, so schreibt man k in der Form $k = N . 10^{-7} \frac{(\text{cm})^2}{\text{sec}}$. Bezeichnet man mit n den Zahlenwert von k im Tag-Centimeter-System, so ist

$$k = N . 10^{-7} \frac{(\text{cm})^2}{\text{sec}} = n \frac{(\text{cm})^2}{\text{Tag}}.$$

Ein Tag hat 86400 Sec.; folglich ist $n = 86400\, N . 10^{-7}$ und schliefslich

$$N = 115{,}7\, n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

So ist z. B. für eine gesättigtere Kochsalzlösung von 15°

$$k = 108 . 10^{-7} \frac{(\text{cm})^2}{\text{sec}} = 0{,}93 \frac{(\text{cm})^2}{\text{Tag}}.$$

Hier ist $N = 108$, $n = 0{,}93$. Fick nahm als Zeiteinheit die Stunde an, in diesem Falle müssen die Zahlenwerte für k gleich $\frac{1}{24} n$ sein, z. B. im eben angeführten Beispiele $k = 0{,}039$.

Stefan hat k aus den Versuchsresultaten von Graham berechnet, die sich auf einen veränderlichen Zustand der Lösung bezogen. Er fand für $k . 10^7$ folgende in C. G. S.-Einheiten ausgedrückte Werte:

	Karamel	Albumin	Zucker	NaCl	NaCl	HCl
	9° — 10°	13° — 15°	9° — 10°	5°	9° — 10°	5°
$k . 10^7 =$	5,4	7,3	39,9	88,5	107,8	201,6 $\frac{(\text{cm})^2}{\text{sec}}$.

Für eine Lösung von J in Alkohol ist $k . 10^7 = 61{,}7$.

H. F. Weber hat eine umfangreiche Untersuchung über die

Diffusion einer $ZnSO_4$-Lösung angestellt; durch Elektrolyse zwischen zwei Zinkplatten wurde zunächst die anfänglich überall gleich konzentrierte Salzlösung in genau angebbarer Weise an der unteren Platte, der Anode, konzentrierter, und an der oberen, der Kathode, verdünnter gemacht und dann nach Unterbrechung des elektrischen Stroms der Verlauf der Diffusion untersucht. Dieselbe Methode hat Seitz auf verschiedene Salze von Zink, Cadmium, Zinn, Blei und Silber angewandt.

Schumeister und insbesondere Scheffer haben den Einfluſs der Konzentration und Temperatur der Lösung auf die Gröſse k studiert. Dabei hat sich ergeben, daſs bei zunehmender Konzentration die Gröſse k für einige Lösungen wächst, für andere abnimmt. A. Griffiths benutzte bei seinen Untersuchungen ein durch eine horizontale Scheidewand in zwei gleiche Hälften geteiltes Gefäſs; durch die Scheidewand führten hinreichend lange vertikale Röhren hindurch. Der untere Teil enthielt die Lösung, der obere Teil reines Wasser. Die Diffusion fand durch die vertikalen Röhren hindurch statt. Für $CuSO_4$ findet Griffiths $k \cdot 10^7 = 28{,}7$ C.G.S. Lenz hat die Diffusion von Alkohollösungen folgender Salze KJ, NaJ, CdJ_2 und K_2CrO_4 untersucht; er findet, daſs die Diffusionsgeschwindigkeit proportional dem elektrischen Widerstande der Lösung ist.

Wiener hat eine sehr interessante Methode angegeben, nach der man die Diffusion durch Beobachtung des Weges untersuchen kann, welchen ein Lichtstrahl einschlägt, wenn er eine Flüssigkeitssäule durchdringt, in welcher Diffusion stattfindet. Eine andere Methode desselben beruht darauf, daſs man diejenigen Krümmungen miſst, welche das Bild eines unter 45° gegen den Horizont geneigten hellen Spalts erfährt, wenn das Spaltbild auf das Diffusionsgefäſs projiziert wird. Boltzmann und Thovert (1901) haben die Theorie der Wienerschen Methode mathematisch entwickelt.

Mit Zunahme der Temperatur nimmt der Diffusionskoeffizient zu. So ist z. B. für $NaCl$

$$k_t = k_0\,(1 + 0{,}0429\,t).$$

De Heen findet für $MgSO_4$, KNO_3, $NaCl$, Na_2HPO_4 und K_2CO_3 fast die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur; als Koeffizient von t aber findet er 0,012.

G. Meyer (1897) hat die Diffusion von Metallen durch Quecksilber untersucht; er findet folgende Werte:

	Zn	Cd	Pb	Au
$k =$	2,09	1,56	1,37	0,72 $\frac{(cm)^2}{Tag}$.

Ähnliche Untersuchungen hatte noch früher Humphreys (1896) angestellt. Er findet, daſs die Metalle um so schneller durch Hg diffundieren, je näher sie im periodischen System von Mendelejew dem Quecksilber stehen.

§ 2. Diffusion der Flüssigkeiten durch eine poröse Scheidewand oder Osmose. Sind zwei Flüssigkeiten voneinander durch eine poröse Scheidewand (aus schwach gebranntem, unglasiertem Thon, Tierblase, Pergament u. s. w.) getrennt, so durchdringen sie dieselbe im allgemeinen mit verschiedener Geschwindigkeit. Diese Erscheinung nennt man Osmose. Die besonderen Bezeichnungen Exosmose und Endosmose für ein langsameres oder schnelleres Durchdringen sind gegenwärtig nicht mehr üblich.

Fig. 338.



Die Erscheinung der Osmose ist von Nollet (1748) entdeckt worden. Derselbe stellte ein kleines mit Alkohol gefülltes und mit Tierblase fest verschlossenes Gefäfs in Wasser und umgekehrt ein mit Wasser gefülltes Gefäfs in Alkohol; dabei beobachtete er, dafs sich im ersten Falle die Blase aufblähte (Fig. 338), im zweiten Falle ins Gefäfs hineingedrückt wurde. In beiden Fällen durchdrang das Wasser die Blase offenbar schneller, als der Alkohol.

Fig. 339.



Der erste, welcher diese Erscheinung aufmerksam verfolgte, war Dutrochet (1827 bis 1835); der von ihm benutzte Apparat ist in Fig. 339 abgebildet. Das Gefäfs *b* ist unten durch eine Blase verschlossen; durch den Hals desselben führt eine vertikale, beiderseits offene Röhre *aa*, welche durch den Deckel des weiteren Gefäfses *nn* hindurchführt. Die eine der zu untersuchenden Flüssigkeiten befindet sich in *nn*, während die andere das Gefäfs *b* und bisweilen einen Teil der Röhre *aa* erfüllt. Ist in *b* eine wässerige Salzlösung, in *nn* reines Wasser enthalten, so beginnt die Flüssigkeit in der Röhre zu steigen, was beweist, dafs reines Wasser durch die Scheidewand schneller hindurchdringt, als die Salzlösung. Ein Nachteil des Apparats von Dutrochet besteht darin, dafs die Flüssigkeitssäule in der Röhre *aa* einen starken hydrostatischen Druck ausübt, der einen entgegengesetzten „Filtrationsstrom" in der Flüssigkeit hervorruft. Deshalb gab Vierordt (1847) der Blase eine vertikale Stellung, so dafs die hydrostatischen Drucke auf dieselbe von beiden Seiten die gleichen blieben. Er bestätigte das bereits von Dutrochet gefundene Resultat, dafs der Überschufs der Geschwindigkeit der einen Strömung über die Geschwindigkeit der anderen proportional der Differenz der Konzentration

zweier Lösungen derselben Substanz ist, welche sich zu beiden Seiten der Scheidewand befinden. Die Vorstellung von einem besonderen „endosmotischen Äquivalente", zu welcher Jolly durch seine Untersuchungen geführt wurde, ist später aufgegeben worden, weshalb wir dieselbe auch übergehen wollen.

Die Richtung, in welcher die schnellere Strömung erfolgt, hängt von der Wahl der beiden Flüssigkeiten, von der Substanz der Scheidewand, sowie von dem Konzentrationsgrade, wenn zwei Lösungen gewählt sind, ab. Es mögen hier einige Beispiele folgen:

Sind Wasser und Alkohol voneinander durch Tierblase getrennt, so dringt das Wasser schneller hindurch; nimmt man dagegen eine dünne Kautschukmembran, so durchdringt sie umgekehrt der Alkohol schneller als das Wasser. Reines Wasser durchdringt die Membran schneller als Lösungen von Weinstein und Citronensäure von bestimmter Konzentration, aber langsamer als schwache Lösungen derselben.

Die Erklärung der osmotischen Erscheinungen stöfst auf grofse Schwierigkeiten. Früher glaubte man, dafs es reine Kapillaritätserscheinungen seien, und dafs diejenige Flüssigkeit die Scheidewand schneller durchdringt, die in Kapillarröhren höher aufsteigt. Diese Erklärungsweise hat man jetzt aufgegeben, aber Quincke hat auf die Bedeutung hingewiesen, welche die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten haben kann, die sich an der Kanalwandung im Innern der porösen Scheidewand berühren; diese Spannung kann eine Verschiebung der Flüssigkeiten nach der einen oder anderen Seite zur Folge haben.

Liebig erklärte die Osmose durch die ungleiche Fähigkeit der Scheidewand verschiedene Flüssigkeiten in sich aufzunehmen. Er fand, dafs 100 Gewichtseinheiten trockener Ochsenblase in 24 Stunden 268 Gewichtsteile Wasser, 133 Teile NaCl-Lösung, 38 Teile (84 Proz.) Spiritus und 17 Gewichtsteile Knochenöl in sich aufsaugen. Eine mit Wasser gesättigte Blase verliert einen Teil dieses Wassers, wenn man sie mit Salz bestreut oder in Alkohol bringt. Auf Grund dieser Thatsache erklärt Liebig die Osmose dadurch, dafs die Scheidewand die beiden Flüssigkeiten, welche sie berührt, ungleich schnell absorbiert. Die auf der einen Seite angesaugte Flüssigkeit wird auf der anderen Seite ausgeschieden. Komplizierte Erklärungen der Osmose stammen von Bruecke und Fick.

Mit Zunahme der Temperatur nimmt die Osmose durch Tierblase im allgemeinen zu, jedoch nur in sehr geringem Grade. Flusin hat die Osmose verschiedener organischer Substanzen durch Kautschuk untersucht.

§ 3. Osmotischer Druck. Wir sahen im § 1, dafs, wenn man auf eine Lösung irgend eines Salzes, einer Säure, eine Zuckerlösung u. s. w.

reines Wasser giefst, sich die gelöste Substanz gewissermafsen ausdehnt und allmählich über das ganze Flüssigkeitsvolumen ausbreitet. Dafs diese Erscheinung analog der Ausdehnung eines Gases ist, welche man beobachtet falls der vom Gase eingenommene Raum mit einem Vakuum in Verbindung gesetzt wird, ist zuerst von Gay-Lussac bemerkt worden. Das reine Wasser oder die weniger konzentrierte Lösung haben hier für die gelöste Substanz die Bedeutung des Vakuums oder luftverdünnten Raumes. Man kann sagen, die Substanz habe das Bestreben, ein möglichst grofses Volumen einzunehmen. Ist dies aber der Fall, so mufs eine besondere Art von Druck auftreten, welcher auf die zwischen dem Wasser und der Lösung befindliche Scheidewand einwirkt. Ein solcher Druck wird auch in der That beobachtet; man nennt ihn den osmotischen Druck. Die Existenz desselben läfst sich mit dem Apparat von Dutrochet (Fig. 339) unmittelbar nachweisen, da die Flüssigkeitssäule, die in der Röhre *aa* aufsteigt, durch diesen Druck getragen wird.

Das Studium des osmotischen Druckes hat sich erst entwickelt, nachdem man die sogenannten „halbdurchlässigen“ Membranen entdeckt hatte, welche sich bei der Berührung zweier Flüssigkeiten bilden und welche aus der Substanz bestehen, welche sich infolge chemischer Reaktion zwischen den Flüssigkeiten ausscheidet. Solche Membranen hat zuerst Traube (1867) benutzt, der sie Niederschlagsmembranen nannte; sie entstehen, wenn man z. B. ein mit Leim gefülltes Röhrchen in Gerbsäure taucht. Pfeffer (1877) u. a. haben eine ganze Reihe von Methoden angegeben, nach denen man halbdurchlässige Membranen erhalten kann. Eine der bequemsten Methoden besteht darin, dafs man Lösungen von Kupfervitriol und Ferricyankalium miteinander in Berührung bringt, wobei sich dann eine aus Ferricyankupfer bestehende Membran bildet. (Pfeffer.) Am allerbequemsten ist es, ein poröses Thongefäfs zuerst von einer Kupfervitriollösung und darauf von einer Lösung von Ferricyankalium durchdringen zu lassen. Dann werden alle Poren des Gefäfses mit einer solchen Membran geschlossen.

Eine halbdurchlässige Membran hat die Eigentümlichkeit, dafs sie Wasser ungehindert durchläfst, die in demselben gelösten Substanzen aber in höherem oder geringerem Grade zurückhält, besonders diejenigen, durch deren Wechselwirkung sie entstanden ist. Übrigens haben de Vries und Quincke gezeigt, dafs in sehr geringen Mengen selbst diese Substanzen die Membran durchdringen.

Füllt man ein Pfeffersches poröses Thongefäfs mit irgend einer Lösung, verschliefst es durch einen Kork, durch welchen eine Manometerröhre führt und setzt das Gefäfs in reines Wasser, so zeigt das Manometer eine Zunahme des inneren Druckes an, der einen gewissen Maximalwert erreicht und der osmotische Druck genannt wird.

Ostwald und seine Schüler führen diesen in manchen Fällen bis zu einigen Atmosphären reichenden Druck unmittelbar auf die gelöste Substanz zurück, deren Moleküle auf die halbdurchlässige Membran Stöfse ausüben. Aus diesen Stöfsen setzt sich, wie wir dies für die Gase gesehen haben (S. 474), ein Druck zusammen.

Vorstehende Erklärungsweise ist die sogenannte kinetische Theorie des osmotischen Druckes. **Van 't Hoff**, einer der Begründer der Lehre vom osmotischen Druck, weist blofs auf die Analogie zwischen diesem Druck und der Spannung eines Gases hin. Diese Analogie reicht, wie wir später sehen werden, sehr weit. Die Frage nach dem Mechanismus für das Entstehen dieses Druckes läfst **van 't Hoff** unerörtert. Dasselbe thun auch Lord **Kelvin** u. a. Gegen die kinetische Theorie hat sich besonders K. **Schreber** (1899) ausgesprochen. Unmittelbare Messungen des osmotischen Druckes sind nur von wenigen Autoren ausgeführt worden, in letzterer Zeit von **Naccari**. Wir werden später die Formeln angeben, nach denen eine indirekte Bestimmung des osmotischen Druckes möglich ist, wenn man die Dampfspannung, die Siedetemperatur oder endlich die Erstarrungstemperatur der Lösung gefunden hat.

In Fig. 340 ist ein Apparat von **Nernst** abgebildet, in welchem eine Wasserschicht an Stelle der halbdurchlässigen Membran tritt. Das gröfsere Gefäfs enthält mit Wasser gesättigten Äther, das kleinere Gefäfs A dagegen Äther, welcher ebenfalls mit Wasser und einem bedeutenden Quantum Benzol gesättigt ist. Das Gefäfs A ist unten durch Tierblase verschlossen, welche von Wasser durchtränkt ist und hier die Rolle des porösen Thongefäfses im **Pfefferschen** Apparate übernimmt; es dient letztere also nur dazu, die halbdurchlässige, aus Wasser bestehende Membran ganz zu erhalten, die den Äther hindurchläfst, für Benzol aber undurchlässig ist. In der vertikalen Röhre steigt allmählich eine Äthersäule empor.

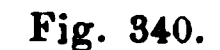


Fig. 340.



Lösungen, welche denselben osmotischen Druck ausüben, heifsen **isotonische** oder **isoosmotische Lösungen**.

Tammann (1888) hat eine schöne Methode angegeben, nach der man solche isotonische Lösungen finden kann, die bei ihrem Zusammentreffen eine halbdurchlässige Membran bilden, wie z. B. Kupfervitriol und Ferricyankalium. Nehmen wir an, die Lösung A habe die Konzentration a und es solle die Konzentration b der isotonischen Lösung B gefunden werden. Zu diesem Zwecke bringt man einen Tropfen der Lösung B in die Lösung A; derselbe überzieht sich sofort mit einem Häutchen. Ist die Konzentration b' der Lösung B gröfser als b, so dringt

das Wasser von aufsen in den Tropfen ein, die Lösung rings um denselben wird konzentrierter und sinkt in Form eines Strahles, den man mit blofsem Auge, noch besser aber nach einer (Schlieren-Methode, s. Bd. II) optischen Methode beobachten kann, zu Boden. Ist jedoch b' kleiner als b, so tritt reines Wasser aus dem Tropfen heraus und eine Strömung von verdünnter Lösung steigt empor. Sind beide Lösungen isotonisch, so tritt keinerlei Strömung auf, d. h. es findet kein Wasseraustausch statt. Traube, de Vries und Pfeffer haben den osmotischen Druck in den Zellen lebender Pflanzen und Tiere untersucht. Die innere Wandung dieser Zellen läfst Wasser hindurch, ist aber für viele in demselben gelöste Substanzen undurchlässig. Infolgedessen entsteht in den Zellen ein Druck, der bis zu 4 und sogar bis zu 18 Atm. gehen kann; dies ist z. B. in den Zellen der Burkane der Fall und, wie die Untersuchungen von Wladimirow (1891) gezeigt haben, auch in den Zellen einiger Bakterien.

Bringt man eine lebende Zelle in eine Lösung, deren osmotischer Druck gröfser als der in der Zelle herrschende Druck ist, so löst sich die innere Wandung von der äufseren und kann man sich dieses Umstandes zum Auffinden isotonischer Lösungen bedienen. Zu dem gleichen Zwecke können auch rote Blutkörperchen verwandt werden.

Isotonische Lösungen haben (bei gegebenem Lösungsmittel) die gleiche Dampfspannung, sowie den gleichen Siede- und Gefrierpunkt. Diese wichtigen Gesetze haben van 't Hoff und Duhem auf theoretischem Wege ermittelt; van 't Hoff hat folgende Formeln aufgestellt:

$$P = 82{,}2 \frac{TD_0}{M} \frac{p - p'}{p} = \frac{41{,}1\, D_0\, \varrho}{T'} \varDelta t = \frac{41{,}1\, D_0\, \varrho_1}{T_1} \varDelta t_1 \quad (4)$$

Hier bedeutet P den osmotischen Druck in Atmosphären, D_0 die auf Wasser bezogene Dichte des Lösungsmittels, M das Molekulargewicht des Lösungsmittels, p und p' den Druck des Dampfes und der Lösung bei der absoluten Temperatur T, ϱ die latente Verdampfungswärme, ϱ_1 die latente Schmelzwärme von 1 g des Lösungsmittels, ausgedrückt in Grammkalorieen, T' und T_1 die absolute Siede- und Schmelztemperatur, $\varDelta t$ die Erhöhung des Siedepunktes, $\varDelta t_1$ die Erniedrigung des Schmelzpunktes (S. 624).

Für wässerige Lösungen ist

$$P = 4{,}57\, T \frac{p - p'}{p} = 59{,}2\, \varDelta t = 12{,}07\, \varDelta t_1 . \quad . \quad (4, a)$$

Alle diese hier angeführten Formeln sollen im dritten Bande abgeleitet werden. Nach ihnen kann man die oben erwähnte indirekte Bestimmung der Gröfse P vornehmen.

§ 4. Die Gesetze von Boyle-Mariotte, Gay-Lussac und Avogadro für Lösungen. Van 't Hoff, Ostwald, Arrhenius, Raoult u. a. haben die Lehre von der nahen Verwandtschaft, wenn nicht gar von der Identität einer ganzen Reihe von fundamentalen Eigenschaften der Lösungen mit denen der Gase begründet. Diese Eigenschaften drücken sich in folgendem aus.

I. Der osmotische Druck P ist bei konstanter Temperatur der Konzentration der Lösung proportional oder indirekt proportional dem von einer gegebenen Menge der gelösten Substanz eingenommenen Volumen v. (Boyle-Mariotte.)

II. Der osmotische Druck P ist proportional der absoluten Temperatur T, d. h. sein Temperaturkoeffizient ist gleich 0,00367. (Gay-Lussac.)

III. Gleiche Volumina v der isotonischen Lösungen (bei gleichem Drucke P) enthalten bei gegebener Temperatur t die gleiche Anzahl N von Molekülen, welche zudem gleich der Zahl derjenigen Gasmoleküle ist, die sich im Volumen v beim Drucke P und der Temperatur t vorfinden. (Avogadro.)

Halbdurchlässige Membranen lassen nur in wenigen Fällen eine Messung des osmotischen Druckes P zu, der indirekt durch Beobachtung der Dampfspannung p [vergl. Formel (4) auf S. 636] oder der Erstarrungstemperatur bestimmt werden kann. Dagegen kann z. B. für eine Zuckerlösung P mit Hülfe des Apparates von Pfeffer (S. 634) ermittelt werden.

Das Gesetz I wird durch die folgenden für Zuckerlösungen geltenden Zahlen bestätigt:

Konzentrationsgrad m	Druck P	Verhältnis beider $\frac{P}{m}$
1 Proz.	53,5 cm	53,5
2 „	101,6 „	50,8
2,74 „	151,8 „	55,4
4 „	208,2 „	52,1
6 „	307,5 „	51,3

Der Druck ist in Centimetern der Höhe einer Quecksilbersäule ausgedrückt. Es sei hierbei bemerkt, dafs für eine einprozentige Salpeterlösung der Druck P mehr als 3 Atm. beträgt.

Das Gesetz II wird durch folgende für eine einprozentige Zuckerlösung geltende Zahlen bestätigt:

t^0	P beob.	P ber.	Differenz
6,8°	0,664 Atm.	0,665 Atm.	+ 0,001
13,7°	0,691 „	0,681 „	— 0,010
14,2°	0,671 „	0,682 „	+ 0,011

t^0	P beob.	P ber.	Differenz
15,5°	0,684 Atm.	0,686 Atm.	+ 0,002
22,0°	0,721 „	0,701 „	— 0,020
32,0°	0,716 „	0,725 „	+ 0,009
36,0°	0,746 „	0,735 „	— 0,011

Die in der dritten Kolumne stehenden Werte von P sind nach folgender Formel berechnet worden:

$$P = 0{,}649\,(1 + 0{,}003\,67\,t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Kombination unserer beiden ersten Gesetze führt auf eine Formel, die der Clapeyronschen Formel analog ist [vergl. (5), S 430], nämlich zur Formel

$$Pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo R eine Konstante ist. Wir hatten gesehen, dafs, falls man das Volumen v in Litern, den Druck P in Atmosphären ausdrückt und von jeder Substanz ein Grammmolekül nimmt, also soviel Gramm, als das Molekulargewicht der betreffenden Substanz Einheiten enthält, oder, mit anderen Worten, von den verschiedenen Substanzen die gleiche Anzahl von Molekülen nimmt, für alle Gase

$$R = 0{,}0815 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wird. [Vergl. (8) auf S. 432.]

Berechnen wir nunmehr die Gröfse P für eine einprozentige Salzlösung von 0° unter der Voraussetzung, dafs für dieselbe ebenfalls $R = 0{,}0815$ ist. In der Formel

$$P = \frac{RT}{v} = \frac{0{,}0815\;T}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ist also $R = 0{,}0815$ und $T = 273$. Das Molekulargewicht des Zuckers $C_{12}H_{22}O_{11}$ ist gleich 342. Das Volumen von 100 g Lösung, welche 1 g Zucker enthalten, ist gleich 99,7 ccm, folglich ist das Volumen v gleich $99{,}7 \times 342$ ccm oder $v = 34{,}1$ Liter. Somit ist nach der Theorie

$$P = \frac{0{,}0815 \times 273}{34{,}1} = 0{,}656 \text{ Atm.}$$

Diese Zahl stimmt mit der auf experimentellem Wege gefundenen $P = 0{,}649$ Atm. [vergl. Formel (5)] überraschend gut überein. Es ist somit in der That der Druck des gelösten Zuckers gleich demjenigen Drucke, welchen er ausüben würde, wenn er den ihm zur Verfügung stehenden Raum in Form von nicht dissociiertem Dampf erfüllen würde.

Für viele andere Lösungen indes findet eine derartige Übereinstimmung der Beobachtungen mit den nach Formel (8) berechneten

Werten für den Druck keineswegs statt; für diese ist die Formel (6) durch folgenden Ausdruck zu ersetzen:

$$Pv = iRT \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hier hat R für alle Lösungen den gleichen Wert und ist gleich der Konstanten, welche in der entsprechenden für Gase geltenden Formel vorkommt, wenn man ein Grammmolekül der Substanz nimmt. Der Faktor i zeigt die Abweichung der gegebenen Lösung von einer „Normallösung" an. Diese Abweichungen erinnern an das, was auf S. 524 über die Dissociation der Gase gesagt war. Wenn i nicht gleich 1 ist, so deutet dieses darauf hin, daſs die gelöste Substanz dissociiert ist, daſs also die Zahl der freien Moleküle vermehrt ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand, daſs für Lösungen von Nichtelektrolyten, d. h. von Körpern, die durch den elektrischen Strom nicht zerlegt werden, der Koeffizient $i = 1$, für Elektrolyte dagegen $i > 1$ ist. Hieraus haben Planck und Arrhenius den Schluſs gezogen, daſs die Elektrolyte (Salze, Säuren) in den Lösungen zum Teil dissociiert sind, also in ihre Bestandteile und zwar in Ionen gespalten sind (S. 615). Es mögen hier einige Zahlenwerte des Faktors i folgen:

	HCl	$CaCl_2$	$NaNO_3$	Na_2CO_3	$K_2Al_2(SO_4)_4$	$KClO_3$	$Na_2B_4O_7$
$i =$	1,98	2,52	1,82	2,18	4,45	1,78	3,57

Ponsot (1899) findet, daſs der Grenzwert von i für sehr schwache Lösungen gleich 1,8 ist. Arrhenius zeigte, daſs man i nach folgender Formel berechnen kann:

$$i = 1 + (k - 1)\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo k die Gesamtzahl der Teile ist, in welche ein Molekül des Elektrolyten innerhalb der Lösung zerfällt; es ist z. B. $k = 2$ für KCl, $k = 3$ für $BaCl_2$, K_2SO_4 u. s. w. Die Gröſse α bestimmt den Grad der Dissociation, d. h. das Verhältnis der Anzahl zerlegter Moleküle zur Gesamtzahl der Moleküle. Je verdünnter die Lösung ist, desto weniger ist α von Eins verschieden, d. h. desto vollständiger ist die Dissociation (vergl. S. 526). Die Gröſse α kann durch Beobachtung der Elektrizitätsleitung in Lösungen gefunden werden, und Formel (10) giebt für i Werte, welche mit den zum Teil früher angeführten sehr gut übereinstimmen.

Nernst (1888) hat eine vollständige Molekulartheorie für die Diffusion der Lösungen entwickelt; wir werden auf dieselbe im dritten Bande zurückkommen. Mac Gregor (1897) hat eine interessante Formel angegeben, welche verschiedene Eigenschaften (Dichte, thermische Ausdehnung, Reibung, Oberflächenspannung, Brechungsquotient) wässeriger Salzlösungen mit den entsprechenden Eigenschaften reinen

Wassers in Zusammenhang bringt. In dieser Formel kommt ebenfalls ein Koeffizient vor, welcher den Grad der Dissociation (oder Ionisierung) der Lösung angiebt.

- - - - -

Litteratur.

Graham: Phil. Trans. 1850, **1**, 1; **2**, 805; 1851, **2**, 483; Lieb. Ann. **77**, 56 und 129; **80**, 197, 1851; **121**, 1, 1862.
Beilstein: Lieb. Ann. **99**, 165, 1856.
Berthollet: Essai de statique chimique. Paris 1803, p. 412.
Fick: Pogg. Ann. **94**, 59, 1855.
Stefan: Wien. Ber. **79**, II, 161, 1879.
H. F. Weber, Wied. Ann. **7**, 469 und 536, 1879.
Seitz: Wied. Ann. **64**, 759, 1898.
G. Meyer: Wied. Ann. **61**, 225, 1897; **64**, 752, 1898.
Humphreys: Journ. chem. Soc. **69**, 1679, 1896.
Schumeister: Wien. Ber. **79**, II, 603, 1879.
Scheffer: Chem. Ber. **15**, 788, 1882; **16**. 1903, 1883.
De Heen: Bull. Ac. Belg. (3) **8**, 219, 1884; **19**, 197, 1890.
Nollet: Histoire de l'Acad. des sciences 1748, p. 101.
Dutrochet: Ann. de chim. et phys. (2) **35**, 393; **37**, 191; **49**, 411; **51**, 159; **60**, 337, 1827 bis 1835.
Vierordt: Archiv v. Roser und Wunderlich **6**, 1847; Pogg. Ann. **73**, 519, 1848.
Jolly: Zeitschr. f. rationelle Med. **7**, 83, 1849; Pogg. Ann. **78**, 261, 1849.
Liebig: Ursachen der Säftebewegung. Braunschweig 1848. Theorie der Osmose. Lieb. Ann. **121**, 78, 1862.
Flusin, Compt. rend. **126**, 1497, 1898.
A. Griffiths: Phil. Mag. (5) **46**, 453; 1898; **47**, 530, 1899.
Quincke: Pogg. Ann. **160**, 118, 1877.
Wiener: Wied. Ann. **49**, 105, 1893.
Boltzmann: Wied. Ann. **53**, 959, 1894.
Thovert, C. R. 113, p. 1197, 1901.
Umow: Über Diffusion, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 335, 1891.
Gribojedow: Über Diffusion, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **25**, 36, 1893.
Traube: Arch. f. Anat. und Physiol. 1867, p. 87.
Pfeffer: Osmotische Untersuchungen. Leipzig 1877.
Adie: Journ. of Chem. Soc. 1891, S. 344.
De Vries: Arch. Néerland. **31**, 344, 1878 (Beibl. **3**, 7); Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 414, 1888.
Lord Kelvin: Nature 1897, Nr. 1421, 1422.
Naccari: Nuovo Cimento (4) **5**, 141, 1897.
K. Schreber: Zeitschr. f. phys. Chem. **28**, 79, 1899.
Tammann: Zeitschr. f. phys. Chem. **8**, 685, 1891; Wied. Ann. **34**, 229, 1888.
Van 't Hoff: Arch. Néerland. **20**, 239, 1885; Zeitschr. f. phys. Chem. **1**, 481, 1887.
Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 611, 1888; **6**, 37, 1890.
Arrhenius: Zeitschr. f. phys. Chem. **3**, 115, 1889; **10**, 51, 1892.
Duhem, Journ. de phys. (2) **6**, 134, 397, 1887; **7**, 391, 1888.
Fick: Zeitschr. f. phys. Chem. **5**, 527, 1890.
Pupin: Der osmotische Druck. Berlin 1889.

Dieterici: Wied. Ann. **220**, 1892.
Fuchs: Exners Repert. **27**, 176, 1891.
Ponsot: Compt. rend. **128**, 1447, 1899.
Poynting: (Osmotic pressure). Phil. Mag. (5) **42**, 289, 1896.
Mac Gregor: Phil. Mag. (5) **43**, 46, 98, 1897.

Achtes Kapitel.

Reibung im Inneren der Flüssigkeiten.

§ 1. **Koeffizienten der inneren Reibung.** Die innere Reibung, welche wir S. 497 besprochen haben, tritt nicht nur in Gasen, sondern in allen Medien auf, in welchen sich verschiedene denselben angehörige Teile mit ungleicher Geschwindigkeit bewegen.

Formel (59) von S. 497

$$f = \eta s \frac{dv}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

bezieht sich daher in gleicher Weise auf Gase und Flüssigkeiten. Hier bedeutet η den Koeffizienten der inneren Reibung, s den Flächenraum der Berührungsstelle für zwei Nachbarschichten, v die Geschwindigkeit der Schicht, $\frac{dv}{dx}$ das Mafs der Geschwindigkeitsänderung, welche man in der Richtung x, senkrecht zu s beobachtet, f die Kraft, welche die Bewegung der einen Schicht beschleunigt, die der anderen verzögert. Die Gröfse η heifst auch die Viskosität der gegebenen Flüssigkeit. Auf S. 497 war die Einheit der Viskosität definiert worden.

Die Dimension der Gröfse η kann man leicht finden, wenn man bedenkt, dafs f eine Kraft, dv eine Geschwindigkeit, s einen Flächeninhalt und dx eine Länge bedeutet. Es ist

$$[f] = \frac{ML}{T^2}; \quad [s] = L^2; \quad [dv] = \frac{L}{T} \text{ und } [dx] = L;$$

hieraus folgt

$$\frac{ML}{T^2} = [\eta]\, L^2 \frac{L}{TL}$$

und mithin

$$[\eta] = \frac{M}{LT} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Man pflegt die Viskosität auf zweierlei Weise auszudrücken, erstens in C. G. S.-Einheiten, in welchem Falle sie mit η bezeichnet werden soll.

Ferner vergleicht man die Viskosität verschiedener Flüssigkeiten mit der Viskosität von Wasser bei 0°, welche man gleich 100 setzt. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen messen die specifische Viskosität, welche mit z bezeichnet werden möge. Bezeichnet man die in C. G. S.-Einheiten ausgedrückte Viskosität des Wassers bei 0° mit η_0', so besteht zwischen η und z offenbar folgende Relation:

$$z = \frac{\eta}{\eta_0'} 100 \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Jäger hat eine Theorie der Flüssigkeiten nach Analogie der kinetischen Gastheorie (S. 473) entwickelt und unter anderem auch eine Theorie der inneren Reibung in Flüssigkeiten gegeben, welche der Theorie der Reibung in Gasen (S. 497) entspricht. Er findet für den Durchmesser der Wassermoleküle $\delta = 70 . 10^{-9}$ Centimeter und für die mittlere Weglänge $\lambda = 91 . 10^{-11}$ Centim., so dafs $\lambda < \delta$ ist, während in Gasen $\lambda > \delta$ ist.

§ 2. Koeffizient der äufseren Reibung und Gleitungskoeffizient. Wenn eine Flüssigkeit einen unbeweglichen festen Körper berührt und die Geschwindigkeit V der Flüssigkeitsschicht, welche unmittelbar an die Oberfläche des festen Körpers angrenzt und sich längs dieser Oberfläche bewegt, nicht den Wert Null hat, so kommt zwischen der Flüssigkeit und dem festen Körper Reibung zu stande. Die Kraft f, welche in diesem Falle auf die in Betracht gezogene Flüssigkeitsschicht wirkt, ist der Oberfläche s der Schicht und der Geschwindigkeit V, die man auch als Differenz der Geschwindigkeiten von festem Körper und Flüssigkeit auffassen kann, direkt proportional. Es ist demnach

$$f = \lambda s V \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Hier ist λ der Koeffizienten der äufseren Reibung der Flüssigkeit. Die Dimension dieser Gröfse ist offenbar

$$[\lambda] = \frac{M}{L^2 T} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Navier hat (1822) zuerst obige Gröfse eingeführt. Gewöhnlich macht man die Annahme, dafs in der Mehrzahl der Fälle

$$\lambda = \infty \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

d. h. $V = 0$ ist. Dies bedeutet aber, dafs die Grenzschicht der Flüssigkeit gewissermafsen an der Oberfläche des festen Körpers haftet und unbeweglich ist, dafs also ein unmittelbares Gleiten der Flüssigkeit längs der Oberfläche des festen Körpers überhaupt nicht zu stande kommt.

Ist λ nicht unendlich grofs, so nennt man die Gröfse

$$\gamma = \frac{\eta}{\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

den Gleitungskoeffizienten. Aus (2) und (5) folgt

$$[\gamma] = L \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Ist $\lambda = \infty$, so ist $\gamma = 0$; ein Gleiten findet in diesem Falle nicht statt.

§ 3. Bestimmung des Reibungskoeffizienten nach der Methode der Kapillarröhren. Poiseuille hat (1842) folgende Formel für das Volumen Q einer Flüssigkeit gegeben, welche in der Zeit T durch eine Kapillarröhre mit dem inneren Durchmesser D und der Länge L hindurchströmt, während sich die Flüssigkeit unter dem Drucke P befindet

$$Q = k \frac{PD^4}{L} T \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Der Proportionalitätsfaktor k hängt, wie man findet, von der inneren Reibung η und dem Gleitungskoeffizienten γ ab. Die mathematische Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit in einer Kapillarröhre führt zur Formel

$$Q = \frac{\pi P}{8 \eta L} (R^4 + 4 \gamma R^3) T \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

wo $R = \frac{1}{2} D$ ist. Setzt man $\lambda = \infty$, folglich $\gamma = 0$, so erhält man

$$Q = \frac{\pi P R^4}{8 \eta L} T \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

d. h. die Poiseuillesche Formel, in welcher folglich ($R = \frac{1}{2} D$)

$$k = \frac{\pi}{128 \eta} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

ist.

Aus Formel (11) erhält man die Gröfse

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8 Q L} T \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

wenn man die Gröfsen P, R, Q, L und T mifst; will man η in C. S. G.-Einheiten erhalten, so hat man P in Dynen pro Quadratcentimeter der Oberfläche, L und R in Centimetern, Q in Kubikcentimetern und T in Sekunden auszudrücken.

Hagenbach hat gezeigt, dafs man bei grofser Ausflufsgeschwindigkeit zu dem durch Formel (13) gegebenen Werte noch ein Ergänzungsglied hinzuzufügen hat; es ist

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8 Q L} T - \frac{Q \delta}{2^{\frac{10}{3}} \pi g L} \quad \ldots \quad (13,a)$$

wo δ die Dichte der Flüssigkeit, g die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

Knibbs hat eine Formel in Vorschlag gebracht, welche von der Hagenbachschen etwas abweicht; er hat eine grofse Anzahl von Bestimmungen der Gröfse η für Wasser (aus den Jahren 1846 bis 1894) zusammengestellt und kritisch beleuchtet. Kann hat nach derselben Methode die innere Reibung für Brom bestimmt.

Wetzstein (1899) hat gefunden, dafs für Wasser, Äther und Chloroform die nach Formel (13, a) berechneten Werte von η bei zunehmendem P zu grofs ausfallen. Die nach Formel (13) berechneten Werte von η können in folgender Form dargestellt werden

$$\eta = \frac{b}{P} + a \quad \ldots \quad (13,b)$$

wo b und a Konstante sind.

Um die specifische Viskosität z zu bestimmen [vergl. (31)], könnte man die Ausflufsdauer T und T' gleicher Volumina der untersuchten Flüssigkeit (η) und des Wassers (η') aus ein und derselben Röhre (R und L) und unter demselben Drucke P bestimmen, denn Formel (13) giebt in diesem Falle

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{T}{T'} \quad \ldots \quad (14)$$

Auf dieselbe Weise kann man das Verhältnis von η' zu η'_0 und hierauf z nach Formel (3) bestimmen. Etwas anders angestellte Versuche, von denen weiter unten die Rede sein wird, ergeben für Wasser

$$\eta'_0 = 0{,}0178 \, \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm\ sec}} \quad \ldots \quad (15)$$

Setzt man diesen Wert in Formel (3) ein, so erhält man für den Zusammenhang zwischen η und z:

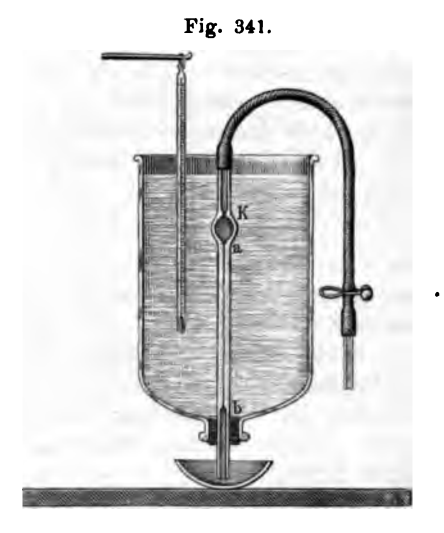
$$\eta = 0{,}000178 \, z \quad \ldots \quad (16)$$

Couette (1890) leitete aus seinen Versuchen den Schlufs ab, dafs der Reibungskoeffizient des Wassers von dem Material der benutzten Röhre unabhängig ist, dafs also $\lambda = \infty$ und $\gamma = 0$ ist, selbst wenn das Wasser die Röhrenwandungen (aus Paraffin) nicht benetzt. Ebenso hatte Warburg (1870) gefunden, dafs für Quecksilber und Gas $\lambda = \infty$ und $\gamma = 0$ ist. N. P. Petrow (1896) meint, dafs die Schlufsfolgerungen von Couette unrichtig sind; er findet z. B., dafs man aus den Versuchen von Couette für Rapsöl einen zwischen 0,029 und 0,0012 liegenden Wert von γ und keineswegs Null erhält. Es sei hier bemerkt, dafs bei Ableitung der Formel (13) vorausgesetzt wurde, die

Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstrahles beim Ausströmen aus einer Kapillarröhre sei gleich Null, dafs man daher bei den Versuchen schwache Drucke anzuwenden hat, die ein sehr langsames Durchströmen bewirken.

Die in der Praxis zur Bestimmung von η und z angewandte Methode wird aus der Beschreibung des zu diesem Zwecke dienenden Apparates verständlich. Eine Kapillarröhre ab (Fig. 341) endet unten in einer breiteren Röhre und geht oben in eine Erweiterung über, von welcher eine breitere, bei K verengte Röhre weiterführt. An diese wird ein Gummischlauch mit Quetschhahn angesetzt. Die ganze Röhre bK befindet sich in einem Gefäfs mit Wasser, dessen Temperatur durch ein daneben befindliches Thermometer gemessen wird. Man saugt nun zunächst durch den Gummischlauch die zu untersuchende Flüssigkeit bis etwas über K hinauf und bestimmt sodann nach Öffnung des Quetschhahnes diejenige Zeit T, in welcher die ganze Flüssigkeitsmenge durch die Kapillarröhre hindurchströmt. Hierauf wiederholt man denselben Versuch mit einer anderen Flüssigkeit, z. B. mit Wasser, wobei die Zeitdauer des Ausströmens etwa gleich T' sein mag. Der Druck P in Formel (13) stellt hier eine variable Gröfse dar, denn er ist in jedem gegebenen Augenblicke gleich dem Drucke der noch nicht entströmten Flüssigkeitssäule. Da jedoch das Gesetz, nach dem sich dieser Druck ändert, für beide Flüssigkeiten das gleiche ist, so kann man auch die Formel (13) benutzen, aus der sich offenbar

Fig. 341.



$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{TP}{T'P'}$$

ergiebt. Sind δ und δ' die Dichten der beiden Flüssigkeiten, so ist $P:P' = \delta:\delta'$ und daher

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{T\delta}{T'\delta'} \qquad \text{(17)}$$

Wenn eine der beiden Flüssigkeiten Wasser ist, so ist $\delta' = 1$ und man kann die Werte von η' aus entsprechenden Tabellen (vergl. § 5) entnehmen. Die zur Verwendung gelangenden Flüssigkeiten müssen

sorgfältig filtriert sein, damit keine fremden Beimengungen in die Kapillarröhre hineingelangen.

§ 4. Methode von Coulomb, Helmholtz, Margules u. a. zur Bestimmung von η. Eine runde horizontale Metallscheibe hängt im Inneren der zu untersuchenden Flüssigkeit an einem von ihrem Zentrum ausgehenden Drahte. Man dreht die Scheibe ein wenig um den Draht, überläſst sie sodann sich selbst und beobachtet nun die Schwingungsdauer τ (d. h. die Zeit, in welcher sie aus einer Grenzlage in die andere gelangt) und das logarithmische Dekrement λ (S. 158). Ist λ_0 gleich dem logarithmischen Dekremente bei Schwingungen in der Luft, so führt die Theorie zu folgender Formel

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\pi R^4}{2K} \sqrt{\frac{\pi}{2} \delta \tau \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo R der Radius der Scheibe, K das Trägheitsmoment derselben in Bezug auf die Drehungsaxe und δ die Dichte der Flüssigkeit ist; hieraus läſst sich η finden (Coulombsche Methode).

Durch Einführung einiger Korrektionen in obige Formel hat O. E. Meyer (1887) Resultate erhalten, welche mit den nach der Methode der Kapillarröhren erhaltenen gute Übereinstimmung zeigen. König (1887) benutzte anstatt der Scheibe eine um ihre Achse schwingende Kugel.

Helmholtz und Piotrowski (1860) beobachteten umgekehrt die Schwingungen einer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten, an einem Draht befestigten Hohlkugel; dieselbe führte, indem sie sich um den Draht drehte, Schwingungen um ihren vertikalen Durchmesser aus. Der Theorie nach kann man η und γ bestimmen, wenn man die Schwingungsdauer und ihr logarithmisches Dekrement kennt. Sehr bemerkenswert ist hierbei der Umstand, daſs sich γ nicht gleich Null und folglich λ nicht gleich Unendlich ergab. Für Wasser wurde vielmehr $\eta = 0{,}01186 \frac{\text{g}}{\text{cm sec}}$ und $\gamma = 0{,}23534$ cm gefunden. Umani hat die Kugel durch einen Cylinder ersetzt und für Quecksilber $\eta = 0{,}01577 \frac{\text{g}}{\text{cm sec}}$ gefunden.

Margules (1881) hat folgende Methode in Vorschlag gebracht: man taucht einen vertikalen Cylinder vom Grundflächenradius r_1 in die Flüssigkeit und umgiebt ihn mit einer dünnwandigen cylindrischen Röhre vom Radius r_2. Den äuſseren Cylinder dreht man nun mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω und miſst das Moment M des Kräftepaares, welches auf den inneren Cylinder wirkt. Es ist dann

$$M = 4\pi c \eta h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

wo h die Höhe des inneren Cylinders ist und c folgenden Wert hat

$$c = \frac{\omega}{2\gamma\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right) + \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Findet kein Gleiten der Flüssigkeit statt ($\lambda = \infty$ und $\gamma = 0$ S. 642), so ist

$$c = \frac{\omega}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Couette (1890) und Brodmann (1892) haben nach dieser Methode den Reibungskoeffizienten η bestimmt. Eine Abänderung dieser Methode stellt diejenige von Mallock dar.

Jones bestimmte η nach der Formel von Stokes für die konstante Geschwindigkeit v, welche ein im Inneren der Flüssigkeit niederfallendes Kügelchen erlangt:

$$v = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\sigma - \varrho}{\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21, a)$$

wenn r den Radius, σ die Dichte des Kügelchens, ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Jones beobachtete das Niederfallen von Quecksilberkügelchen.

§ 5. Einfluſs von Temperatur und Druck auf die Viskosität der Flüssigkeiten. Sämtliche Versuche zeigen, daſs η und z mit Zunahme der Temperatur sehr schnell abnehmen. Für Wasser erhält man folgende Werte:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
η	0,0181	0,0133	0,0102	0,0081	0,0066	0,0057	0,0049	0,0042
z	100	73,3	56,2	44,9	36,7	31,5	26,9	23,5.

Pacher findet für Wasser eine Anomalie in der Nähe von 4° und zwar wächst η bei der Abkühlung bis 7° langsam, zwischen 7° und 5° rascher und dann zwischen 5° und 4° wieder langsamer; dabei zeigt sich zwischen 5° und 4° ein Maximum und ein Minimum des Wertes von η.

Für Alkohol ist $z_0 = 100$, $z_{70} = 28,7$.

Für Brom (Kann):

	0°	25°	50°
$\eta =$	0,01427	0,01133	0,00949

Für Quecksilber (nach Koch, 1881):

t^0	— 21,4°	0°	99°	196,7°	340,1°
η	0,01847	0,01697	0,01223	0,01017	0,009054.

Der Koeffizient η_t kann durch folgende empirische Formel ausgedrückt werden:

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

in welcher z. B. für Wasser nach den Untersuchungen von O. E. Meyer $a = 0,0332$, $b = 0,000244$ und $\eta_0 = 1,775$ ist. Grätz (1888) hat gezeigt, dafs für homogene Flüssigkeiten (also nicht für Lösungen) η_t durch folgende Formel ausgedrückt werden mufs

$$\eta_t = A \frac{t_0 - t}{t - t_1} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

in welcher A und t_1 konstante Zahlen und t_0 die kritische Temperatur (S. 427) der Flüssigkeit bedeuten. So ist beispielsweise für Wasser $A = 7,338$ und $t_1 = -28,619$. Für flüssige Kohlensäure ist

t^0	5^0	10^0	20^0	29^0
η	0,000925	0,000852	0,000712	0,000539

Von Heydweiller, Thorpe und Rodger, Stoel und de Haas ist die innere Reibung von Flüssigkeiten bei Temperaturen, welche oberhalb ihres Siedepunktes liegen, untersucht worden. Es mögen hier einige Angaben von Heydweiller folgen:

Äthyläther		Benzol		Toluol		Äthylacetat		CCl_4	
t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$	t^0	$10^3\eta$
2,4	2,871	14,8	7,038	20,6	5,830	20,9	4,533	21,5	9,652
18,4	2,392	30,8	5,522	78.2	3,235	77,7	2,515	99,6	4,056
47,1	1.839	78,4	3,185	100,0	2,721	99,6	2,090		
78,5	1,428	100,5	2,606	131,5	2,133	151,9	1,387		
100,4	1,177	161,4	1,546	182,5	1,477	183,0	1,063		
		185	1,254						

Stoel hat folgende empirische Formel vorgeschlagen

$$\eta = Ce^{-at}$$

in welcher C und a Konstante sind. Andere, kompliziertere Formeln sind von A. Duff in Vorschlag gebracht worden (1899). Batschinsky findet, dafs für Quecksilber die Formel

$$\eta = \frac{a}{T} + b + cT$$

gültig sei; hier sind a, b und c Konstante, T die absolute Temperatur. In erster Annäherung kann man

$$\eta\, T = Const. = 4{,}60815$$

setzen. Von Garvanoff, Koller und Perry ist die Abhängigkeit der inneren Reibung von der Temperatur für verschiedene Öle untersucht worden.

In der folgenden Tabelle sind einige von den Resultaten des ersteren der genannten Forscher wiedergegeben, wobei die Werte von η in C. G. S.-Einheiten ausgedrückt sind:

t^0	Zitronenöl	Terpentinöl	Nelkenöl	Olivenöl	Mandelöl	Vaselinöl
20°	0,012 64	0,014 61	0,132 61	0,808 00	0,665 61	0,911 02
50°	0,008 71	0,009 68	0,037 29	0,253 33	0,218 94	0,195 21
80°	0,006 51	0,007 16	0,015 53	0,115 79	0,100 065	0,073 01

Die Viskosität der flüssigen Kohlensäure ist die geringste bisher beobachtete, bei 15° ist sie 14,6 mal geringer als die Viskosität des Wassers. Geringe Viskosität besitzt auch der Äther, für welchen $z_{10} = 14{,}5$ ist (während für Wasser der Wert 73,3 gilt).

Umgekehrt besitzen Glycerin, einige Öle und dem ähnliche Flüssigkeiten außerordentlich hohe Viskosität. So ist z. B. für Glycerin:

t	2,8°	8,1°	14,3°	20,3°	26,5°
η	42,2	25,2	13,9	7,78	4,94.

Die Viskosität des Glycerins bei 2,8° ist 2500 mal größer als diejenige des Wassers.

Für Rapsöl ist $\eta_0 = 25{,}3$, $\eta_{6,5} = 5{,}8$, $\eta_{27,0} = 1{,}20$.

Dorn und Völlmer haben die innere Reibung einer Lösung von HCl in Wasser (24,3 Proz.), von $LiCl$ in Methylalkohol (1,56 Proz.) bei 15,6° und bei — 79,3° untersucht und folgende Werte für η gefunden:

HCl		LiCl	
15,6°	— 79,3°	15,6°	— 79,3°
0,016 35	0,9000	0,007 97	0,0707.

Für HCl ist der zweite Wert 55 mal größer als der erste, für $LiCl$ dagegen nur 8,9 mal. G. Tammann hat η für unterkühlte Flüssigkeiten nach der Methode von Jones (S. 647) bestimmt, wobei sich ergab, daß η bei Temperaturzunahme sehr schnell abnimmt.

Den Einfluß des Druckes auf die Viskosität haben Röntgen (1884), Warburg und Sachs (1884), Cohen (1892), G. Tammann (1899) und Hausser (1900) untersucht. Es zeigt sich, daß bei Druckzunahme die Viskosität des Wassers abnimmt und zwar bis zu Temperaturen von etwa 32°. Oberhalb 32° findet Hausser eine Zunahme der Viskosität bei einer Drucksteigerung bis zu 400 Atm.; die Viskosität konzentrierter Lösungen von $NaCl$ und NH_4Cl im Wasser nimmt dagegen zu; eine starke Zunahme der Viskosität tritt auch für Terpentinöl auf. Von den Versuchen Wetzsteins war bereits auf S. 644 die Rede.

§. 6. Innere Reibung in Lösungen und Mischungen. Die Viskosität von Lösungen ist bisweilen größer, bisweilen kleiner als diejenige des Wassers und treten manchmal bei Zunahme der Konzentration Maxima oder Minima der Viskosität auf. Die Viskosität der Lösungen von $NaCl$, K_2SO_4, $NaBr$, NaJ, $NaNO_3$, Na_2SO_4,

$BaCl_2$, $CaCl_2$, $MgSO_4$, der Salze der Schwermetalle u. s. w. ist gröfser als die Viskosität des Wassers.

Die Viskosität der Lösungen von KCl, KBr, KJ, KNO_3, $KClO_3$, NH_4Cl, NH_4Br, NH_4J, NH_4NO_3, $Ba(NO_3)_2$ ist bei niedriger Temperatur geringer, bei höheren Temperaturen dagegen gröfser als die Viskosität des reinen Wassers. Für viele schwache Lösungen wird die Viskosität z durch folgende Formel von Arrhenius

$$z = A^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ausgedrückt, wo A eine Konstante, x die Zahl der Grammmoleküle gelöster Substanz in einem Liter Wasser bedeutet. So ist z. B. für Äther $A = 1{,}026$, für Zucker $A = 1{,}046$, für KNO_3 $A = 0{,}9664$, für $ZnSO_4$ $A = 1{,}3613$, für $CuSO_4$ $A = 1{,}3533$, für H_2SO_4 $A = 1{,}0880$. Reyher und J. Wagner haben die Richtigkeit der Formel (24) für viele Lösungen bestätigt. Die innere Reibung von Gemischen aus mehreren Lösungen hat Kanitz untersucht. Für Gemische gilt die Formel

$$z = A^x B^y C^v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24, a)$$

wo A, B, C Konstanten, x, y, v . . . die Zahl der Grammmoleküle der verschiedenen Substanzen, welche in einem Liter Wasser gelöst sind, bedeutet. H. Euler hat die Formel (24, a) zur Untersuchung der Viskosität von Lösungen teilweise dissoziierter Elektrolyte benutzt. Ch. Lees fand (1901), dafs die Gröfse η für eine Mischung zweier Flüssigkeiten, für welche jene Gröfse gleich η_1 und η_2 ist, aus der Formel

$$\left(\frac{1}{\eta}\right)^m = c_1 \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^m + c_2 \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^m$$

berechnet werden kann, wo c_1 und c_2 die Volumina sind, welche die Volumeneinheit der Mischung bilden ($c_1 + c_2 = 1$), und m eine Konstante.

Moore hat die innere Reibung von verschiedenen Salzlösungen untersucht; er findet, dafs die Formel von Arrhenius für konzentriertere Lösungen ihre Geltung verliert. Smoluchowski hat gefunden, dafs die innere Reibung flüssiger Isolatoren, wie z. B. von CS_2, Alkohol und anderen zunimmt, wenn in ihnen J, KJ, NH_4NO_3 aufgelöst wird.

Die innere Reibung von Amalgamen hat Schweidler untersucht. Linebarger hat die Viskosität von Mischungen verschiedener Flüssigkeiten untersucht, wie von Benzol, Toluol (C_7H_8), Nitrobenzol ($C_6H_5NO_2$), Chloroform, Äther, CCl_4 u. a. Er fand, dafs die Viskosität einer Mischung im allgemeinen kleiner ist, als man sie nach der Mischungsregel errechnet.

Eine ausführliche Darlegung aller Arbeiten, die auf einen Zusammenhang zwischen Viskosität und chemischer Zusammensetzung Bezug haben, findet man bei Graham-Otto, Lehrbuch der Chemie I, 3, S. 467 bis 591, 1898 (3. Auflage).

Litteratur.

Poiseuille: Compt. rend. 15, 1167, 1842.
Couette: Ann. ch. et phys. (6) 21, 433, 1890; J. de phys. (2) 9, 560, 1890.
Jäger: Wien. Sitzungsber. 99, 860, 1890; 100, 268, 1891; 101, 920, 1892; 102, 253, 1893.
Warburg: Pogg. Ann. 140, 367, 1870.
Coulomb: Mém. de l'Institut. 3, 246, an. X, 1802.
Navier: Mém. de l'Institut. 4, 431, 1822.
Helmholtz u. Piotrowski: Wien. Ber. 50, 107, 1865; Helmholtz: Wiss. Abh. I, S. 172.
Umani: Nuovo Cim. (4) 3, 151, 1896.
Margules: Wien. Ber. 83 [2], 588, 1881.
Jones: Phil. Mag. (5) 37, 451, 1894.
A. Heydweiller: Wied. Ann. 55, 561, 1895; 59, 193, 1896.
Thorpe u. Rodger: Phil. Trans. 185, II. A., 397, 1895; Proc. R. Soc. 55, 148, 1895; 60, 152, 1897.
Stoel: Commun. Lab. of phys. Leiden. Nr. 2, 1891.
De Haas: Commun. Lab. of phys. Leiden. Nr. 12, 1894.
A. Duff: Phys. Rev. 4, 404, 1897.
Garvanoff: Wien. Ber. 103, II A, 873, 1894.
Koller: Wien. Ber. 98, 1890.
Perry: Phil. Mag. (5) 35, 1893.
Brodmann: Wied. Ann. 45, 159, 1891.
Dorn u. Völlmer: Wied. Ann. 60, 468, 1897. (Vergl. S. 473 bis 474.)
G. Tammann: (Überkaltete Flüssigkeiten) Zeitschr. phys. Chem. 28, 17, 1899.
Grätz: Wied. Ann. 34, 25, 1888.
Röntgen: Wied. Ann. 22, 510, 1884.
Warburg u. Sachs: Wied. Ann. 22, 518, 1884.
Cohen: Wied. Ann. 45, 666, 1892.
G. Tammann: (Einfluſs des Druckes) Wied. Ann. 69, 771, 1899.
Hausser: Diss. Stuttgart 1900; Beibl. 1900, S. 1253.
Arrhenius: Zeitschr. f. phys. Chem. 1, 285, 1887.
N. Petrow: Reibung der Flüssigkeiten und Maschinen (russ.); Ber. d. St. Petersburger technolog. Institats 1885 bis 1886; J. f. Ingenieure (russ.) 1883, Nr. 1, 2, 3, 4; J. d. russ. phys.-chem. Ges. 16, 14, 1884; Bull. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. zu St. Petersburg 5, 365, 1896.
N. E. Shukowski: Hydrodynamische Theorie der Reibung gut gefetteter fester Körper; J. d. russ. phys.-chem. Ges. 18, 209, 1886.
Smoluchowski: Wien. Sitzber. 102a, 1136, 1893.
Hagenbach: Pogg. Ann. 109, 385, 1860.
G. Knibbs: Royal Soc. N. S. Wales 1895 (3. Juli u. 2. Septbr.); Beibl. 21, 574, 575, 1897.
G. Pacher: Nuovo Cim. 10, 368, 1899.
Kann: Wien. Ber 106, 431, 1898.
G. Wetzstein: Wied. Ann. 68, 441, 1899.
O. E. Meyer: Wied. Ann. 2, 394, 1877.
Schweidler: Wien. Sitzungsber. 104, 273, 1895.
Mallock: Proc. R. Soc. 45, 126, 1888.
Reyher: Zeitschr. f. phys. Chem. 2, 744, 1888.
Wagner: Zeitschr. f. phys. Chem. 5, 30, 1890.
Kanitz: Zeitschr. f. phys. Chem. 22, 336, 1897.
H. Euler: Zeitschr. f. phys. Chem. 25, 537, 1898.

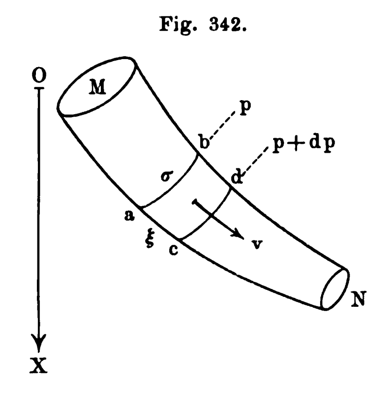
Lees: Phil. Mag. (6) 1, 128, 1901.
Moore: Physical Review. 3, 321, 1896.
Linebarger: Amer. J. of Sc. (4) 2, 331, 1896.
N. Shukowski: Apparat zur Bestimmung des Koeffizienten der Viskosität von Flüssigkeiten (russ.); Arbeiten d. phys. Sekt. d. Moskauer Ges. von Freunden der Naturf. (4), 1, 25, 1891.
Weitere Litteraturangaben finden sich in Landolts Tabellen, S. 303, 1894.

Neuntes Kapitel.

Bewegung der Flüssigkeiten.

§. 1 **Stationärer Bewegungszustand der Flüssigkeiten.** Erfolgen in einer gegebenen Flüssigkeit irgend welche Bewegungen, so bewegt sich jedes ihrer Teilchen auf einer gewissen Linie dahin, wobei sich die Geschwindigkeit des Teilchens im allgemeinen kontinuierlich ändert. Die Bewegung heifst stationär, wenn die Geschwindigkeit in einem beliebigen gegebenen Punkte des Raumes nach Gröfse und Richtung konstant ist; obige Geschwindigkeit kommt in den aufeinander folgenden Zeitmomenten den verschiedenen Flüssigkeitsteilchen zu, welche ununterbrochen hintereinander diesem Punkte zuströmen und deren Bewegung auf ein und derselben durch diesen Punkt gehenden Kurve erfolgt. Letztere Kurve, welche so lange konstant bleibt, als der stationäre Bewegungszustand andauert, heifst Stromlinie (Strömungskurve). Dementsprechend bezeichnen wir als Stromröhre den Flüssigkeitsstrahl, dessen Oberfläche der geometrische Ort aller Stromlinien ist, welche durch die Punkte irgend einer geschlossenen Kurve hindurchgehen.

Fig. 342.



Sei MN (Fig. 342) eine äufserst dünne Stromröhre, aus welcher wir die Schicht $abcd$, deren Geschwindigkeit v ist, herausschneiden. Machen wir die Annahme, auf die Flüssigkeit wirke erstlich die Schwerkraft in der vertikalen Richtung OX, wobei x die Koordinate der in Betracht gezogenen kleinen Flüssigkeitsmenge ist und zweitens ein Druck, der für die Grundfläche ab mit p bezeichnet werden möge. Ist *dann noch* ferner δ die Massendichte der Flüssigkeit, so besteht die

von Bernoulli abgeleitete Gleichung

$$\frac{1}{2} v^2 - gx + \frac{p}{\delta} = Const. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

welche für die ganze Zeit, während welcher sich die betrachtete Flüssigkeitsschicht in Bewegung befindet, ihre Geltung behält.

Das Studium der Bewegung von Flüssigkeiten unter verschiedenen Bedingungen bildet den Gegenstand einer besonderen Wissenschaft — der Hydrodynamik, welche aufserhalb des Rahmens dieses Buches liegt. Zu den interessantesten Problemen der Hydrodynamik gehört das Problem der Bewegung einer oder mehrerer Kugeln von konstantem oder auch variabelem Volumen in einer Flüssigkeit. Eines dieser Probleme beansprucht ein allgemeines Interesse und wir wollen es daher kurz besprechen.

Denken wir uns in einer Flüssigkeit zwei Hohlkugeln aus elastischem Material und nehmen wir an, dafs diese Kugeln pulsieren, d. h. dafs ihr Volumen abwechselnd wächst und wieder abnimmt und zwar möge die Dauer der einzelnen Pulsationen bei beiden Kugeln die gleiche sein. Es zeigt sich nun, dafs, wenn beide Pulsationen die gleiche Phase haben, die Kugeln sich gegenseitig anziehen; haben die Pulsationen der Kugeln entgegengesetzte Phasen, so stofsen sie sich ab. Dies ist so zu verstehen, dafs die Gegenwart der einen pulsierenden Kugel die Ursache ist, dafs auf die andere Kugel eine Kraft F wirkt, welche die Richtung der Zentrallinie der beiden Kugeln hat und entweder zu der ersten Kugel oder von ihr weggerichtet ist. Das merkwürdigste ist nun, dafs die Gröfse dieser Kraft durch die Formel

$$F = \pm q \frac{n_1 n_2}{4 \pi r^2} \quad \ldots \ldots \quad (1, a)$$

ausgedrückt wird, in welcher q die Dichte der Flüssigkeit, r die Distanz der Kugelzentren und n_1 und n_2 zwei Gröfsen sind, welche als Mafs der Intensität der Pulsationen gelten können: es sind dies die Differentialquotienten der Kugelvolumina nach der Zeit.

In Fig. 343 (a. f. S.) ist ein Apparat dargestellt, an welchem auf leicht verständliche Weise die scheinbare Wechselwirkung der beiden pulsierenden Kugeln gezeigt werden kann. Die eine Kugel ist unbeweglich, die andere an das Ende einer drehbaren horizontalen Röhre angebracht. Die Pulsationen werden durch eine Pumpe hervorgerufen, deren Kolben abwechselnd die Luft in den beiden elastischen Kugeln zusammenprefst und verdünnt. Diese Untersuchungen rühren von C. A. Bjerknes her.

Von Wichtigkeit für verschiedene physikalische Untersuchungen ist auch das Problem der gleichförmigen Bewegung einer in einer Flüssigkeit herabfallenden Kugel. Auf S. 647 haben wir bereits die

Formel (21, a) von Stokes angeführt, durch welche die Geschwindigkeit einer solchen konstant gewordenen Bewegung bestimmt wird. Wir wollen

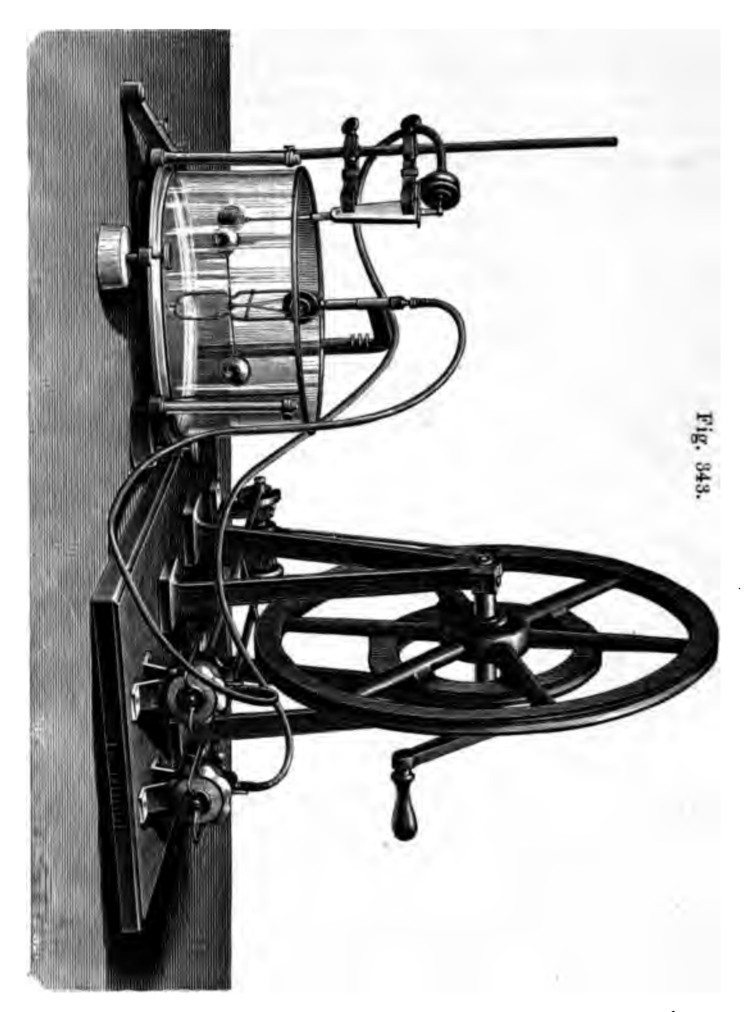


Fig. 343.

hinzufügen, dafs H. S. Allen durch neuere Untersuchungen (1900) zu einem verwickelteren Ausdrucke für jene Geschwindigkeit gelangt ist.

§ 2. Ausströmen von Flüssigkeiten aus einer kleinen Öffnung. Nehmen wir an das Gefäfs $ABCD$ (Fig. 344) sei bis MN mit Flüssigkeit gefüllt und es solle die Ausflufsgeschwindigkeit V aus einer in der Seitenwandung oder am Boden des Gefäfses befindlichen Öffnung bestimmt werden. Die Geschwindigkeit V mufs sich in dem

Maſse vermindern, als die Höhe des Flüssigkeitsniveaus im Gefäſse abnimmt. Um V für die gegebene Höhe des Niveaus MN zu bestimmen machen wir die Annahme, daſs wir auf irgend eine Weise (durch Hinzuströmenlassen) dieses Niveau unverändert erhalten, wodurch im Gefäſse ein stationärer Bewegungszustand eintritt. Wir können nunmehr Formel (1) in Anwendung bringen für die Stromröhre, welche an der Flüssigkeitsoberfläche oder einer anderen horizontalen Ebene MN beginnt. Es sei P_0 der Druck an der Ebene MN, s der Flächeninhalt von MN, v_0 die Geschwindigkeit in MN, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeitsoberfläche sich senkt, wenn kein Zufluſs stattfindet. Hat man ein weites Gefäſs mit einer kleinen Ausfluſsöffnung vom Flächeninhalt σ, so ist v_0 nur klein. Es läſst sich leicht einsehen, daſs

Fig. 344.

$$s v_0 = \sigma V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sein muſs. Den an der Ausfluſsöffnung wirkenden Druck wollen wir mit P bezeichnen, die Höhe der Flüssigkeitssäule oberhalb der Ausfluſsöffnung mit h. Gestützt auf Formel (1) wollen wir nunmehr den Ausdruck $\frac{1}{2} v^2 - gx + \frac{P}{\delta}$ für die in MN und die an der Öffnung σ liegenden Teilchen berechnen. Liegt der Anfangspunkt der Koordinatenachsen in MN, so ist $x = 0$ für MN und $x = h$ für σ:

$$\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{P_0}{\delta} = \frac{1}{2} V^2 - gh + \frac{P}{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man den Wert von v_0 aus Formel (2) ein, so kommt

$$V^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2}\right) = 2gh + 2 \frac{P_0 - P}{\delta},$$

$$V^2 = \frac{2gh + 2 \frac{P_0 - P}{\delta}}{1 - \frac{\sigma^2}{s^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Betrachten wir nun einige Sonderfälle:

1. Die Flüssigkeit strömt unter starkem Drucke P_0 aus dem einen Gefäſs in ein anderes, in welchem der Druck P herrscht. Hier kann man die Wirkung der Schwere vernachlässigen; σ ist im Vergleiche zu s sehr klein. Aus Formel (4) ergiebt sich dann

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\delta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Formel ist identisch mit der Formel (14) auf S. 510, wo nur die Bezeichnungen andere sind.

II. Die Drucke P_0 und P sind einander gleich, σ ist sehr klein. Es ist dies der Fall, wo eine Flüssigkeit aus einer Seitenöffnung eines offenen Gefäfses ausströmt; es ist

$$V = \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Formel, welche das aus der Elementarphysik bekannte Torricellische Theorem (1643) ausdrückt, stellt sich somit als Spezialfall des allgemeineren Ausdrucks (4) dar; sie zeigt, dafs die Geschwindigkeit V die gleiche ist wie beim freien Fall aus einer Höhe h. Auf den experimentellen Nachweis des Torricellischen Theorems soll hier nicht eingegangen werden.

§ 3. **Kontraktion des Strahls.** Die Flüssigkeitsmenge Q, welche in der Zeiteinheit aus einer kleinen Öffnung ausströmt, ist nicht gleich $V\sigma$, sie ist vielmehr beträchtlich geringer und wird durch die Formel

$$Q = \varepsilon V \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

bestimmt, wo ε ein echter Bruch ist, nämlich

$$\varepsilon = 0{,}62 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

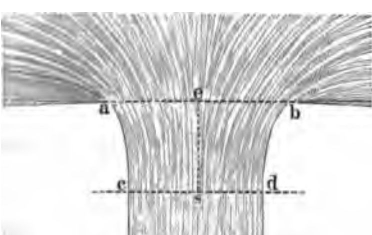
Es erklärt sich dies aus dem Umstande, dafs der Strahl sich beim Verlassen der Ausflufsöffnung kontrahiert und der Flächeninhalt seines Querschnitts nur 0,62 vom Flächeninhalt σ der Ausflufsöffnung beträgt. Diese berühmte „contractio venae" ist bereits von Newton beobachtet worden. Nach der Theorie von Bayer (1848) ist

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}617,$$

was mit der Beobachtung gut übereinstimmt. Die Kontraktion der Strahlen entsteht aus zweierlei Ursachen.

Erstens strömen die Teilchen der Ausflufsöffnung von allen Seiten her in krummen Linien zu (Fig. 345), infolgedessen die Randteilchen nicht in senkrechter Richtung zur Gefäfswandung die Öffnung verlassen. Zweitens wirkt die Oberflächenspannung auf den Strahl an seiner Bildungsstelle wie ein komprimierender Ring. Isarn (1875) hat gezeigt, dafs sich die Kontraktion eines Wasserstrahls beträchtlich verringert und die ausfliefsende Wassermenge dementsprechend vermehrt, wenn man in der Nähe der Ausflufsöffnung Äther verdunsten läfst,

Fig. 345.



infolgedessen, wie wir gesehen haben (S. 568), die Oberflächenspannung abnimmt.

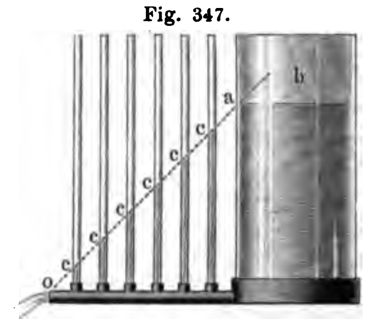
§ 4. Konstitution eines Flüssigkeitsstrahls. In der Nähe der Ausflußöffnung ist ein Flüssigkeitsstrahl durchsichtig und überall gleich dick, in einiger Entfernung von der Öffnung aber wird er undurchsichtig und sein Querschnitt wird periodisch größer und kleiner. Der Strahl hört nämlich an dieser Stelle auf kontinuierlich zu sein und zerfällt in einzelne große Tropfen, welche gewissermaßen Pulsationen ausführen, d. h. während des Niederfallens die in Fig. 346 dargestellten Formen annehmen, die zwischen den Grenzformen langgestreckter und abgeplatteter Rotationsellipsoide liegen. Zwischen je zwei großen Tropfen befindet sich ein kleines Tröpfchen. Beobachten kann man diese Tropfen z. B., wenn man den Strahl durch einen elektrischen Funken beleuchtet, oder mittels Momentphotographie des Strahls, mittels einer stroboskopischen Scheibe u. s. w. Der Zerfall des Strahls in Tropfen erklärt sich aus jenem labilen Gleichgewichte eines Flüssigkeitscylinders, welches auf S. 575 erwähnt wurde. Dort ist auch bereits auf die Ursache hingewiesen worden, weshalb sich die kleinen Tröpfchen in den Zwischenräumen zwischen den großen bilden. Lullin hat die Erscheinungen untersucht, welche beim Auftreffen eines Flüssigkeitsstrahls auf eine Flüssigkeitsmasse derselben Art zu stande kommen.

Fig. 346.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

§ 5. Das Strömen einer Flüssigkeit durch Röhren. Wenn eine Flüssigkeit unter Gefälle eine horizontale Röhre durchströmt, so ist die Größe des hydrostatischen Druckes in derselben eine lineare Funktion des Abstandes vom Ende der Röhre; wie aus Fig. 347 ersichtlich, kann man diese Erscheinungen an offenen, vertikalen, seitlich angebrachten Röhren wahrnehmen. Ist die Druckdifferenz am Anfange und Ende der Röhre gleich P und die Länge der Röhre gleich L, so nennt man die Größe $J = P : L$, d. h. die Abnahme des Druckes auf der Längeneinheit den Druckabfall. Die Geschwindigkeit V

Fig. 347.



der Strömung ist in allen Teilen einer Röhre von konstantem Querschnitt selbstverständlich die gleiche; sie hängt von der Gröfse des Gesamtwiderstandes R ab, welchen die Flüssigkeit im Innern der Röhre erfährt.

Für weite Röhren ist es nicht möglich die Gröfse der Geschwindigkeit V zu berechnen, da diese Aufgabe äufserst kompliziert ist. Für cylindrische Röhren sind verschiedene empirische Formeln in Vorschlag gebracht worden, wie z. B. die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} D &= aV + bV^2 \\ D &= aV^{\frac{3}{2}} + bV^2 \\ D &= cV^k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

in denen D der Röhrendurchmesser, a, b, c und k verschiedene Konstanten sind, von denen übrigens einige Autoren glauben, dafs sie selbst vom Durchmesser D abhängen. Mertsching hat gefunden, dafs für Wasser und Petroleum die erste obiger Formeln mit den Beobachtungsresultaten übereinstimmt und dafs für beide Flüssigkeiten der Koeffizient a mit Zunahme des Röhrendurchmessers zunimmt, der Koeffizient b dagegen abnimmt.

Für engere Röhren wird die Geschwindigkeit V durch eine Formel wiedergegeben, die sich von Formel (4) dadurch unterscheidet, dafs im Nenner noch eine gewisse Gröfse R auftritt. So ist z. B. für den Fall, auf welchen sich Formel (5) bezieht

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\delta(1 + R)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Für den Fall, dafs die Flüssigkeit aus einem offenen Gefäfse durch eine horizontale Röhre strömt, nimmt die Torricellische Formel (6) folgende Gestalt an

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Für eine cylindrische Röhre ist

$$R = k\frac{L}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Nach Weissbach hat k folgenden Wert

$$k = 0{,}014\,39 + \frac{0{,}017\,16}{\sqrt{V}} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

hängt somit selbst von der Geschwindigkeit V ab. Neuere Untersuchungen von Hamilton Smith (1884) haben zu einer noch komplizierteren Formel geführt.

Für Kapillarröhren läfst sich die Frage nach der Ausflufsgeschwindigkeit der Flüssigkeiten vollkommen lösen. Die erste sorg-

fältige Experimentaluntersuchung hierüber stammt von Poisseuille, welcher aus seinen Versuchen fand, dafs das Volumen Q einer Flüssigkeit, welche in der Zeit T eine Kapillarröhre durchströmt, proportional dem Drucke P ist und nicht etwa proportional der Quadratwurzel aus P, wie dies für weitere Röhren gilt [vergl. (10)]. Ferner fand er, dafs das Volumen Q umgekehrt proportional der Röhrenlänge L, proportional der vierten Potenz des Röhrendurchmessers D und proportional der Zeit T ist. Somit hat die Poisseuillesche Formel, die bereits früher erwähnt wurde [vergl. (9) auf S. 643], folgende Form

$$Q = k \frac{PD^4}{L} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Auf S. 643 war noch die genauere theoretische Formel

$$Q = \frac{\pi P}{8 \eta L} \{R^4 + 4 \gamma R^3\} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

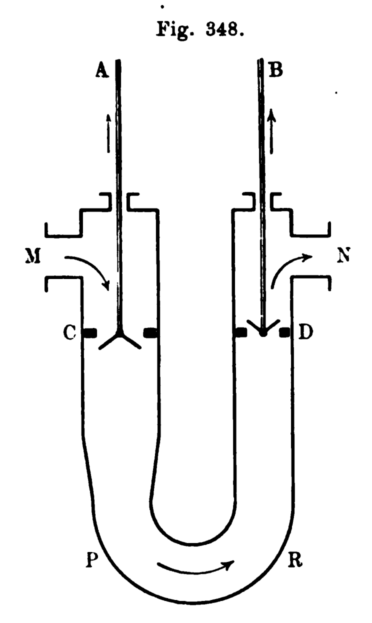
angegeben worden, in welcher η und γ den Reibungs- resp. Gleitungskoeffizienten bedeuten. Für $\gamma = 0$ folgt hieraus die Poisseuillesche Formel. Der Faktor k in Formel (14) ist umgekehrt proportional η und nimmt bei Temperaturerhöhung schnell zu, da η in diesem Falle, wie wir auf S. 647 sahen, schnell abnimmt. Poisseuille selbst hat aus seinen Versuchen für Wasser folgende Formel abgeleitet

$$k = k_0 (1 + 0{,}033\,68\, t + 0{,}000\,221\, t^2) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

§ 6. **Die Woislawsche Pumpe.** Die Einrichtung und Wirkungsweise von Wasserpumpen verschiedener Art kann in diesem Buche nicht betrachtet werden, überhaupt sind aus demselben Fragen der Technik ausgeschlossen worden. Eine Ausnahme sei jedoch hinsichtlich der Woislawschen Pumpe gestattet, da dieselbe von nicht geringem Interesse sein dürfte. Die beifolgende Zeichnung ist der von A. Mitinski (1900) gegebenen Beschreibung entlehnt. Bei den gewöhnlichen Wasserpumpen befindet sich die von einem zum anderen Orte beförderte Wassermasse abwechselnd in Bewegung und in Ruhe, je nachdem nach welcher Seite sich im gegebenen Moment der Kolben bewegt. Ohne weitere Rechnungen ist es verständlich, dafs es viel vorteilhafter wäre, wenn der Wasserstrahl, ohne zum Stillstand zu kommen, die Pumpe durchfliefsen und sich dabei gröfstenteils dank seiner Trägheit bewegen würde, so dafs die Kolben nur dazu zu dienen hätten, die stationäre und kontinuierliche Bewegung aufrecht zu erhalten. Diesen Anforderungen entspricht die in Fig. 348 (a. f. S.) schematisch dargestellte Woislawsche Pumpe. Sie besteht aus zwei einander parallelen Cylindern von ungleicher Weite, welche durch die Röhre PR miteinander in Verbindung stehen. Die Flüssigkeit wird durch M angesogen und nach N getrieben. Durch die oberen verschlossenen Enden der Cylinder führen die Kolbenstangen A und B

der Kolben *C* und *D*, die durch sich nach verschiedenen Seiten öffnende Ventile geschlossen werden. Beide Kolben bewegen sich gleichzeitig aufwärts und abwärts. Bei der Abwärtsbewegung schliefst sich das Ventil in *C* und der betreffende Kolben stöfst die Flüssigkeit in der Pfeilrichtung weiter; der Kolben *D*, dessen Ventil hierbei offen bleibt, verhindert die Bewegung der Flüssigkeit nicht. Gehen darauf beide Kolben nach oben, so öffnet sich das Ventil in *C*; die Flüssigkeit bewegt sich der Trägheit gemäfs weiter und der Kolben *D*, dessen Ventil sich schliefst, befördert diese Bewegung des weiteren. Auf solche Weise wird offenbar ein kontinuierliches Strömen der Flüssigkeit durch die Pumpe erzielt, wobei das Wasser in der Röhre *PR* die Hauptrolle spielt, da es durch sein Beharrungsvermögen die Gleichförmigkeit der Strömung aufrecht erhält. Daher schlägt auch Mitinski vor, die Röhre *PR* geradezu als dynamischen Regulator anzusehen, der die Gleichförmigkeit der Strömung bewirkt. Die Ventile *C* und *D* werden wahrscheinlich sich nicht einmal vollständig schliefsen, da sie ja nur die schon vorhandene Bewegung aufrecht zu erhalten haben.

Fig. 348.



§ 7. **Wellen und Wirbelringe.** Wie bereits oben erwähnt, bildet die Hydrodynamik einen besonderen Teil der Mechanik und kann in diesem Buche keine Aufnahme finden. Doch wollen wir hier noch einige Erscheinungen von besonderer Wichtigkeit kurz erwähnen.

A. Wellen. Die schwingende Bewegung der Oberflächenteilchen einer Flüssigkeit ruft die allbekannte Erscheinung sich ausbreitender Wellen hervor, wie sie besonders sorgfältig von den Gebrüdern E. und W. Weber (1825) untersucht worden ist. Die an der Oberfläche selbst befindlichen Teilchen bewegen sich, je nach den Ursachen, welche die Wellenbewegung hervorrufen, in vertikalen Geraden oder in geschlossenen, in vertikalen Ebenen liegenden Kurven. Diese Bewegungen machen selbst Teilchen mit, deren Tiefe unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche die Höhe der Wellenberge um das 350 fache übertrifft. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *V* der Wellen, d. h. die Geschwindigkeit ihrer scheinbaren fortschreitenden Bewegung hängt

von der Tiefe h der Flüssigkeitsschicht ab, an deren Oberfläche sich die Wellen bilden, ferner von der Wellenlänge λ, die man hier auch Wellenbreite nennen kann, und endlich von der Dichte δ der Flüssigkeit und der Oberflächenspannung α derselben. Die allgemeinste Formel für V hat folgende Gestalt

$$V^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\delta\lambda}\right)\frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

wobei g die Beschleunigung der Schwerkraft darstellt und k folgenden Wert hat

$$k = \frac{2\pi h}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Nach dem C. G. S.-System ist $g = 981$, für Wasser ist $\delta = 1$. Ferner hatten wir für Wasser auf S. 607 die Werte von α kennen gelernt, welche den verschiedenen Temperaturen entsprechen. Nimmt man $\alpha = 7{,}4 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$, so erhält man nach der Regel für den Übergang von einem Maſssystem zum anderen $\alpha = 0{,}072$ C. G. S.-Einheiten.

Betrachten wir hier zwei interessante Spezialfälle.

I. Die Tiefe h ist sehr groſs. Dann ist k sehr groſs und daher

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha g}{\delta\lambda} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Für Wasser ist $\delta = 1$, also

$$V^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Gröſse V hat ein Minimum für $\lambda = 2\pi\sqrt{\alpha} = 2\pi\sqrt{0{,}074}$ $= 1{,}7$ cm, dasselbe ist gleich $23 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Kürzere sowohl wie längere Wellen bewegen sich schneller. Die Versuche von Matthiesen (1887) und Ahrendt (1888) haben obige Formel vollkommen bestätigt.

Für sehr kurze Wellen ist $e^{-k} = 0$, daher nach Formel (17)

$$V = \sqrt{\frac{2\pi\alpha g}{\delta\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

d. h. $\lambda V^2 = Const.$ Setzt man $V = N\lambda$, so kommt

$$\alpha = \frac{N^2\lambda^3\delta}{2\pi g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21,\text{a})$$

Diese Formel war bereits auf S. 606 cf. (38,a) angeführt worden.

Ist die Oberflächenspannung α einer Flüssigkeit sehr gering, so folgt aus Formel (20)

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

d. h. $\frac{V^2}{\lambda} = Const.$

II. Die Tiefe h ist gering. Für Wellen, deren Länge λ im Vergleich zur Tiefe h grofs ist, ist k sehr klein. In diesem Falle ist der letzte Faktor in Formel (17) gleich $k = \frac{2\pi h}{\lambda}$ und es folgt aus ebendieser Formel (bei grofsem λ)

$$V = \sqrt{gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Bewegung der Luft (Wind) an der Flüssigkeitsoberfläche kann auf Form und Geschwindigkeit der Wellen einen beträchtlichen Einflufs ausüben.

Es sei noch bemerkt, dafs die hier gegebenen Gröfsen V die Geschwindigkeiten eines Wellenzuges bedeuten. Die Geschwindigkeit einer einzelnen Welle ist gröfser.

B. Wirbel. Von Helmholtz stammt die Lehre von den Wirbelbewegungen im Inneren einer idealen Flüssigkeit, deren Viskosität gleich Null ist. Er hat die folgende Reihe von Lehrsätzen bewiesen.

Drehungs- oder Wirbelbewegungen können in einer idealen Flüssigkeit weder entstehen, noch vergehen. Sind sie einmal vorhanden, so müssen sie sich bis in Ewigkeit erhalten.

Die Teilchen, welche an der Wirbelbewegung teilnehmen, nehmen an derselben immer teil, d. h. wenn die Wirbelbewegung sich von einer Stelle der Flüssigkeit zu einer anderen bewegt, so bewegen sich hierbei auch die Teilchen, welche diese Bewegung mitmachen.

Der geometrische Ort für die Rotationsachsen der Teilchen ist eine Linie, welche Wirbellinie heifst; alle Teilchen, welche auf einer Wirbellinie liegen, bleiben beständig auf derselben. Zieht man durch sämtliche Punkte der Peripherie einer kleinen Fläche Wirbellinien, so erhält man einen Wirbelfaden. Ein solcher Faden kann nicht frei in der Flüssigkeit endigen; er mufs entweder an der Flüssigkeitsoberfläche endigen oder er mufs geschlossen sein. Im letzteren Falle hat man einen Wirbelring. Als Beispiel können die bekannten Ringe aus Tabaksrauch dienen. Ein Wirbelfaden kann nicht durchschnitten werden; zwei Wirbelfäden können sich nicht schneiden, daher kann sich eine im Wirbelfaden etwa vorhandene Schlinge nicht lösen. In jedem Wirbelfaden ist das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung in den Flächeninhalt des Fadenquerschnittes längs dem Faden eine konstante Gröfse; man kann sie die Wirbelkraft des Fadens nennen. Ein Wirbelfaden wirkt auf ein Teilchen einer aufserhalb desselben befindlichen Flüssigkeit derart ein, dafs sich letzteres mit einer Geschwindigkeit bewegen mufs, die nach Gröfse und Richtung

einer Kraft gleichkommt, mit welcher nach dem Laplaceschen Gesetze ein elektrischer Strom auf einen Magnetpol wirkt. Hierbei mufs der elektrische Strom am Wirbelfaden entlang fliefsen und eine Spannung haben, die gleich der Wirbelkraft des Fadens ist, während der Magnetpol die Einheit der Spannung besitzt und sich an der Stelle des in Betracht gezogenen Teilchens befindet. Die Wirbellinien wirken aufeinander derart ein, dafs sie fortschreitende und Drehungsbewegungen verschiedener Art hervorrufen. Ein einzelner Wirbelring hat eine gleichförmig fortschreitende Bewegung in der Richtung, in welcher sich die Flüssigkeit im Inneren des Ringes bewegt. In einer mit Viskosität begabten idealen Flüssigkeit können Wirbelbewegungen sowohl entstehen, als auch verschwinden. Die Grundeigenschaft der Wirbel (in einer idealen Flüssigkeit), nämlich ihre Unzerstörbarkeit, hat W. Thomson (Lord Kelvin) zu seiner berühmten Theorie der Wirbelatome geführt, nach welcher die Atome Wirbel sind, die in einem das ganze Universum füllenden Medium, das die Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit besitzt, existieren.

Litteratur.

Torricelli: Opera geometrica, Teil 2, Florenz 1643.
Bernoulli: Hydrodynamica. Argentorati (Strafsburg) 1738.
Euler: N. Comm. Ac. Petrop. (1) **14**, 358, 1759.
Lagrange: Mécan. analyt. 3 éd., **2**, 250.
V. Bjerknes: Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes. Leipzig 1900; Rapports au Congrès Internat. de Physique **1**, 251, 1900.
H. S. Allen: Phil. Mag. (7) **50**, 323, 519, 1900.
Bayer: Crelles Journ. f. Baukunst **25**; Compt. rend. **26**, 1848.
Isarn: J. de phys. (1) **4**, 167, 1875.
Mertsching: Von der Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren (russ.) St. Petersburg 1889; Wied. Ann. **39**, 312, 1890.
Lullin: Arch. des sc. phys. et natur. (4) **2**, 201, 1896.
Hamilton Smith: Dingl. polyt. Journ. **252**, 89, 1884.
Poisseuille: Mém. des savants étrangers **9**, 1846; Compt. rend. **15**, 1842.
E. H. und W. Weber: Wellenlehre. Leipzig 1825.
L. Matthiesen: Wied. Ann. **32**, 626, 1887; **38**, 118, 1889.
Ahrendt: Exners Repert. d. Phys. **24**, 318, 1888.
Helmholtz: Crelles Journ. **55**, 25, 1858; Wiss. Abh. **1**, 101.
W. Thomson: Trans. R. Soc. Edinb. **25**, 217, 1867.
Kirchhoff: Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelles Journ. **70**, 1869.
Rayleigh: Resistance of fluids. Phil. Mag. (5) **2**, 430, 1876.
A. Mitinski: Die Woislawsche Pumpe (russ.) St. Petersburg 1900.

Zehntes Kapitel.

Kolloide.

§ 1. **Kolloide.** Graham hat zuerst darauf hingewiesen, dafs es einen besonderen Aggregatzustand giebt, der sich vom flüssigen und festen Zustande unterscheidet; er nannte ihn den kolloidalen Zustand. Er stellte einander die Kolloide und Krystalloide gegenüber, die nach seinen eigenen Worten „zwei verschiedene Welten der Materie" repräsentieren. Die Grundeigenschaft der Kolloide besteht in ihrer Unfähigkeit zu krystallisieren, während die Krystalloide leicht krystallisieren. Da dies indes nicht das einzige Unterscheidungsmerkmal ist und ein und derselbe chemische Körper, wie z. B. Silber, bisweilen die Eigenschaften eines Krystalloids, bisweilen diejenigen eines Kolloids haben kann, so hat man wohl von einem besonderen „kolloidalen Zustande" dieser oder jener Substanz zu sprechen. Unter anderem haben die Lösungen von Kolloiden sehr oft eine gallertartige Konsistenz und stellen ein Mittelding zwischen einem flüssigen oder festen Körper dar.

Zu den Kolloiden gehören Eiweifs, Albumin, Stärke, Dextrin, Gelatine, Leim, Karamelzucker, Glykogen, Gummi arabicum, Agar-agar (japanische pflanzliche Gelatine), Tannin, Kieselsäure, Eisenhydroxyd, Hydrate der Kiesel- und Thonerde, Wolframsäure (H_2WO_4) u. a.

Die Fähigkeit bei Erwärmung oder bei Berührung mit einigen Substanzen, namentlich Elektrolyten, zu gerinnen ist ebenfalls ein Kennzeichen des kolloidalen Zustandes.

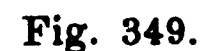
Faraday machte zuerst die Beobachtung, dafs man bei einigen chemischen Reaktionen, welche mit Ausscheidung eines Metalles verbunden sind, bisweilen herrlich gefärbte durchsichtige, dem Anscheine nach homogene Flüssigkeiten erhält. Viele Forscher haben sich mit dem Studium dieser Flüssigkeiten beschäftigt, wie Carey Lea, Stark, Zsigmondy, Bredig (Cd, 1900). Nach der Ansicht von Carey Lea und von Zsigmondy haben wir es hier mit einer Lösung von kolloidalem Metall zu thun. Dagegen haben Barus und Schneider (1891), Linder und Picton (1892 bis 1895), Stöckl und Vanino (1899), sowie Bredig (1900) zu beweisen gesucht, dafs man es hier mit einer äufserst feinen Verteilung des Metalles im Inneren der Flüssigkeit, nicht aber mit einer Lösung zu thun hat. Die genannten Autoren haben auf den Einflufs der Erwärmung (fast das gesamte Metall scheidet sich aus), auf die optischen Eigenschaften jener Flüssigkeiten (elliptische Polarisation der in der Flüssigkeit zerstreuten

Strahlen, vergl. Band II) und auf ihre elektrischen Eigenschaften hingewiesen, welche sämtlich beweisen sollen, daſs man es nicht mit Lösungen zu thun hat.

§ 2. Diffusion und Osmose der Kolloide. Dialyse. Auf S. 629 war bereits erwähnt worden, daſs Albumin und Karamel in nur sehr geringem Maſse die Fähigkeit besitzen aus der Lösung in reines Wasser hineinzudiffundieren, mit dem sie zur Berührung gebracht sind. Hierin besteht nun auch ein Hauptkennzeichen des kolloidalen Zustandes: alle Kolloide diffundieren sehr langsam, nicht nur bei direkter Berührung mit einer anderen Flüssigkeit, sondern auch durch kolloidale Membranen hindurch, wie durch Papier, Pergament, Tierblase u. s. w.

Umgekehrt lassen die Kolloide sich sehr leicht von Krystalloiden durchdringen. Gieſst man eine erwärmte Lösung von Kupfervitriol und Gelatine in ein hohes Glasgefäſs und läſst sie erkalten, d. h. den Zustand einer recht festen Gallerte annehmen und erzeugt über derselben eine ebensolche Gallerte, die indes kein Kupfervitriol enthält, so dringt die blaue Färbung aus dem unteren Teile des Gefäſses allmählich nach oben empor. Eben dasselbe wird beobachtet, wenn man feste Krystalle in eine erstarrte Gelatinelösung einbettet.

Auf der geringen Diffusionsfähigkeit der Kolloide beruht eine besondere Methode Krystalloide von Kolloiden aus einer Lösung, welche beide enthält, abzuscheiden. Diese Methode heiſst Dialyse und der hierzu benutzte Apparat „Dialysator“; er ist in Fig. 349 abgebildet. Das Gefäſs BC enthält reines Wasser, die Glasglocke A, welche sich auf einige Querhölzchen stützt, enthält die Flüssigkeit, welche der Dialyse unterworfen werden soll; sie ist unten statt durch einen Boden, durch ein Blatt aus ungeleimtem Papier verschlossen, welches auf kurze Zeit in Schwefelsäure getaucht war. Feuchtet man ein solches Papierblatt an, so reckt es sich und wird halbdurchsichtig; bisweilen überzieht man das Papier mit einer Eiweiſsschicht, die man durch Erwärmen gerinnen läſst. Durch eine solche Papiermembran hindurch diffundieren die Krystalloide ziemlich schnell, während die Kolloide in der Lösung verbleiben.


Fig. 349.



Wie die Versuche von Pfeffer (1877) mit einer halbdurchlässigen Membran aus Ferricyankupfer (vergl. S. 634) gezeigt haben, ist der

osmotische Druck (S. 633) gelöster Kolloide sehr gering. So ist z. B. der osmotische Druck einer Gummiarabikumlösung 10 mal geringer, als der Druck einer Zuckerlösung von der gleichen prozentischen Konzentration. Nach der Formel $pv = 0{,}0815\,T$, vergl. (8) auf S. 638, kann man das Volumen eines gelösten Grammmoleküls eines Kolloids und somit sein Molekulargewicht finden. Eine Lösung von 24,67 g H_2WO_4 in einem Liter Wasser giebt bei 17° einen Druck von $p = 25{,}2$ cm Quecksilbersäule. Hieraus erhält man leicht das Molekulargewicht 1700, aus dem sich die Konstitution des Moleküls $(H_2WO_4)_7$ ergiebt.

Aus den Versuchen von Tammann (1887) ergiebt sich, dafs die Spannung des Dampfes einer Kolloidlösung sich nur wenig von der Dampfspannung reinen Wassers unterscheidet (vergl. S. 636); aus den Versuchen von Sabanejew und Alexandrow (1892) folgt, dafs gelöste Kolloide den Gefrierpunkt des Wassers nur in sehr geringem Mafse erniedrigen.

Die Messungen des osmotischen Druckes ergeben für viele Kolloide, wie bereits erwähnt, sehr grofse Werte des Molekulargewichtes; dieselben übersteigen 30 000 für die Stärke, Kieselsäure, Eisenoxyd u. a. Kolloide dieser Art nennt Sabanejew höhere oder typische Kolloide. Die komplizierte Zusammensetzung ihrer Moleküle hat die grofse Veränderlichkeit ihrer Eigenschaften zur Folge, die wahrscheinlich durch Änderungen im Bau der Moleküle hervorgerufen wird. Läfst man die Lösung eines typischen Kolloids durch Abkühlen erstarren und erwärmt sie hierauf wieder, so wird das Kolloid unlöslich und scheidet sich aus der Lösung aus, während Kolloide mit geringerem Molekulargewichte nach Erwärmung ihrer festgewordenen Lösung von neuem eine durchsichtige Lösung geben (Ljubawin, 1890).

De Metz hat den Kompressionskoeffizienten einiger Kolloide bestimmt, vergl. S. 555; für $10^6\beta$ fand er folgende Werte:

	δ	$10^6\beta$
Lösung von Gummiarabikum in Wasser	1,041	44,59
Gelatineleim	1,005	48,49
Lösung von Kanadabalsam in Wasser	0,950	57,21
Lösung von Metaphosphorsäure in Wasser . . .	1,545	19,663

Hier bedeutet δ die Dichte der betreffenden Substanz.

Litteratur.

Graham: Ann. de ch. et phys. (3) 65, 1862; Lieb. Ann. 121, 1, 1862.
Pfeffer: Osmotische Untersuchungen. Leipzig 1877.
Sabanejew u. Alexandrow: J. d. russ. phys.-chem. Ges. 23, Chem. Teil, 7, 1891.

Tammann: Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. **35**, Nr. 9, 1887.
Ljubawin: Chem. Zentralbl. **1**, 515, 1890.
De Metz: Wied. Ann. **41**, 663, 1890.
Faraday: Pogg. Ann. **101**, 316, 1857.
J. Stark: Wied. Ann. **65**, 301, 1898; **68**, 117, 1899.
Zsigmondy: Lieb. Ann. **301**, 29, 1898; Zeitschr. f. Elektrochemie **4**, 546, 1898; Zeitschr. f. phys. Chem. **33**, 63, 1900.
Barus u. Schneider: Zeitschr. f. phys. Chem. **8**, 278, 1891.
Barus: Sill. Journ. **48**, 451, 1894.
Carey Lea: Zeitschr. f. anorg. Chem. **7**, 341; Sill. Journ. **48**, 343, 1894.
K. Stöckl u. L. Vanino: Zeitschr. f. phys. Chem. **30**, 98, 1899.
Linder u. Picton: Zeitschr. f. phys. Chem. **9**, 523, 1892; **17**, 164, 1895; Journ. of chem. Soc. **61**, 137, 148, 1892; **67**, 63, 1895.
G. Bredig: Zeitschr. f. phys. Chem. **32**, 127, 1900; Zeitschr. f. angew. Chem. 1898, S. 952.
Lottermoser: Phys. Zeitschr. **1**, 148, 1900.

Sechster Abschnitt.

Lehre von den festen Körpern.

Erstes Kapitel.

Die Materie im festen Zustande.

§ 1. Charakterisierung des festen Zustandes der Materie. Die festen Körper unterscheiden sich von den flüssigen vor allen Dingen dadurch, dafs sie eine bestimmte Form haben, welche im allgemeinen nur durch äufsere, auf den Körper einwirkende Kräfte verändert werden kann. Die flüssigen Körper besitzen hingegen, wie wir gesehen haben, keine bestimmte Form und behalten unter gegebenen Bedingungen nur das ihnen eigentümliche Volumen bei. Hieraus folgt, dafs den gegebenen Bedingungen ein bestimmter mittlerer Abstand der Flüssigkeitsteilchen voneinander entspricht, zu dessen Änderung (Verminderung) die Einwirkung verhältnismäfsig beträchtlicher äufserer Kräfte erforderlich ist. Eine Änderung in der gegenseitigen Lage der Teilchen aber kann selbst durch sehr kleine äufsere Kräfte in unbegrenztem Mafse erfolgen. Je gröfser die innere Reibung oder Viskosität einer Flüssigkeit ist, um so schwerer kann eine Änderung in der inneren Anordnung der Teilchen erfolgen. Flüssigkeiten, deren innere Reibung sehr beträchtlich ist, stellen gewissermafsen einen Übergang zu den festen Körpern dar, in denen nicht blos der mittlere Abstand, sondern auch die relative Lage der Teilchen im allgemeinen keine kontinuierlich wachsenden Änderungen durch Einwirkung minimer Aufsenkräfte erfahren kann. Übrigens giebt es feste Körper, in denen gewissermafsen ein Rest von den Eigenschaften einer Flüssigkeit übrig geblieben ist, und die eine bestimmte, freilich aufserordentlich grofse Zähigkeit (Viskosität) besitzt. Abgesehen davon, dafs durch Einwirkung aufserordentlich grofser Aufsenkräfte die Mehrzahl und vielleicht auch alle festen Körper, wie wir sehen werden, eine

gewisse Verschiebbarkeit der Teilchen — ein Fliefsen — zeigen, nimmt man bei einigen Körpern eine, wenn auch sehr langsame Formänderung wahr, falls auf sie selbst sehr kleine Kräfte **andauernd** einwirken. Als Beispiel sei darauf hingewiesen, dafs ein Glas- oder Siegellackstäbchen, welches in horizontaler Lage nahe seinen Enden unterstützt ist, eine beständige Formänderung erfährt und sich durch Einwirkung einer verhältnismäfsig sehr geringen Kraft, nämlich derjenigen seines Eigengewichtes, ganz allmählich krümmt.

Äufsere Kräfte rufen bestimmte Verschiebungen der Teilchen und somit Formänderungen eines festen Körpers hervor, die zugleich mit diesen Kräften vollkommen oder teilweise verschwinden. Die hierhergehörigen Erscheinungen der Elasticität werden in einem besonderen Kapitel betrachtet werden.

Wie für die gasförmigen und flüssigen Körper, so wird auch für die festen Körper die Annahme gemacht, dafs ihre Teilchen sich nicht in Ruhe, sondern im Zustande äufserst schneller und verwickelter Bewegung befinden, wobei sich jedoch jedes einzelne Teilchen nicht aus dem kleinen Raumteile entfernt, welcher seine mittlere Lage umgiebt. Man hat indes Gründe, anzunehmen, dafs auch für die festen Körper gewisse, wenn auch sehr langsame Änderungen in der Mittellage der Teilchen und sogar ohne Einwirkung äufserer Kräfte eintreten. Die Anordnung der Teilchen eines festen Körpers kann nämlich sehr verschieden und dementsprechend auch die sogenannte „**Struktur**“ eine sehr verschiedene sein. Es ist hier die **physikalische** Struktur gemeint, im Gegensatze zu der chemischen Struktur, welche durch Anordnung der Atome im Moleküle selbst bedingt ist. Bei den Flüssigkeiten findet man nichts, was etwa der physikalischen Struktur entsprechen könnte, ihre Eigenschaften sind hinreichend definiert durch ihre chemischen Bestandteile und die physikalischen Bedingungen. **Die Eigenschaften der festen Körper hängen dagegen noch in jedem gegebenen Falle von der speziellen Anordnung ihrer Teilchen, d. h. von der Struktur der Körper ab.** Es giebt Fälle, wo ohne merkliche Wirkung von Aufsenkräften sich diese oder jene Eigenschaften fester Körper allmählich verändern. Dies kann nur durch eine allmähliche, wenn auch sehr langsame Strukturänderung erklärt werden, welche ihrerseits darauf hindeutet, dafs eine Umordnung der Teilchen stattgefunden hat, also letztere ihre Mittellagen verlassen haben. Eine solche Strukturänderung wird durch äufsere Ursachen begünstigt, welche selbst zeitweilig die Beweglichkeit der Teilchen erhöhen, wie z. B. durch Erschütterung. Als Beispiel sei hier daran erinnert, dafs die Achsen an Eisenbahnwagen ihre ursprüngliche faserige Struktur allmählich mit einer spröderen, krystallinischen vertauschen.

Aufsenkräfte, welche die Anordnung der Teilchen und dadurch

die Form eines Körpers zu ändern suchen, treffen auf einen Widerstand, welcher jede Änderung des Abstandes der Teilchen voneinander zu verhindern sucht. Diese Widerstandskräfte, von denen in den vorhergehenden Abschnitten wiederholt die Rede war, heifsen intramolekulare oder Kohäsionskräfte. Sie sind auch dann vorhanden, wenn die Anordnung der Teilchen die normale ist und verhindern es, dafs ein Körper in die kleinsten Teilchen zerfällt, aus denen er besteht. Insbesondere aber äufsert sich ihre Wirkung, wenn eine Änderung in der Anordnung der Teilchen veranlafst wird: eine solche suchen sie zu verhindern. Worin das Wesen der Kohäsionskräfte besteht, wie man sich ihr Auftreten zu erklären hat und namentlich nach welchen Gesetzen sie wirken, alles das sind Fragen, auf welche die Wissenschaft heute noch keine befriedigende Antwort zu geben vermag. Jedenfalls wirken diese Kräfte auch in festen Körpern nur auf sehr kleine Entfernungen hin. Daher vereinigen sich die Teile eines zerbrochenen Körpers beim Aneinanderfügen und selbst wenn man sie stark aneinander prefst, im allgemeinen nicht mehr zu einem Ganzen. Eine solche Vereinigung findet indes zuweilen unter ungeheurem Drucke dennoch statt, wenn nämlich eine solche Annäherung bewirkt wird, dafs die Molekularkräfte wiederum in Wirkung treten.

Die Moleküle der festen Körper stofsen bei ihrer Bewegung ununterbrochen miteinander zusammen und zwar wahrscheinlich noch häufiger als die Moleküle einer Flüssigkeit. Diese Annahme, die sogenannte „kinetische Theorie der festen Körper“ ist aber noch nicht ausreichend begründet, vielmehr eine erst im Entstehen begriffene Lehre. Die Oberflächenteilchen fester Körper können ebenso wie die der flüssigen, wenn auch weit seltener und nur in ausnahmsweise günstigen Fällen sich aus der Masse der Körper entfernen, mit anderen Worten, ein fester Körper kann sich unmittelbar verflüchtigen. Möglicherweise findet ein derartiges Verdunsten fortwährend und an der Oberfläche sämtlicher fester Körper statt, jedoch in so geringem Mafse, dafs die hierdurch bewirkte Verminderung der Masse selbst nach langer Zeit sich nicht bemerkbar macht. Es giebt jedoch auch Fälle, wo das Verdunsten wenigstens durch das Geruchsorgan wahrgenommen werden kann. Der Energievorrat eines festen Körpers setzt sich aus mehreren Teilen zusammen, aus der kinetischen Energie der Moleküle, der intramolekularen Bewegungsenergie der Atome und aus der potentiellen Lagenenergie der Moleküle.

Einige besondere Eigenschaften haben pulverförmige Körper, welche aus einer grofsen Zahl kleiner fester Teilchen bestehen, die miteinander, wenn sie vollkommen trocken sind, keinerlei Zusammenhang haben.

Die Form einer gegebenen Menge pulverförmiger Substanz ändert sich unter der Einwirkung von äufseren Kräften verhältnismäfsig leicht.

Th. Petruschewski war der erste, welcher (1884) die regelmäfsigen Formen, welche pulverisierte Körper auf Platten in Abhängigkeit von der Plattenkontur annehmen, eingehend untersuchte. Ähnliche Untersuchungen in bedeutend erweiterter Form sind von Auerbach (1901) ausgeführt worden. Teilweise hierher gehören auch die Untersuchungen von N. E. Shukowski über den Einflufs des Druckes auf Sand, welcher mit Wasser gesättigt ist.

§ 2. Krystallinischer und amorpher Zustand der Materie[1]. Die feste Materie hat unter gewissen Verhältnissen die Fähigkeit, die Gestalt bestimmter Polyeder anzunehmen, die man Krystalle nennt. Jeder von ebenen Flächen umgrenzte Krystall stellt ein gesondertes Individuum dar, zu dem, wenn es vollständig ausgebildet ist, ganz bestimmte Ebenen, Kanten und Raumwinkel gehören. Wie wir sahen (S. 664), besitzen Kolloide nicht die Fähigkeit Krystalle zu bilden; von flüssigen Krystallen war auf S. 537 die Rede.

Die Materie kann krystallisieren beim Übergang aus dem flüssigen oder gasförmigen Zustande in den festen; im ersten Falle kann sie entweder in einer anderen Flüssigkeit gelöst sein oder sich im geschmolzenen Zustande befinden. Krystallausscheidung aus einer Flüssigkeit erfolgt am einfachsten durch Temperaturerniedrigung oder beim Verdunsten der Flüssigkeit, doch auch bei chemischer oder elektrolytischer Ausscheidung einer Substanz tritt dieselbe bisweilen unmittelbar in Krystallform auf. Krystalle haben die Fähigkeit zu wachsen, d. h. ihr Volumen unter Beibehaltung derselben Polyederform zu vergröfsern. Dieses Wachstum erfolgt dadurch, dafs sich auf der Oberfläche des anfangs gebildeten Krystalls, der gewissermafsen den Keimling darstellt, die gelöste Substanz aus dem umgebenden Medium niederschlägt.

Dem krystallinischen Zustande entgegengesetzt ist der amorphe. Befindet sich die Materie in diesem letzteren Zustande, so zeigen selbst ihre kleinsten, der Beobachtung eben noch zugänglichen Teilchen keine „krystallinische Struktur".

Das Ausscheiden von Krystallen aus Lösungen ist bisweilen von Lichtentwicklung begleitet, was vielleicht darauf hinweist, dafs während der Krystallisation auch elektrische Erscheinungen auftreten.

§ 3. Krystallsysteme. Die Formen der verschiedenen Krystalle sind sehr mannigfach, in allen Fällen aber sind es konvexe Polyeder. Die Zahlen F der Seitenflächen, K der Kanten und E der

[1]) Die von den Krystallen handelnden Paragraphen (der ersten russischen Auflage) hat Professor S. Th. Glinka durchzusehen die Liebenswürdigkeit gehabt.

Winkel sind bekanntlich durch die Beziehung $F + E = K + 2$ miteinander verknüpft. Das geometrische Studium und die Gruppierung der verschiedenen Krystallformen ist Gegenstand einer besonderen Disciplin, der **Krystallographie**, die eine wichtige Rolle in der Mineralogie und Chemie spielt. An dieser Stelle können wir uns mit einem ganz flüchtigen Hinweis auf die sechs Krystallsysteme begnügen, in welche man die einzelnen Krystallformen einreiht, je nach der Lage der sie begrenzenden Ebenen.

Vollkommen aufser acht lassen wir die Frage nach den sogenannten Zonen, welche durch die Gesamtheit aller sich in parallelen Geraden schneidender Seitenflächen gebildet werden. Ebenso soll die Frage nach dem Symmetriegrade der verschiedenen Krystallformen, der für die Bestimmung der Krystallsysteme als Richtschnur dient, ganz übergangen werden.

Die einfachste Methode zur Bestimmung der sechs Hauptsysteme der Krystallformen (die wiederum in 32 Gruppen zerfallen) besteht in folgendem. Wenn man durch irgend einen Punkt im Inneren eines Krystalles Koordinatenachsen parallel zu irgend welchen drei faktisch vorhandenen oder aber krystallographisch möglichen Seitenflächen des Krystalles zieht, so schneidet eine mit einer vierten Seitenfläche zusammenfallende Ebene von diesen Achsen gewisse Stücke ab; bezeichnen wir dieselben mit a, b und c. Nimmt man dann an, dafs eine fünfte Seitenfläche die Strecken ma, nb und pc abschneidet, so sind die Koeffizienten m, n und p rationale Zahlen für alle nur möglichen Seitenflächen. Obiges Gesetz ist 1781 von Hauy entdeckt worden. Die einzelnen Krystallsysteme werden durch die relative Lage der „krystallographischen" Achsen und durch das Verhältnis ihrer „Länge", d. h. der Zahlen a, b und c bestimmt. Diese Einteilung ist zuerst von Weifs (1809) vorgenommen worden. Die erwähnten sechs Krystallsysteme sind die folgenden.

I. Das reguläre System. Dasselbe ist durch drei zu einander senkrechte und gleiche Achsen charakterisiert (Fig. 350);

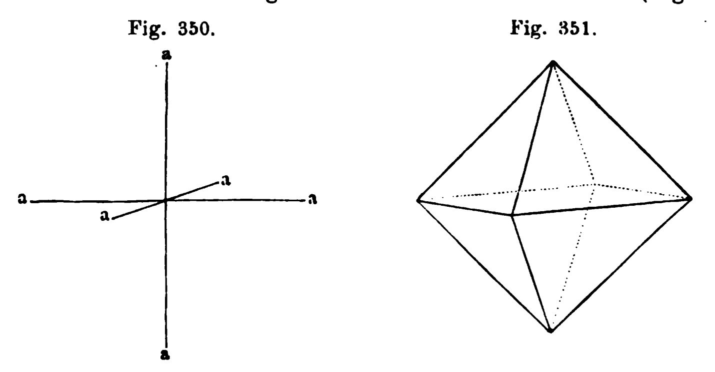


Fig. 350. Fig. 351.

es ist hier also $a : b : c = 1$. In dieses System gehört zunächst das regelmäfsige **Oktaeder** (Fig. 351) und der **Würfel** oder das **Hexaeder** (Fig. 352). Eine etwas kompliziertere Gestalt hat das **Rhombendodekaeder** (Fig. 353). Einige Formen entstehen durch Kombination von zwei einfacheren, so stellen z. B. die Figuren 354, 355 und 356 Kombinationen des Oktaeders und Würfels dar. In der

Fig. 352.

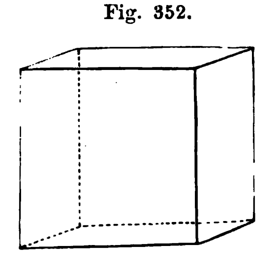
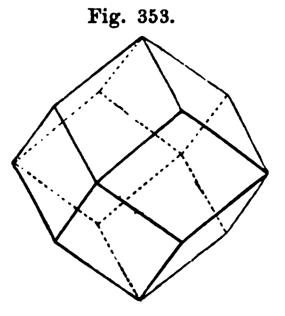


Fig. 353.



ersten von ihnen überwiegen die Oktaederflächen, in der zweiten die Würfelflächen, während in der dritten die Flächen von Oktaeder und Würfel gleich stark ausgebildet sind.

Nach dem regulären Systeme krystallisieren unter anderen folgende Substanzen: Fe, Pb, Cu, Ag, Hg, Au, Pt u. s. w., C (Diamant), PbS, Ag_2S, CoS, Sb_2O_3, $NaCl$ (Würfel), $AgCl$, $AgBr$, Fe_3O_4 (Magneteisenstein, Oktaeder), ZnS, Cu_2O, KCl, NH_4Cl (Salmiak), FeS_2 (Schwefelkies), $NaClO_3$, $(PbNO_3)_2$, $CaFl_2$ (Flufsspat), Alaun (Oktaeder), Granat u. s. w.

Fig. 354.

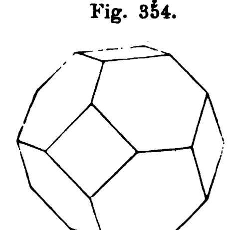


Fig. 355.

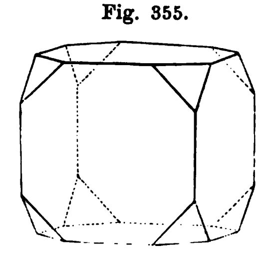
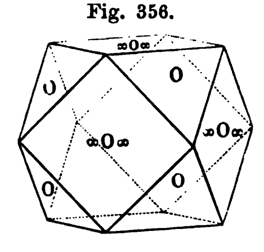


Fig. 356.



II. **Hexagonales System.** Dieses System ist durch **vier Achsen** charakterisiert, von denen eine, die Hauptachse, senkrecht zu den drei anderen ist, welche ihrerseits miteinander gleiche Winkel (von 60^0) bilden. Die Nebenachsen sind von gleicher Länge, während die Hauptachse länger oder kürzer als die ersteren sein kann (Fig. 357). Zu diesem System gehört vor allem die **hexagonale** oder **sechsseitige Pyramide** (Fig. 358) und das **hexagonale Prisma**, das ungeschlossen ist und daher nur in Kombination mit anderen Formen vorkommt. Derartige Kombinationen sind in Fig. 359 und 360 abgebildet, die erste von ihnen ist eine Kombination von hexagonaler

Pyramide und Prisma, die zweite ein hexagonales Prisma mit zwei zum Hauptschnitt des Systems parallelen Ebenen. Eine sehr wichtige

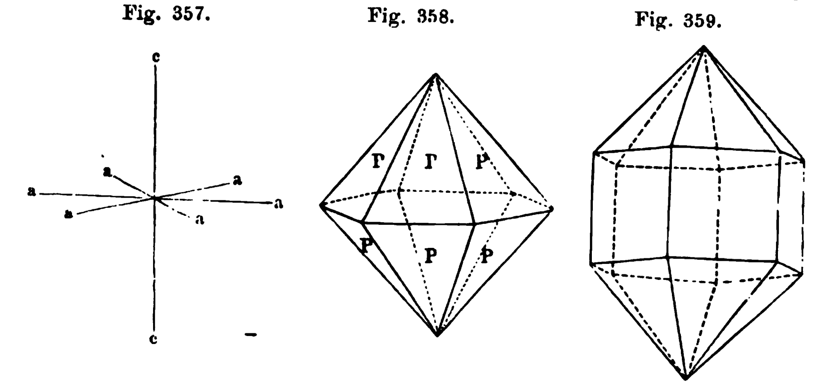


Fig. 357. Fig. 358. Fig. 359.

Form des hexagonalen Systems stellt das Rhomboeder dar, man rechnet es jedoch zu den hemiedrischen Formen, von denen weiter unten die Rede sein soll.

Zum hexagonalen System gehören die Krystalle folgender Substanzen: As, Sb, Bi, H_2O (Eiskrystalle, Schneeflöckchen), Al_2O_3, Fe_2O_3, $NaNO_3$, $CaCO_3$ (isländischer Spat, Rhomboeder), $MgCO_3$, $FeCO_3$, $ZnCO_3$, $MnCO_3$ Turmalin, SiO_2 (Quarz), HgS u. s. w.

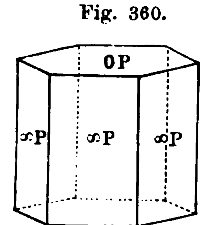


Fig. 360.

Retgers, Rinne u. a. haben auf den bemerkenswerten Umstand aufmerksam gemacht, dafs die Elemente und einfachen Verbindungen nach den Systemen krystallisieren, welche die gröfste Symmetrie zeigen, nämlich nach dem regulären und hexagonalen System. Dies findet sich durch die von uns angeführten Beispiele bestätigt. Unter anderen gehören die Sauerstoff- und Schwefelverbindungen der Metalle fast alle zu den erwähnten beiden Systemen.

III. Quadratisches oder tetragonales System. Hier sind drei zu einander senkrechte Achsen vorhanden, von denen zwei einander gleich sind, während die dritte, die Hauptachse, kürzer oder länger als die beiden anderen sein kann (Fig. 361). Die wichtigste hierher gehörige Form ist diejenige des Oktaeders mit quadratischer Basis, welches von acht gleichen und gleichschenkligen Dreiecken begrenzt ist. Je nachdem die Hauptachse kürzer oder länger ist als die beiden anderen, erhält man die in Fig. 362 und 363 abgebildeten Formen. Ist die Hauptachse unendlich grofs, so entsteht ein quadratisches Prisma, das wiederum nur in Kombinationen vorkommen kann.

Nach dem quadratischen System krystallisieren: Sn, SnO_2, Hg_2Cl_2, $CuFeS_2$ (Kupferkies), schwefelsaures Chinin, Harnstoff u. s. w.

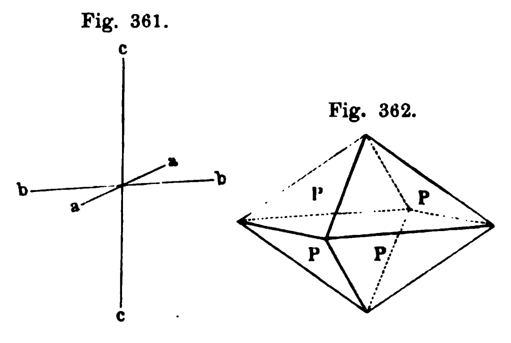


Fig. 361. Fig. 362. Fig. 363.

IV. **Rhombisches System.** Die drei Achsen sind zwar zu einander **senkrecht**, jedoch von **ungleicher Länge** (Fig. 364), Die wichtigste hierhergehörige Form ist die des **rhombischen Oktaeders** (Fig. 365), welches von acht kongruenten ungleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Aus dieser Form leitet sich das rhombische Prisma ab, sowie verschiedene Kombinationen mit Ebenen, welche entweder zur Hauptachse oder zu einer der beiden Nebenachsen senkrecht sind. Die Nebenachsen stellen die Diagonalen des als Basis dienenden Rhombus dar.

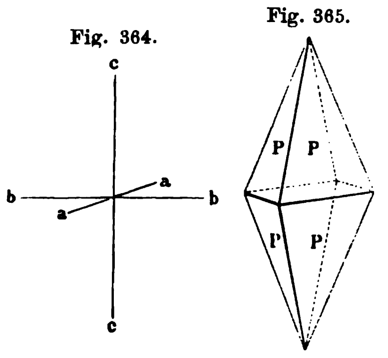


Fig. 364. Fig. 365.

Nach diesem System krystallisieren sehr viele Mineralien und künstlich hergestellte Stoffe, z. B. S, Cu_2S, $CaCO_3$ (Aragonit), KNO_3, K_2SO_4, $CaSO_4$ (Anhydrid), $MgSO_4 + 7H_2O$, $ZnSO_4 + 7H_2O$, $PbSO_4$, Topas, Schwerspat ($BaSO_4$) u. s. w.

V. **Monoklinoedrisches System.** Dasselbe ist dadurch charakterisiert, dafs zwei Achsen *aa* und *bb* (Fig. 366 a. f. S.) zu einander senkrecht sind, während die dritte *cc* zur Ebene der beiden ersten geneigt, jedoch senkrecht zu *bb* ist. In Fig. 367 (a. f. S.) ist ein **monoklinoedrisches Prisma** dargestellt mit Angabe der krystallographischen Achsen.

Zum monoklinen System gehören die Krystalle von: S (dimorphe Modifikation), $KClO_3$, $Na_2CO_3 + 10H_2O$, $Na_2SO_4 + 10H_2O$, $CaSO_4 + 2H_2O$ (Gips), $FeSO_4 + 7H_2O$, Glimmer, Weinsäure, Rohrzucker und viele andere organische Verbindungen.

VI. **Triklinoedrisches System.** Die drei Achsen sind von

ungleicher Länge und bilden miteinander spitze (oder stumpfe) Winkel (vergl. Fig. 368).

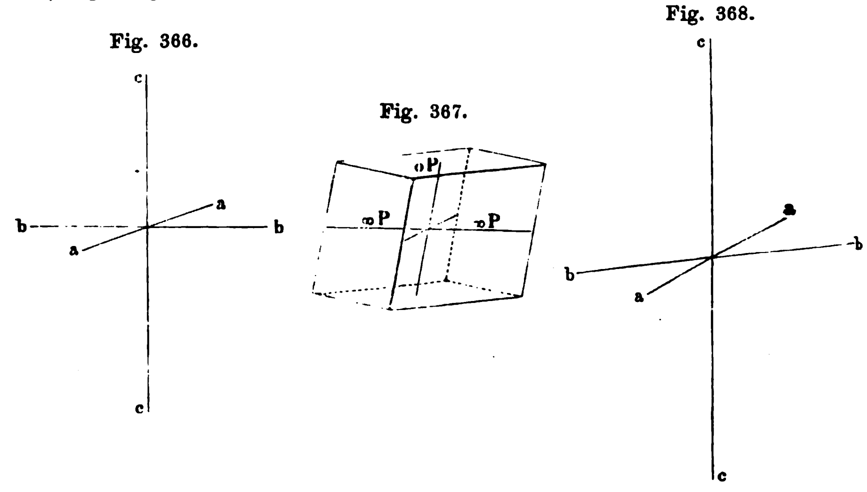


Fig. 366. Fig. 367. Fig. 368.

Zu diesem System gehören die Krystalle von $K_2Cr_2O_7$, $CuSO_4 + 7H_2O$, Albit, Labrador u. s. w.

§ 4. Hemiedrie. Sind alle einer gegebenen Krystallform entsprechenden Seitenflächen wirklich vorhanden, so nennt man diese Krystallform eine holoedrische. Es kommen indes Formen vor, die man sich aus den holoedrischen dadurch hervorgegangen denken kann, dafs sich die eine Hälfte der Begrenzungsflächen gewissermafsen nach allen Seiten ausdehnt, so dafs endlich die andere Hälfte der Flächen

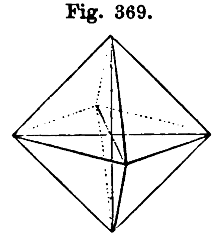


Fig. 369.

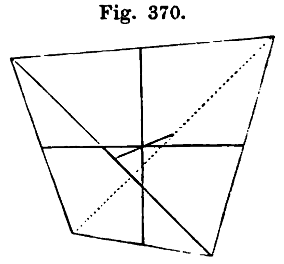


Fig. 370.

von ihnen vollständig unterdrückt wird. Solche Formen heifsen hemiedrische. Seltener kommt es vor, dafs drei Viertel oder sogar sieben Achtel aller Krystallflächen auf Kosten der übrigen unterdrückt werden. Im ersten Falle entstehen tetartoedrische, im letzteren ogdoedrische Formen.

Hierher gehört vor allem das Tetraeder (Fig. 370), eine hemiedrische Form, welche aus dem regelmäfsigen Oktaeder (Fig. 369) entsteht, wenn sich vier Flächen desselben bis zum Verschwinden der vier

anderen entwickeln und zwar entwickelt sich in Fig. 369 von den unteren Flächen die vordere linke und hintere rechte, von den oberen

Fig. 371.

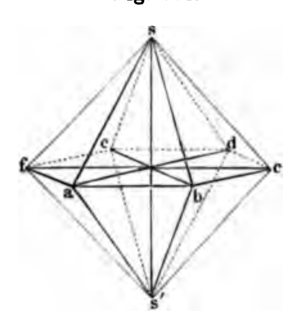
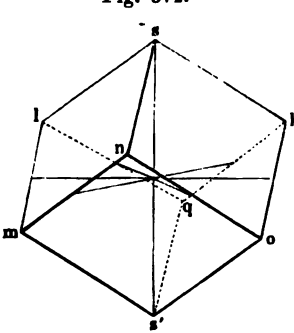
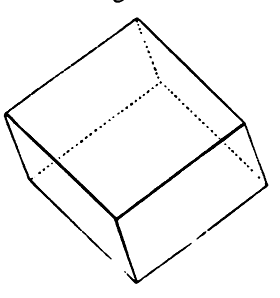


Fig. 372.



Flächen die vordere rechte und hintere linke. Aus der hexagonalen holoedrischen Form der sechsseitigen Pyramide (Fig. 371) entsteht die hemiedrische Form des Rhomboeders (Fig. 372), wenn sechs Flächen anwachsen, und zwar saf, sbc, $s'ba$ und die mit diesen parallelen hinteren; wachsen dagegen die anderen sechs Flächen, so entsteht ein Rhomboeder, dessen Form aus Fig. 373 ersichtlich ist. Eine andere hemiedrische Form stellt das Skalenoeder (Fig. 374) dar, dessen Seitenkanten mit den Kanten des Rhomboeders (in Fig. 373 und im Innern von Fig. 374 dargestellt) zusammenfallen; die holoedrische, dem Skalenoeder entsprechende Form ist die der zwölfseitigen Pyramide. Die Kombination von hemiedrischen oder tetartoedrischen Formen führt bisweilen zur Entstehung zweier solcher Krystallformen, deren Flächen die gleiche Entstehungsweise besitzen, jedoch derartig angeordnet sind, dafs die eine Form gewissermafsen das Spiegelbild der anderen darstellt und nicht durch Drehung in sie übergeführt werden kann. Zwei solche Formen heifsen enantiomorphe oder gyroedrische.

Fig. 373.



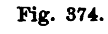
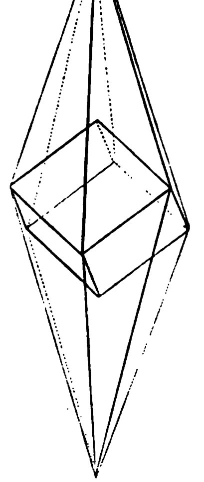


Fig. 374.



In Fig. 375 und 376 (a. f. S.) sind zwei solche dem hexagonalen Systeme angehörige Formen abgebildet, in Fig. 377 und 378 (a. f. S.) zwei

enantiomorphe Formen, die zum regulären System gehören (**unterchlorigsaures Natron**); sie unterscheiden sich voneinander durch die Anordnung der Tetraederflächen.

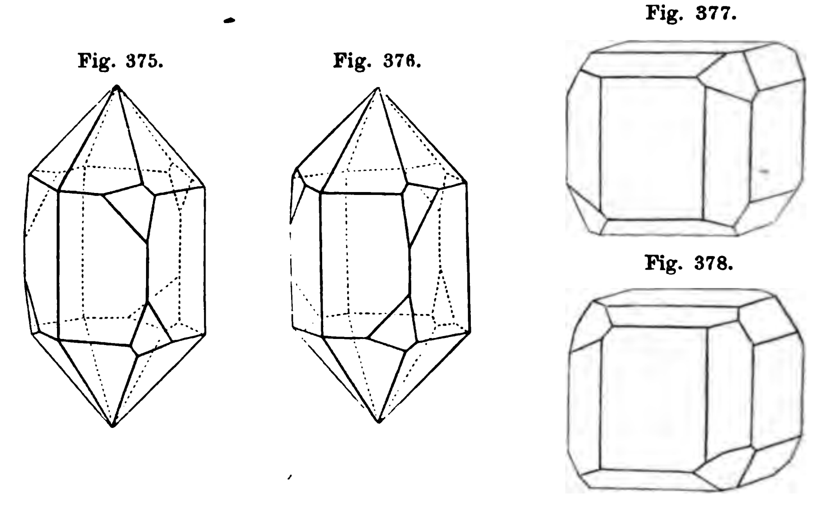


Fig. 375. Fig. 376. Fig. 377. Fig. 378.

§ 5. **Zwillinge.** Zwei Krystalle, die nach einem bestimmten Gesetze miteinander verwachsen sind, heifsen Zwillinge. Gröfstenteils

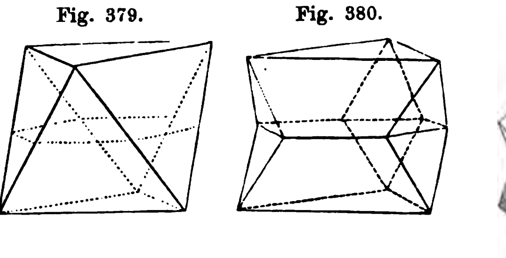


Fig. 379. Fig. 380.

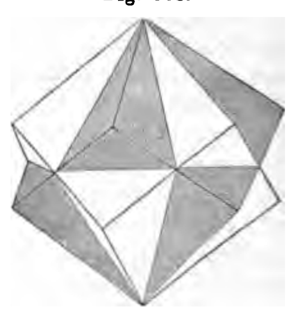


Fig. 381.

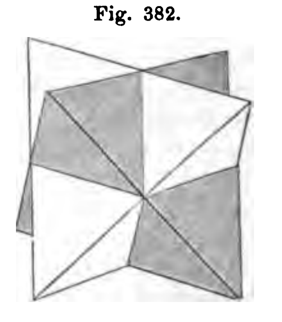


Fig. 382.

erhält man ihre Form geometrisch, wenn man sich den Krystall in zwei gleiche Teile geteilt und den einen von ihnen um 180° gedreht denkt. So entsteht z. B. aus dem Oktaeder (Fig. 379) der in Fig. 380 dargestellte Zwilling, wenn die Trennungsebene die durch Punkte in Fig. 379 angedeutete Lage hat. Ein solcher Zwilling heifst Verwachsungszwilling. Eine andere Art von Zwillingen wird durch zwei einander durchdringende Krystalle dargestellt (Durchdringungs-

zwillinge). Fig. 381 stellt einen solchen aus zwei Würfeln, Fig. 382 einen aus zwei Tetraedern bestehenden Zwilling dar. Die erstere Form haben Flusspatkrystalle.

§ 6. Bau der Krystalle. Die Krystalle sind homogene und anisotrope (S. 32) Körper. Nur die Krystalle des regulären Systems sind isotrop hinsichtlich mehrerer Eigenschaften, wie z. B. der optischen.

Die Krystalle des hexagonalen und quadratischen Systems heifsen einachsig. In ihnen ist eine Richtung von solcher Eigenschaft vorhanden, dafs nach allen Richtungen, welche mit ihr denselben Winkel bilden, sämtliche Eigenschaften des Krystalls (Wärmeleitung, thermische Ausdehnung, Lichtgeschwindigkeit u. s. w.) die gleichen sind. Diese Richtung ist in beiden Systemen den Hauptachsen parallel und wird Richtung der optischen Achse genannt. In dieser Richtung erfährt ein Lichtstrahl keine Doppelbrechung, wird also nicht in zwei Strahlen gespalten.

Die Krystalle des rhombischen, monoklinoedrischen und triklinoedrischen Systems heifsen zweiachsig. Sie haben zwei optische Achsen, d. h. zwei Richtungen, in denen Lichtstrahlen keine Doppelbrechung erfahren. Diese Richtungen fallen indes mit den krystallographischen zusammen.

Die Kohäsion ist bei den Krystallen in verschiedenen Richtungen verschieden, weshalb sie sich in verschiedenen Richtungen nicht gleich leicht spalten lassen. Die Ebenen, parallel zu denen sich ein Krystall am leichtesten spalten läfst, heifsen Spaltungsflächen. Einige Krystalle haben nur eine, andere mehrere Spaltungsflächen, die immer gewissen Krystallflächen parallel sind. Besonders leicht auffindbar ist die Lage der Spaltungsfläche beim Glimmer, der bequem in sehr dünne Blättchen gespalten werden kann. Sind mehrere Spaltungsflächen vorhanden, so kann der Grad der Spaltbarkeit für sie ein verschiedener sein.

Die Regelmäfsigkeit der Krystallformen führt auf den Gedanken, dafs die Moleküle in den Krystallen nach einem bestimmten Gesetze gruppiert sein müssen. Frankenheim (1832 bis 1856) und Bravais waren die ersten, welche eine netzförmige Anordnung der Moleküle im Innern der Krystalle annahmen. Denken wir uns zu diesem Zwecke schiefwinklige Koordinatenachsen O_x, O_y, O_z (Fig. 383 a. f. S.) und ziehen wir drei Systeme äquidistanter, den Koordinatenachsen paralleler Ebenen. Die Gleichungen derselben lauten: $x = 0$, $x = a$, $x = 2a$, $x = 3a \ldots$, $y = 0$, $y = b$, $y = 2b$, $y = 3b \ldots$, $z = 0$, $z = c$, $z = 2c$, $z = 3c \ldots$ Diese Ebenen teilen den Raum in Parallelepipede, an deren Scheitelpunkten die Moleküle des Krystalls verteilt gedacht werden. Bezeichnet man ein solches Parallelepipedon als Element $(OADBCA_1D_1B_1)$, so erhält man folgende Übersicht:

1. Das Element ist ein Würfel; reguläres System.

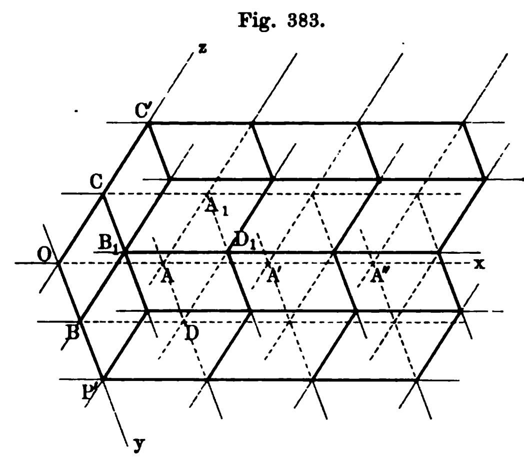
2. Das Element ist ein Rhomboeder; hexagonales und damit verbundenes rhomboedrisches System.

3. Das Element ist ein gerades Prisma mit quadratischer Basis; quadratisches System.

4. Das Element ist ein gerades Prisma mit rechtwinkliger oder rhombischer Basis; rhombisches System.

5. Das Element ist ein gerades Prisma mit einem Parallelogramm oder ein schiefes Prisma mit einem Rhombus als Basis, wobei eine von den Diagonalen des Rhombus senkrecht zur Ebene ist, welche durch die andere Diagonale und Prismenachse gezogen ist; monoklinoedrisches System.

Fig. 383.



6. Das Element ist ein schiefes Parallelepipedon; triklinoedrisches System.

Sohnke hat (1867) die Theorie von Bravais modifiziert; er geht von der einen Annahme aus, dafs die Lage der Moleküle um einen gegebenen Punkt herum für alle Moleküle die gleiche sein mufs und zeigt, dafs 66 Lagen möglich sind, welche alle der gestellten Bedingung genügen. Mit derselben Frage haben sich auch Möbius (1849) u. a. beschäftigt.

§ 7. Polymorphismus (oder Heteromorphismus). Die äufserst interessante Frage nach den Beziehungen zwischen Krystallform und chemischer Zusammensetzung einer Substanz gehört nicht in den Rahmen dieses Buches. Eine ausführliche Darstellung derselben findet man im Werke von Arzruni, Physikalische Chemie der Krystalle (1893). Es handelt sich hier um die Erscheinungen des Polymorphismus, des Isomorphismus und der Morphotropie. Wir müssen uns mit wenigen Andeutungen begnügen. Die Krystalle einer gegebenen Substanz haben, da sie sich unter bestimmten Bedingungen bilden, immer ein und dieselbe Form. Wenn sich jedoch jene Bedingungen ändern, so kann sich auch die Krystallform ändern oder, mit anderen Worten, ein und dieselbe Substanz kann auch verschiedene Krystallformen annehmen. Diese Erscheinung wird Polymorphismus genannt und zwar je nachdem zwei oder drei Formen auftreten — Dimorphismus und Trimorphismus. Die Zahl der polymorphen Körper ist eine

überaus grofse; vielleicht würden sogar alle Körper Polymorphismus zeigen, wenn man es nur verstehen würde, die Krystallisationsbedingungen für sie in geeigneter Weise abzuändern.

Die Krystalle derselben Substanz, welche von verschiedener Form sind, haben im allgemeinen auch verschiedene physikalische Eigenschaften, wie z. B. verschiedene Farbe, Härte, Dichte δ u. s. w. Es mögen hier einige Beispiele für den Polymorphismus folgen.

S kommt in der Natur in rhombischen Krystallen vor, aus Lösungen in CS_2 und Kohlenwasserstoffen scheidet er sich in Form von rhombischen Krystallen aus, aus der Schmelzmasse dagegen in Form von monoklinoedrischen Krystallen. Die Krystalle des letzteren Systems stellen eine labile Form dar, die allmählich unter Wärmeentwicklung in die rhombische Form übergeht. $CaCO_3$: hexagonales (rhomboedrisches) System in Form von Kalkspat ($\delta = 2{,}7$) und rhombisches) in Form von Aragonit ($\delta = 2{,}9$). C: reguläres System (Diamant, $\delta = 3{,}55$) und monoklinoedrisches — früher glaubte man hexagonales — Graphit ($\delta = 2{,}3$). SiO_2: hexagonales System — Quarz ($\delta = 2{,}66$), eine andere Form, Tridymit ($\delta = 2{,}3$), von geringerem Symmetriegrade, kann dem rhombischen angehören. TiO_2: zwei verschiedene quadratische Formen (Rutil, $\delta = 4{,}25$ und Anatas, $\delta = 3{,}9$) und rhombisches (Brookit, $\delta = 4{,}05$); Trimorphismus, FeS_2: reguläres (Pyrit, $\delta = 5{,}1$) und rhombisches (Markasit, $\delta = 4{,}86$). Al_2SiO_5: rhombisches (Andalusit, $\delta = 3{,}16$) und trioklinoedrisches (Disthen, $\delta = 3{,}66$) System.

§ 8. Isomorphismus und Morphotropie. Bisweilen krystallisieren zwei Körper, deren Zusammensetzung verschieden ist, in Formen, die einander sehr nahe stehen; solche Körper nennt man isomorphe. Isomorphe Körper sind, wie man findet, in ihrer chemischen Zusammensetzung einander ähnlich. Ihre wichtigste Eigenschaft ist die, dafs sie, wenn sie in derselben Lösung enthalten sind, in ein und demselben Krystall auftreten können. Man unterscheidet gegenwärtig verschiedene Grade von Isomorphismus, je nachdem, ob sich die Substanzen im Krystall in allen nur möglichen Verhältnissen miteinander mischen können oder nicht.

Der Isomorphismus ist von Mitscherlich (1820) an vier rhombischen Krystallen H_2KPO_4, H_2KAsO_4, $H_2(NH_4)PO_4$ und $H_2(NH_4)AsO_4$ entdeckt worden. Isomorphismus zeigen z. B. $ZnSO_4 + 7H_2O$ und $MgSO_4 + 7H_2O$; $BaCl_2 + 2H_2O$ und $SrCl_2 + 2H_2O$; $NaClO_3$ und $AgClO_3$. Bei den obigen Körpern nimmt der Grad des Isomorphismus in der Reihenfolge ab, in der sie genannt sind. Als weitere Beispiele können gelten $CaCO_3$, $MgCO_3$, $ZnCO_3$, $FeCO_3$ und $MnCO_3$ (Rhomboeder); As, Sb, Te, Bi (hexagonales System). Die Alaune sind ebenfalls isomorph. Bringt man einen Krystall von Chromalaun in eine

Lösung von Thonerdealaun, so fährt derselbe fort zu wachsen, ohne dafs seine Gestalt sich dabei ändert. Ein interessantes Beispiel von Isomorphismus stellen im triklinoedrischen Systeme Anorthit $CaAl_2Si_2O_8$ und Albit $Na_2Al_2Si_6O_{16}$ dar. Bisweilen sind die Krystalle chemisch ganz verschiedener Körper einander ähnlich. Eine derartige Erscheinung tritt z. B. beim Natronsalpeter und Kalkspat auf.

Unter Morphotropie versteht man die gesetzmäfsige Änderung, die bei einer gegebenen Krystallform durch partielle Substitution im Molekül (z. B. Ersatz eines Wasserstoffatomes durch ein anderes Atom oder eine Atomgruppe), durch Umlagerung der Atome innerhalb der Molekel, durch Polymerisation oder durch Addition hervorgerufen wird.

Mit der Frage nach dem Zusammenhange zwischen der Krystallform einer Substanz und der Stellung derselben oder ihres Hauptbestandteils (z. B. des Metalls eines Salzes) im periodischen System von Mendelejew haben sich unter anderem G. Linck und W. Ortloff beschäftigt.

§ 9. Allotropie. Berzelius bezeichnete mit Allotropie das Auftreten eines chemischen Elements in verschiedenen Formen, die sich durch ihre physikalischen Eigenschaften mehr oder weniger wesentlich voneinander unterscheiden. Diamant, Graphit und gewöhnliche Kohle stellen drei allotrope Modifikationen des Kohlenstoffs dar. Von Moissan stammt eine umfangreiche Arbeit, welche sich damit beschäftigt, zu untersuchen, auf welche Weise die verschiedenen allotropen Modifikationen des Kohlenstoffs erhalten werden und welches ihre Eigenschaften sind. Bor kommt in Form eines braunen amorphen Pulvers und in Form von Krystallen vor.

Phosphor ist in drei allotropen Formen bekannt, als weifser, roter (wird durch andauernde Erwärmung des weifsen Phosphors auf 250° erhalten) und metallischer Phosphor. Schwefel kommt in drei Formen vor, als rhombischer, monoklinoedrischer und plastischer Schwefel. Selen kommt vor als rotes und schwarzes amorphes Pulver, dunkelrote Krystalle, graue Krystalle (die Leitfähigkeit für Elektrizität nimmt bei den letzteren zu, falls man sie belichtet). Zinn kann zwei Formen annehmen, die gewöhnliche weifse und die eines grauen Pulvers. Unter 20° befindet sich die weifse Modifikation im Zustande labilen Gleichgewichts; je niedriger die Temperatur ist, um so schneller geht das Zinn in die für praktische Zwecke unbrauchbare graue Modifikation über. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Umwandlung vollzieht, hat jedoch bei — 48° ein Maximum, bei weiterer Temperaturerniedrigung nimmt sie ab. Die Geschwindigkeit der Umwandlung wird beträchtlich gesteigert, falls sich das weifse Zinn in Berührung mit grauem befindet, das ersteres gewissermafsen ansteckt und grofse Vorräte dieses Metalls verderben kann (die sogenannte Zinnpest).

E. Cohen und C. v. Eijk haben 1899 diese Erscheinungen untersucht.

Die allotropen Modifikationen einer und derselben Substanz entstehen wahrscheinlich dadurch, dafs die Atome in verschiedener Zahl und verschiedener Gruppierung zu Molekülen zusammentreten. Sauerstoff (O_2) und Ozon (O_3) stellen ein Beispiel für die Allotropie eines gasförmigen Elements dar.

Litteratur.

Zu § 1.

Th. Th. Petruschewski: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **16**, 410, 458, 1884.
Auerbach: Drud. Ann. **5**, 170, 1901.
N. E. Shukowski: Arb. d. phys. Sekt. d. Mosk. Naturf.-Ges. **3**, Heft 1, 52, 1890.

Zu § 3 bis 9.

Krystalle, siehe die Lehrbücher der Krystallographie z. B.:

Groth: Physikalische Krystallographie.
Karsten: Krystallographie. (Allg. Encyklop. d. Physik.)
Rammelsberg: Krystallographische Chemie.
Mallard: Cours de cristallographie. Paris 1874 bis 1884.
Liebisch: Geometrische Krystallographie. Leipzig 1881.
Liebisch: Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891.
Liebisch: Grundrifs der physikalischen Krystallographie. Leipzig 1896.
Schönfliefs: Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig 1891.
V. von Lang: Lehrbuch der Krystallographie. Wien 1869.
H. Kopp: Einleitung in die Krystallographie.
S. Th. Glinka: Allgemeiner Kursus der Krystallographie (russ.). St. Petersburg 1895.
S. Th. Glinka: Allgemeiner Kursus der Mineralogie (russ.). Teil I. St. Petersburg 1896.
P. Semjattschenski: Kurzes Lehrbuch der Krystallographie (russ.). St. Petersburg 1899.
Arzruni: Physikalische Chemie der Krystalle. Braunschweig 1892.
Graham-Otto, Lehrbuch der Chemie I, **3**, 1 bis 350, 1898.
V. von Lang: Symmetrieverhältnisse der Krystalle. Zeitschr. f. phys. Chem. **21**, 218, 1896.
Retgers: Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, 1.
Rinne: Zeitschr. f. phys. Chem. **16**, 529.
Delafosse: Mémoires des sav. étrangers **8**, 647, 1893.
Bravais: Etudes cristallographiques. Paris 1851. Journ. de l'école polyt. **19**, 1850.
Sohncke: Die unbegrenzten regelmäfsigen Punktsysteme. Karlsruhe 1876.
Fedorow: Abhandlungen in den Bull. d. russ. miner. Ges. und in der Zeitschr. f. Krystallographie.

Gadolin: Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques etc. Acta societ. scien. fenn. Helsingfors 1871; desgl. in den Bull. d. russ. mineral. Ges. 1868.
Moissan: Ann. ch. et phys. (7) **8**, 289, 306, 466, 1896.
G. Linck: Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, 193, 1896.
W. Ortloff: Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, 201, 1896.
E. Cohen und C. von Eijk: Zeitschr. f. phys. Chem. **30**, 601, 1899.

Zweites Kapitel.

Dichte der festen Körper.

§ 1. Einleitende Bemerkungen. Um den Zahlenwert δ für die Dichte eines festen Körpers zu bestimmen, mufs man entsprechend der Formel

$$\delta = \frac{P}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

das Gewicht P des Körpers, sowie das Gewicht Q des Wasserquantums bestimmen, dessen Volumen bei 4° gleich dem Volumen des festen Körpers bei jener Temperatur ist, für welche wir seine Dichte suchen. Die von uns als „tabellarische" (S. 538) bezeichnete Dichte bezieht sich auf 0° und diese ist es, die gewöhnlich bestimmt wird.

Zur Dichtebestimmung fester Körper giebt es viele verschiedene Methoden; je nach der Art und Menge der zu untersuchenden Substanz, und je nach dem Genauigkeitsgrade, den man zu erreichen wünscht, hat man die eine oder andere Methode vorzuziehen. Besondere Eigentümlichkeiten der Körper führen bisweilen dazu, besondere Mafsnahmen zu treffen; solche sind z. B. anzuwenden, wenn die gegegebene Substanz leichter als Wasser ist oder sich in Wasser löst, oder nicht in der Luft gewogen werden kann (K, Na); ferner, wenn sie Pulverform hat oder in hohem Grade porös ist (Kohle, Kreide). Im letzteren Falle hat man sie, wenn möglich, mit einer dünnen Schicht irgend einer Substanz zu überziehen, welche für Wasser oder diejenige Flüssigkeit, deren man sich bei Bestimmung von δ bedient, nicht durchlässig ist.

Taucht man den Körper in Wasser oder eine andere Flüssigkeit, so hat man sorgfältig darauf zu achten, dafs an ihm keine Luftbläschen hängen bleiben; man kann sie bisweilen mit einem Pinselchen entfernen. Bei Vornahme der verschiedenen Wägungen hat man die erforderlichen Korrektionen wegen des Gewichtsverlustes in der Luft und wegen der Temperatur, von denen auf S. 348 und 538 die Rede war

anzubringen. Es mögen hier zunächst einige weniger genaue Methoden zur Dichtebestimmung Erwähnung finden.

§ 2. Gewichts- und Volumenbestimmung. Kennt man das Gewicht P und das Volumen V eines Körpers, so findet man entsprechend der ursprünglichen Definition des Dichtebegriffes die Dichte δ des gegebenen Körpers nach der Formel

$$\delta = \frac{P}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

In Ausnahmefällen, wenn die Körper z. B. sehr regelmäfsige Form haben oder eine ungefüge Gröfse, kann man das Volumen bisweilen, falls man die geometrische Form des Körpers (Kugel, Cylinder, Parallelepipedon u. s. w.) kennt, durch Rechnung ermitteln. In anderen Fällen kann man das Volumen V mit Hülfe des Volumenometers (S. 331) bestimmen. Ist keine grofse Genauigkeit erforderlich, so kann man auf diese Weise die Dichte von pulverförmigen oder in Wasser löslichen Körpern bestimmen.

§ 3. Bestimmung des verdrängten Wasservolumens. Giefst man in einen graduierten und kalibrierten Cylinder Wasser bis zu einem bestimmten Teilstrich und taucht darauf den zu untersuchenden Körper, dessen Gewicht P zuvor bestimmt sein mufs, hinein, so giebt die Gröfse, um welche der Wasserspiegel steigt, direkt das Volumen V an. Geht der Körper in Wasser nicht unter, so hat man an Stelle des Wassers eine andere, leichtere Flüssigkeit zu nehmen oder einen anderen schwereren Körper von bekanntem Volumen an den zu untersuchenden anzubringen.

Man kann auch ein mit einer seitlichen Ausflufsröhre versehenes Gefäfs verwenden, das man dann bis zu dieser Röhre mit Wasser füllt. Wiegt man dann die Wassermenge, welche beim Eintauchen des Körpers überfliefst, so kann man hieraus das gesuchte Volumen V finden. Es ist dies die Methode, die bereits von Al-Biruni († 1039), einem arabischen Gelehrten, welcher im nordwestlichen Indien lebte, angewandt worden ist.

§ 4. Methode der Herstellung einer Flüssigkeit von derselben Dichte. Die Dichte eines festen Körpers kann dadurch bestimmt werden, dafs man eine Flüssigkeit zu finden sucht, in welcher der gegebene Körper weder schwimmt, noch niedersinkt. Auf S. 629, wo von der Diffusion der Flüssigkeiten die Rede war, wurde auf eine analoge, aber sozusagen umgekehrte Methode der Dichtebestimmung von Flüssigkeiten verwiesen.

Als Flüssigkeiten können nach Retgers[1]) dienen eine Mischung von Methylenjodid (CH_2J_2, $\delta = 3{,}3$) und Benzol oder Xylol; ferner eine Mischung von Jodsilber und Jodkalium oder Jodbaryumlösungen u. s. w. Zum selben Zwecke können auch verwendet werden: Bromal (CBr_3COH, $\delta = 3{,}34$), Jodal (CJ_3COH, $\delta = 3{,}7$ bis $3{,}8$), kieselsaures Jodoform ($SiHJ_3$, $\delta = 3{,}4$), Lösung von Selen in Bromselen ($SeBr$, $\delta = 3{,}7$), Vierbromacetylen ($CHBr_2 — CHBr_2$, $\delta = 3{,}0011$ bei 6°), welches billig ist, sich nicht an der Luft verändert und mit Äther in allen Verhältnissen mischt[2]). Die Dichte der erhaltenen Mischung kann darauf mit Hülfe des Pyknometers (S. 540) bestimmt werden. Schwerere Körper kann man in ein Stück Paraffin einbetten oder an ihnen einen Haken aus Glas befestigen; die Einwirkung dieser Körper kann hernach eliminiert werden. Warrington (vergl. S. 539) hat auch einen Apparat zur Dichtebestimmung fester Körper konstruiert. Derselbe schwebt bei t^0 in Wasser, wenn sich in seinem unteren Teile p Gramm Quecksilber oder in seinem Inneren P Gramm des Körpers und p_1 Gramm Quecksilber befinden. Sind D, δ und δ_1 die Dichten von Wasser, dem zu untersuchenden Körper und Quecksilber bei t^0, so ist offenbar

$$P - \frac{P}{\delta} D = (p - p_1) - \frac{p - p_1}{\delta_1} D$$

oder

$$P\left(1 - \frac{D}{\delta}\right) = (p - p_1)\left(1 - \frac{D}{\delta_1}\right).$$

§ 5. **Aräometermethode.** Mit Hülfe eines Aräometers von konstantem Volumen (Fig. 285 auf S. 544) kann man ebenfalls die Dichte fester Körper bestimmen. Sei p das Gewicht der auf der Schale C befindlichen Gewichtstücke, wenn das Aräometer bis zum Teilstrich D eingesunken ist; hat man dem auf C gelegten Körper noch die Gewichtstücke p_1 hinzuzufügen und falls der Körper nach B gebracht ist, die Gewichtstücke p_2, so ist das Gewicht des Körpers $P = p - p_1$, sein Gewichtsverlust im Wasser $p_2 - p_1$, also ist

$$\delta = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

§ 6. **Methode der Jollyschen Federwage.** Auf S. 542 war eine Beschreibung der in Fig. 284 abgebildeten Jollyschen Federwage gegeben worden. Man kann dieselbe zur Bestimmung von δ in zweierlei Weise benutzen.

---

[1]) Zeitschr. f. phys. Chem. 3, 289, 1889; 4, 189, 1889; 11, 328, 1893.
[2]) Muthmann, Zeitschr. f. Kryst. 30, 73, 1898.

1. Die erste Methode ist der Aräometermethode analog. Zuerst wird auf die Schale c das Gewicht p, darauf das Gewicht p_1 samt dem zu untersuchenden Körper gebracht und endlich das Gewicht p_2 auf c, der Körper auf d, wobei der Zeiger m jedesmal auf denselben Teilstrich einspielen mufs. Den Wert von δ findet man dann nach Formel (3).

2. Nehmen wir an, dafs 0,1 g, welche sich auf c befinden, eine Verschiebung des Zeigers m um n Teilstriche veranlassen. Man bringt dann den Körper zunächst nach c und hierauf nach d und verschiebt den Träger B jedesmal derart, dafs sich die Schale inmitten der im Glase befindlichen Flüssigkeit einstellt; verschiebt sich dann der Zeiger im ersten Falle um n_1, im zweiten um n_2 Teilstriche, so ist das Gewicht des Körpers innerhalb der Luft $P = 0{,}1\,\frac{n_1}{n}$ Gramm, im Wasser dagegen $0{,}1\,\frac{n_2}{n}$ Gramm. Der Gewichtsverlust beträgt $Q = 0{,}1\,\frac{n_1 - n_2}{n}$ Gramm und die gesuchte Dichte ist

$$\delta = \frac{P}{Q} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wie man sieht, kommt die Zahl n in obigem Ausdrucke nicht vor: sie war unter der Voraussetzung gefunden worden, dafs die Verschiebung des Zeigers der Wagebelastung proportional sei.

§ 7. **Pyknometermethode.** In § 4 auf S. 540 hatten wir mehrere Pyknometer kennen gelernt, welche zur Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten dienten. Mit Hülfe des Pyknometers kann man auch die Dichte von festen Körpern bestimmen, doch mufs das Pyknometergefäfs zu diesem Zwecke einen genügend breiten Hals haben, damit man den untersuchenden Körper in das Gefäfs einführen kann. In Fig. 384 (a. f. S.) ist dasselbe Pyknometer dargestellt, welches wir bereits S. 541, Fig. 281 kennen lernten. Ist p_1 das Gewicht des mit Wasser gefüllten Pyknometers, p_2 das Gewicht der zu untersuchenden Substanz und p_3 das Gewicht des bis m mit Wasser gefüllten und die Substanz enthaltenden Pyknometers. In diesem Falle ist das Gewicht des verdrängten Wassers

$$p_1 - (p_3 - p_2) = p_1 + p_2 - p_3$$

und daher

$$\delta = \frac{p_2}{p_1 + p_2 - p_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

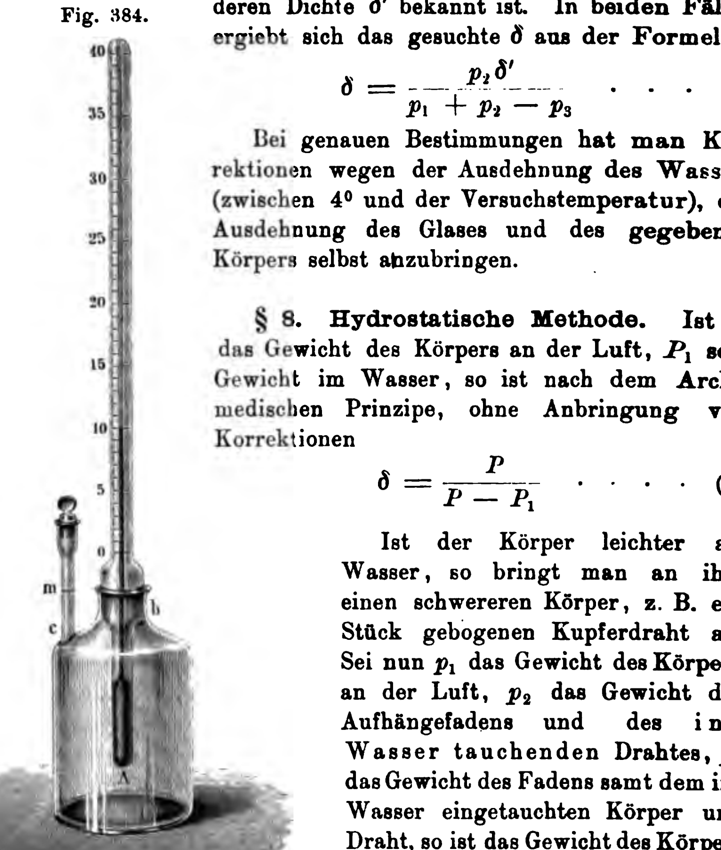
Darf der Körper, wie z. B. Na weder an der Luft gewogen, noch ins Wasser gebracht werden, so nimmt man statt des Wassers Petroleum, dessen Dichte δ' zuvor bestimmt wird. Das Gewicht p_2 wird dadurch gefunden, dafs man das Pyknometer zuvor bis zur Hälfte

mit Petroleum füllt, abwägt, darauf das Natrium hineinbringt und dann von neuem wägt.

Ist der Körper in Wasser löslich, so nimmt man an Stelle von Wasser eine andere Flüssigkeit, in der sich der Körper nicht löst und deren Dichte δ' bekannt ist. In beiden Fällen ergiebt sich das gesuchte δ aus der Formel

$$\delta = \frac{p_2 \delta'}{p_1 + p_2 - p_3} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Fig. 384.



Bei genauen Bestimmungen hat man Korrektionen wegen der Ausdehnung des Wassers (zwischen 4° und der Versuchstemperatur), der Ausdehnung des Glases und des gegebenen Körpers selbst anzubringen.

§ 8. **Hydrostatische Methode.** Ist P das Gewicht des Körpers an der Luft, P_1 sein Gewicht im Wasser, so ist nach dem Archimedischen Prinzipe, ohne Anbringung von Korrektionen

$$\delta = \frac{P}{P - P_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ist der Körper leichter als Wasser, so bringt man an ihm einen schwereren Körper, z. B. ein Stück gebogenen Kupferdraht an. Sei nun p_1 das Gewicht des Körpers an der Luft, p_2 das Gewicht des Aufhängefadens und des ins Wasser tauchenden Drahtes, p_3 das Gewicht des Fadens samt dem ins Wasser eingetauchten Körper und Draht, so ist das Gewicht des Körpers im Wasser gleich der negativen Gröfse $p_3 - p_2$, der Gewichtsverlust gleich

$$p_1 - (p_3 - p_2) = p_1 + p_2 - p_3$$

und somit

$$\delta = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hat man es mit einem pulverförmigen Körper zu thun, so verfährt man in ähnlicher Weise, wobei hier die Rolle des Kupferdrahtes ein kleines Glasgefäfs mit Vaselin vertritt (z. B. ein Uhrgläschen). Der zuvor an der Luft gewogene pulverförmige Körper wird ins Vaselin eingebettet. Die Formel (8) gilt auch für diesen Fall.

Die in diesem Falle erforderlichen Korrektionen sollen hier nicht weiter besprochen werden; ziemlich ausführlich ist eine derselben bereits auf S. 348 behandelt worden.

Die Einrichtung der Wagen, welche zum Wägen von Körpern in Wasser und anderen Flüssigkeiten dienen, ist schon auf S. 542 beschrieben worden. Zu weniger genauen Bestimmungen kann eine einarmige Wage wie die in Fig. 188 auf S. 354 abgebildete dienen, welche eingehender auf S. 542 behandelt worden ist.

Anstatt den Körper am Wagebalken zu befestigen und seinen scheinbaren Gewichtsverlust im Wasser zu bestimmen, kann man, wenn die Wage nicht dementsprechend eingerichtet ist, auch folgendermaſsen verfahren. Man stellt auf eine der Wagschalen ein Gefäſs mit Wasser und bestimmt nun die Gewichtszunahme, welche das Gefäſs erfährt, wenn man den mittels eines Fadens an einem neben der Wage stehenden Stative befestigten Körper ins Wasser taucht. Diese Gewichtszunahme ist gleich dem gesuchten Gewichtsverlust, den der Körper im Wasser erleidet.

Guglielmo hat gezeigt, wie man sein völlig untertauchendes Aräometer (s. S. 545) benutzen kann, um die Dichte minimaler Mengen eines festen Körpers zu bestimmen.

§ 9. Specifisches, Atom- und Molekularvolumen. In den letzten Paragraphen, sowie in den vorhergehenden beiden Abschnitten haben wir die Methoden zur Bestimmung der Dichte δ von gasförmigen, flüssigen und festen Körpern kennen gelernt. Diese Gröſse ist numerisch gleich dem Gewichte der Volumeneinheit der gegebenen Substanz. Der reciproke Wert hiervon ist numerisch gleich dem Volumen, welches von der Gewichtseinheit derselben Substanz eingenommen wird und heiſst das specifische Volumen dieser Substanz. Bezeichnet man dasselbe mit v, so ist

$$v = \frac{1}{\delta} = \frac{V}{P} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (9)$$

wo P das Gewicht, V das Volumen der Substanz ist; beide sollen wie gewöhnlich in Grammen resp. Kubikcentimetern ausgedrückt werden.

Vergleicht man miteinander nicht die gleichen Gewichtsmengen der verschiedenen Substanzen, sondern nimmt man von jeder ein Grammmolekül, d. h. so viel Gramm, als im Molekulargewichte μ der Substanz Einheiten enthalten sind, so nennt man die von diesen Substanzmengen eingenommenen Volumina w die Molekularvolumina der Substanzen, z. B. die Anzahl der Kubikcentimeter, welche von 23 + 35,5 = 58,5 g NaCl eingenommen werden. Somit ist allgemein

$$w = \mu v = \frac{\mu V}{P} = \frac{\mu}{\delta} \quad \cdots \cdots \quad (10)$$

Der letztere Bruch ist für die Berechnung von w am bequemsten, da μ und δ für viele Körper bekannt sind.

Aus dem auf S. 407 erörterten folgt, daſs alle Gase die gleichen Molekularvolumina besitzen, wenigstens insoweit, als man die Eigenschaften der Gase mit denen idealer Gase identifizieren kann.

Die Molekularvolumina verschiedener Flüssigkeiten sind zuerst von Kopp (1842) untersucht worden; derselbe fand für sie das einfache Gesetz, daſs das Molekularvolumen w einer Flüssigkeit beim Siedepunkt eine additive Eigenschaft (S. 615) ist, d. h. gleich der Summe der Atomvolumina jener Atome ist, welche im Molekül enthalten sind. Hierbei ist das Atomvolumen von C 11; H 5,5; S 22,6; Cl 22,8; Br 27,8; J 37,5 u. s. w. Für O hat man zwei Fälle zu unterscheiden: ist das Atom Sauerstoff mit beiden Affinitäten an ein Kohlenstoffatom gebunden (Carbonylgruppe), so ist für dasselbe $w = 12,2$; ist der Sauerstoff jedoch nur mit einer Affinität an ein Kohlenstoffatom gebunden, mit der anderen aber an ein anderes Atom des Sauerstoffs oder eines anderen Elementes (Hydroxylgruppe), so ist $w = 7,8$. Für die Essigsäure $CH_3CO(OH)$ ist z. B. $2\,C = 22$, $4\,H = 22$, O (Karbonyl) $= 12,2$, O (Hydroxyl) $= 7,8$, was in Summa 64,0 giebt. Die Beobachtung giebt $w = 63,7$. Es kommen indes viele Abweichungen vom Koppschen Gesetze vor. Sehr leicht möglich ist es, daſs man genauere Gesetze finden würde, wenn man die Molekularvolumina nicht bei den Siedetemperaturen, sondern bei solchen absoluten Temperaturen vergleichen würde, die gleiche Bruchteile der absoluten kritischen Temperaturen (S. 427) darstellen.

Auch für die festen Körper hat man verschiedene regelmäſsige Beziehungen gefunden, die man jedoch nicht als Gesetze bezeichnen kann. So hat z. B. Schröder (1859) gefunden, daſs die Molekularvolumina der Haloidsalze von K, Na und Ag eine einfache Beziehung zeigen, wie aus folgenden Zahlen für w hervorgeht:

KCl	37,4	NaCl	27,1	AgCl	25,6
KBr	44,3	NaBr	33,8	AgBr	31,8
KJ	54,0	NaJ	43,5	AgJ	42,0.

Für alle Jodverbindungen ist w um etwa 16 gröſser, als für die entsprechenden Chlorverbindungen; auch in den Horizontalreihen obiger Tabelle sind die Differenzen der Zahlen ziemlich konstant.

Für die freien Elemente ist das Atomvolumen eine periodische Funktion des Atomgewichtes.

Die Atomgewichte von flüssigem Cl und Br sind gleich 22,7 und 26,9, d. h. kommen den von Kopp gefundenen Zahlen nahe. Bemerkt sei hier noch, daſs isomorphe Verbindungen (S. 681) wenig verschiedene Molekularvolumina haben. So ist z. B. für Chromalaun

$CrK(SO_4)_2 + 12 H_2O$ $\mu = 499$, $\delta = 1{,}8$ und $w = 277$, für Thonerdealaun $Al K (SO_4)_2 + 12 H_2O$ ist $\mu = 474$, $\delta = 1{,}7$ und $w = 279$.

Eine ausführliche Erörterung der auf Molekularvolumina bezüglichen Fragen findet man in der Schrift von A. Horstmann: Beziehung zwischen der Raumerfüllung fester und flüssiger Körper und deren chemischen Zusammensetzung (Graham-Otto, Lehrbuch der Chemie I, 3, 352—464, Braunschweig 1898).

§ 10. **Dichte von Legierungen.** Die Dichte einer Legierung stellt bisweilen eine additive Eigenschaft dar; so sind z. B. die Volumina der Legierungen von Cu und Au oder Sb und Bi gleich der Summe der Volumina ihrer Bestandteile. Dagegen ist das Volumen der Legierungen von Cu — Sn, Ag — Au, Sn — Au, Pb — Bi kleiner, das Volumen der Legierungen von Sb — Sn, Sn — Cd, Pb — Cd gröfser als die Summe der Volumina der in ihnen enthaltenen Metalle. Einige Legierungen zeigen besondere Eigentümlichkeiten, wie z. B. die Legierung aus Fe und Ni (22 bis 25 Proz.), welche die Besonderheit besitzen, dafs sie bei einer und derselben Temperatur gewissermafsen in zwei verschiedenen Zuständen vorkommt, wobei der Übergang aus einem Zustande in den anderen durch Abkühlung bis auf — 20° oder — 30° und durch Erwärmung auf 600° erfolgt. Nach voraufgegangener Abkühlung ist die Legierung magnetisierbar; diese Fähigkeit verliert sie indes bei 600° und mufs man sie, um ihr dieselbe zurückzugeben, von neuem stark abkühlen. Die Dichte δ der Legierung ist verschieden, je nachdem die zuerst vorgenommene Temperaturänderung eine Erhitzung oder Abkühlung war.

Für die Dichte dieser Legierung erhält man:

	25 Proz. Ni	22 Proz. Ni
Nach Erhitzung (unmagnetisch) . . .	8,15	8,13
„ Abkühlung (magnetisch) . . .	7,88	7,96.

Auch noch durch andere Eigenschaften unterscheiden sich diese beiden verschiedenen Zustände der erwähnten Legierung.

N. Bachmetjew (Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 25, 219, 1893) u. a. haben die Dichte der Amalgame untersucht. Hierbei fand man, dafs das Volumen der Amalgame von Magnesium, Wismut, Zinn, Platin, Zink und Silber gröfser, das Volumen der Amalgame von Cadmium und Kupfer kleiner ist als die Rechnung ergiebt, bei welcher vorausgesetzt war, dafs die Lösung des Metalles im Quecksilber ohne Volumenänderung erfolgt. Besonders bemerkenswert ist das Amalgam von Magnesium, dessen Dichte bei 5 Proz. Magnesiumgehalt nach Bachmetjew gleich 10,23 ist, während die Rechnung 13,03 fordert. Die Differenz beträgt hier 21,5 Proz. In seiner letzten Arbeit (Ebenda

S. 265) hat Bachmetjew die Eigenschaften der Amalgame von Kadmium untersucht. Laborde [Journ. de phys. (3) 5, 547, 1896] hat gefunden, dafs die Dichte fast aller Legierungen von Fe und Al gröfser als die Dichte von Fe ist.

Drittes Kapitel.

Deformation fester Körper.

§ 1. Allgemeines über die Deformation fester Körper. Wie wir sahen, setzt ein fester Körper jeder relativen Lagenänderung seiner Teilchen einen gewissen Widerstand entgegen. Eine solche Lagenänderung der Teilchen wollen wir als Deformation bezeichnen; sie kann nur durch Kräfte hervorgerufen werden, die von aufsen her auf den Körper einwirken. Aller Wahrscheinlichkeit nach giebt es keinerlei Deformation eines festen Körpers, die nicht auch mit einer Formenänderung des Körpers, d. h. einer Änderung der Gestalt seiner Oberfläche verknüpft wäre. Nichtsdestoweniger hat man diejenigen Fälle, wo die Formenänderung unmittelbar in die Augen fällt und äufserlich genommen das Wesen der Deformation darstellt (z. B. die Biegung eines Stabes), während wir auf die Lagenänderung der Teilchen nur gewisse Rückschlüsse ziehen können, wohl zu unterscheiden von den Fällen von Deformation, in denen umgekehrt die Formenänderung, wofern sie vorhanden ist, unbemerkt bleibt, während die Lagenänderung der Teilchen von vornherein gegeben ist und gewissermafsen das Wesen der Deformation darstellt. Diesen zweiten Fall haben wir z. B. in der Torsion eines Stabes oder Drahtes vor uns, bei welcher die äufsere Form sich meist nur ganz unmerklich ändert.

Die wichtigsten Arten der Deformation sind: die Ausdehnung und ihr entgegengesetzt die Kompression, die entweder blofs longitudinal, d. h. in einer Richtung erfolgen oder allseitig sein können; ferner die Torsion und die Biegung. Kompliziertere Deformationen kann man als Kombinationen obiger drei einfachen Fälle ansehen.

Jede Deformation erscheint als Folge irgend einer äufseren Ursache, die sowohl eine Einzelkraft, als auch ein Kräftepaar sein kann; wir wollen diese Ursache deformierende Kraft nennen und mit P bezeichnen. Die Deformation selbst stellt die Änderung einer gewissen Gröfse dar, die mit x bezeichnet werden möge; sie kann eine Linie, Fläche, Volumen, Winkel u. s. w. sein. Die Gröfse der Änderung von x, also die Deformation selbst bezeichnen wir mit Δx.

In engen Grenzen, für geringfügige Deformationen gültig sind folgende drei Sätze, die als Grundlage für unsere weiteren Schlüsse dienen.

1. Die Gröfse der relativen Deformation $\Delta x : x$ ist proportional der sie hervorrufenden deformierenden Kraft P. Dieser Satz ist von Hooke (1675) in den Worten „ut tensio, sic vis" ausgesprochen worden.

2. Ein Zeichenwechsel der deformierenden Kraft P ruft blofs einen Zeichenwechsel der Deformation Δx ohne Änderung ihres absoluten Wertes hervor. Kompression und Ausdehnung, Torsion nach der einen und nach der entgegengesetzten Seite rufen der absoluten Gröfse nach gleiche Deformationen hervor.

3. Wirken mehrere äufsere deformierende Kräfte ein, so entsteht eine Deformation, welche durch die Summe der einzelnen, von den einzelnen Kräften hervorgerufenen Deformationen bestimmt wird.

Obige drei Sätze behalten, wie erwähnt, ihre Geltung für jede Art von Deformation, nur in einem mehr oder weniger eng umgrenzten Gebiete. In Wirklichkeit sind die Deformationen Δx selbst in den einfachsten Fällen Funktionen der deformierenden Kraft P oder mit anderen Worten, die bei der Deformation auftretenden und der deformierenden Kraft P das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte sind Funktionen der entstandenen Deformation. Aufserhalb der Grenzen, wo P und Δx aufhören proportional zu sein, kann man sich folgender empirischer Formel bedienen: $P = a\Delta x + b(\Delta x)^2$, in welcher a und b Konstanten sind. Es giebt indes einen Fall (Torsion dünner Drähte oder Fäden), wo die Deformation (der Drehungswinkel des einen Endes) in sehr weiten Grenzen der deformierenden Kraft (dem Momente des wirkenden Kräftepaares) proportional ist.

Im folgenden wird vorausgesetzt werden, dafs der zu deformierende Körper homogen und isotrop ist.

Leider ist die auf die Deformationserscheinungen bezügliche Terminologie keine ganz einheitliche, und werden ein und dieselben Gröfsen von verschiedenen Autoren in verschiedener Weise bezeichnet. Wir wollen in allen Fällen von Deformation als Koeffizienten solche im allgemeinen sehr kleine Gröfsen bezeichnen, durch welche die Gröfse der Deformation bestimmt wird, welche zur Ursache die Einheit der deformierenden Kraft hat. Als Moduln wollen wir die reciproken Werte jener Koeffizienten bezeichnen, also im allgemeinen grofse Zahlen, die als Mafs für die deformierende Kraft dienen, durch welche die Einheit der Deformation hervorgerufen wird oder richtiger hervorgerufen würde, wenn Δx und P einander proportional bleiben würden.

Die Lehre von den Deformationen fester Körper bildet die Grundlage für die Lehre von der Festigkeit der Baumaterialien, welche

S. 265) hat Bachmetjew die Eigenschaften der Amalgame von Kadmium untersucht. Laborde [Journ. de phys. (3) 5, 547, 1896] hat gefunden, dafs die Dichte fast aller Legierungen von Fe und Al gröfser als die Dichte von Fe ist.

Drittes Kapitel.

Deformation fester Körper.

§ 1. Allgemeines über die Deformation fester Körper. Wie wir sahen, setzt ein fester Körper jeder relativen Lagenänderung seiner Teilchen einen gewissen Widerstand entgegen. Eine solche Lagenänderung der Teilchen wollen wir als Deformation bezeichnen; sie kann nur durch Kräfte hervorgerufen werden, die von aufsen her auf den Körper einwirken. Aller Wahrscheinlichkeit nach giebt es keinerlei Deformation eines festen Körpers, die nicht auch mit einer Formenänderung des Körpers, d. h. einer Änderung der Gestalt seiner Oberfläche verknüpft wäre. Nichtsdestoweniger hat man diejenigen Fälle, wo die Formenänderung unmittelbar in die Augen fällt und äufserlich genommen das Wesen der Deformation darstellt (z. B. die Biegung eines Stabes), während wir auf die Lagenänderung der Teilchen nur gewisse Rückschlüsse ziehen können, wohl zu unterscheiden von den Fällen von Deformation, in denen umgekehrt die Formenänderung, wofern sie vorhanden ist, unbemerkt bleibt, während die Lagenänderung der Teilchen von vornherein gegeben ist und gewissermafsen das Wesen der Deformation darstellt. Diesen zweiten Fall haben wir z. B. in der Torsion eines Stabes oder Drahtes vor uns, bei welcher die äufsere Form sich meist nur ganz unmerklich ändert.

Die wichtigsten Arten der Deformation sind: die Ausdehnung und ihr entgegengesetzt die Kompression, die entweder blofs longitudinal, d. h. in einer Richtung erfolgen oder allseitig sein können; ferner die Torsion und die Biegung. Kompliziertere Deformationen kann man als Kombinationen obiger drei einfachen Fälle ansehen.

Jede Deformation erscheint als Folge irgend einer äufseren Ursache, die sowohl eine Einzelkraft, als auch ein Kräftepaar sein kann; wir wollen diese Ursache deformierende Kraft nennen und mit P bezeichnen. Die Deformation selbst stellt die Änderung einer gewissen Gröfse dar, die mit x bezeichnet werden möge; sie kann eine Linie, Fläche, Volumen, Winkel u. s. w. sein. Die Gröfse der Änderung von x, also die Deformation selbst bezeichnen wir mit Δx.

In engen Grenzen, für geringfügige Deformationen gültig sind folgende drei Sätze, die als Grundlage für unsere weiteren Schlüsse dienen.

1. Die Gröfse der relativen Deformation $\Delta x : x$ ist proportional der sie hervorrufenden deformierenden Kraft P. Dieser Satz ist von Hooke (1675) in den Worten „ut tensio, sic vis“ ausgesprochen worden.

2. Ein Zeichenwechsel der deformierenden Kraft P ruft blofs einen Zeichenwechsel der Deformation Δx ohne Änderung ihres absoluten Wertes hervor. Kompression und Ausdehnung, Torsion nach der einen und nach der entgegengesetzten Seite rufen der absoluten Gröfse nach gleiche Deformationen hervor.

3. Wirken mehrere äufsere deformierende Kräfte ein, so entsteht eine Deformation, welche durch die Summe der einzelnen, von den einzelnen Kräften hervorgerufenen Deformationen bestimmt wird.

Obige drei Sätze behalten, wie erwähnt, ihre Geltung für jede Art von Deformation, nur in einem mehr oder weniger eng umgrenzten Gebiete. In Wirklichkeit sind die Deformationen Δx selbst in den einfachsten Fällen Funktionen der deformierenden Kraft P oder mit anderen Worten, die bei der Deformation auftretenden und der deformierenden Kraft P das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte sind Funktionen der entstandenen Deformation. Aufserhalb der Grenzen, wo P und Δx aufhören proportional zu sein, kann man sich folgender empirischer Formel bedienen: $P = a\Delta x + b(\Delta x)^2$, in welcher a und b Konstanten sind. Es giebt indes einen Fall (Torsion dünner Drähte oder Fäden), wo die Deformation (der Drehungswinkel des einen Endes) in sehr weiten Grenzen der deformierenden Kraft (dem Momente des wirkenden Kräftepaares) proportional ist.

Im folgenden wird vorausgesetzt werden, dafs der zu deformierende Körper homogen und isotrop ist.

Leider ist die auf die Deformationserscheinungen bezügliche Terminologie keine ganz einheitliche, und werden ein und dieselben Gröfsen von verschiedenen Autoren in verschiedener Weise bezeichnet. Wir wollen in allen Fällen von Deformation als Koeffizienten solche im allgemeinen sehr kleine Gröfsen bezeichnen, durch welche die Gröfse der Deformation bestimmt wird, welche zur Ursache die Einheit der deformierenden Kraft hat. Als Moduln wollen wir die reciproken Werte jener Koeffizienten bezeichnen, also im allgemeinen grofse Zahlen, die als Mafs für die deformierende Kraft dienen, durch welche die Einheit der Deformation hervorgerufen wird oder richtiger hervorgerufen würde, wenn Δx und P einander proportional bleiben würden.

Die Lehre von den Deformationen fester Körper bildet die Grundlage für die Lehre von der Festigkeit der Baumaterialien, welche

ihrerseits eine wichtige Rolle in der Baukunst spielt. Die hierauf bezüglichen praktischen Fragen können in diesem Buche keinen Raum finden. Es sei hier blofs darauf hingewiesen, dafs im Jahre 1891 zu Paris eine besondere Kommission begründet worden ist, welche Methoden zur Untersuchung von Baumaterialien auszuarbeiten hat. Zum Vorsitzenden dieser Kommission wurde A. Picard ernannt und die Kommission selbst in zwei Sektionen gegliedert, von denen sich die eine die Untersuchung von Metallen, die andere die Untersuchung der übrigen Baumaterialien zur Aufgabe stellte. Die Arbeiten dieser Kommission sind unter dem Titel: „Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction" veröffentlicht worden, und ist der erste Band derselben im Jahre 1894 erschienen.

§ 2. Elastizitätsgrenze, Bruch und permanente Deformation. Durch geringfügige Kräfte P hervorgerufene Deformationen verschwinden im allgemeinen, sobald jene Kräfte zu wirken aufhören. Bei Zunahme von P wird indes schliefslich eine Deformation erreicht, die beim Verschwinden von P nicht ganz verschwindet; es bleibt ein Deformationsrest übrig, der gewissermafsen die unvertilgbare Spur der ehemaligen Einwirkung auf den Körper darstellt. Nimmt P noch weiter zu, so nimmt sowohl die zeitweilige Deformation, als auch der Deformationsrest zu. Beim Auftreten der ersten Spur eines Deformationsrestes sagt man, die Elastizitätsgrenze sei erreicht.

Nehmen wir an, die deformierende Kraft P habe die totale Deformation a herorgerufen, welche aus zwei Teilen ($a = b + c$) besteht, von denen der eine (b) die elastische Deformation sei, die zugleich mit P verschwindet, der andere (c) dagegen die permanente Deformation oder den Deformationsrest darstellt. Wenn jetzt P zu wirken aufhört und es wirkt eine deformierende Kraft $P' < P$ ein, so bringt sie blofs die elastische Deformation $b' < b$ hervor, während doch dieselbe deformierende Kraft P', wenn sie auf den noch nicht deformierten Körper wirkt, in ihm aufser b' noch eine restierende Deformation $c' < c$ hervorruft. Ist $P' = P$, so wird blofs die elastische Deformation $b' = b$ hervorgerufen. Ist endlich $P' > P$, so entsteht aufser der elastischen Deformation $b' > b$ noch eine neue restierende Deformation. Demgemäfs ergiebt sich, dafs die Wirkung der deformierenden Kräfte davon abhängt, welchen Kräften der gegebene Körper schon vorher unterworfen war, obige Wirkung hängt also sozusagen von der Vergangenheit der Körper ab. Man kann nun nach obigem auch umgekehrt die maximale deformierende Kraft P, welche auf einen Körper gewirkt hat, ermitteln, wenn man die Kraft P' bestimmt, welche die Elastizitätsgrenze überschreiten läfst, d. h. eine restierende Deformation hervorruft. Offenbar ist $P = P'$. Es ist diese Methode natürlich nur dann an-

wendbar, wenn die Kraft P ihrerseits schon einen Deformationsrest hinterlassen hat. Fürst A. Gagarin hat das Auftreten des Deformationsrestes bei Konstruktion eines Apparates in Anwendung gebracht, der dazu dient, den Druck zu ermitteln, welchem ein Körper ausgesetzt worden ist, z. B. den Druck der Pulvergase auf eine kleine Kupfersäule im Inneren eines Flintenlaufes oder eines Kanonenrohres. Im Augenblicke, wo der Schufs losgeht, wird dies Säulchen zusammengedrückt. Mit Hülfe seines Apparates (einer Presse) bestimmt nun Gagarin denjenigen Druck P', bei dem die kleine Messingsäule das Auftreten von Deformationsresten zeigt; P' ist dann gleich dem gesuchten Drucke der Pulvergase.

Körper, deren Elastizitätsgrenze erst nach beträchtlichen vorausgegangenen Deformationen erreicht wird, heifsen im allgemeinen elastische, wie z. B. Stahl, Glas, Kautschuk, Elfenbein u. s. w. Umgekehrt nennt man solche Körper unelastisch, deren Elastizitätsgrenze schon durch verhältnismäfsig kleine Kräfte P und bei unbeträchtlichen vorausgegangenen Deformationen $\varDelta x$ erreicht wird; zu diesen Körpern gehört z. B. das Blei. Man kann natürlich zwischen elastischen und unelastischen Körpern keine strenge Grenze ziehen und eine jede gegebene Substanz hat ihre besondere Elastizitätsgrenze. Nehmen P und $\varDelta x$ immer weiter zu, so tritt schliefslich Trennung der Teilchen ein, und der Körper zerfällt in Stücke (er wird zerrissen, zerdrückt, zerbrochen u. s. w.). Körper, bei denen diese Trennung eintritt, ehe noch die Elastizitätsgrenze erreicht ist, heifsen spröde. Solche Körper dagegen, bei welchen die Elastizitätsgrenze schnell erreicht wird und beträchtliche Deformationsreste auftreten, heifsen zähe.

Einige Autoren sehen als charakteristisch für die Elastizität eines Körpers die Gröfse derjenigen deformierenden Kraft an, welche erforderlich ist, um eine bestimmte Deformation hervorzurufen. Bei dieser Auffassung hat man Kautschuk oder Gummielastikum, die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch sehr elastisch sind, zu den Körpern mit sehr geringer Elastizität zu rechnen. Wir wollen indes den Grad der Elastizität daran erkennen, wie schnell die Elastizitätsgrenze für die betreffende Substanz erreicht wird.

In den Erscheinungen der Elastizität spielt eine sehr wichtige Rolle auch die Zeitdauer: die Deformation, welche durch das Auftreten oder eine Änderung der deformierenden Kräfte hervorgerufen wird, erreicht nicht sogleich ihren Endwert, sondern fährt fort sich im Verlaufe eines bisweilen recht grofsen Zeitintervalls zu ändern. Alle auf die Elastizität bezüglichen Versuche und Messungen, bei denen die Zeit, innerhalb deren eine deformierende Kraft wirkte oder welche seit der Änderung oder dem Aufhören derselben verflossen ist, unbeachtet gelassen ist, müssen daher in gewissem Sinne willkürlich und unbestimmt erscheinen. Wir werden auf diesen Punkt bei Besprechung

der elastischen Nachwirkung (§ 21) eingehender **zurückkommen.**

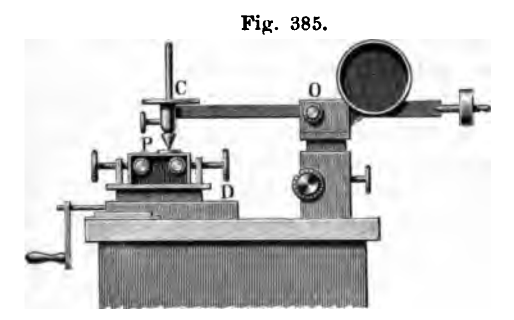
§ 3. Härte. Der Widerstand, den eine Substanz dem Eindringen eines anderen Körpers in dieselbe entgegensetzt, charakterisiert ihre Härte; hierbei braucht überhaupt auch nur eine Verletzung der Oberfläche stattzufinden, wie beim Ritzen und Schneiden. Von zwei Substanzen gilt diejenige als die härtere, welche die Oberfläche der anderen zu verletzen im stande ist oder bei hinreichendem Drucke in dieselbe einzudringen vermag (Meifsel, Bohrer). In der Mineralogie unterscheidet man zehn Härtegrade, als deren Vertreter folgende Substanzen gelten:

1. Talk } lassen sich mit dem	6. Feldspat.
2. Gips } Fingernagel ritzen.	7. Quarz } schneiden Glas.
3. Kalkspat.	8. Topas } schneiden Glas.
4. Flufsspat.	9. Korund } schneiden Glas.
5. Apatit.	10. Diamant } schneiden Glas.

Somit ist die Härte einer beliebigen Substanz nur durch eine Ziffer gekennzeichnet und stellt keine bestimmte Gröfse dar, die man nach der Art anderer physikalischer Gröfsen messen kann.

Zum Vergleichen der Härte von verschiedenen Substanzen, insbesondere Krystallen, kann das Sklerometer dienen (vergl. Fig. 385). Am Hebel OC, welcher sich um die Achse O dreht, ist die Schale C samt dem Stichel P befestigt; letzterer stützt sich auf den auf dem Tischchen D ruhenden Körper. Auf die Schale C legt man so viel Gewichtstücke, dafs beim Verschieben des Tischchens nach links oder nach rechts ein Strich auf der Oberfläche des untersuchten Körpers entsteht. Die Gröfse der verwendeten Belastung kann dann als ungefähres Mafs für die Härte des betreffenden Körpers dienen.

Fig. 385.



Im Jahre 1882 gab der früh verstorbene grofse Physiker H. Hertz eine streng wissenschaftliche Definition des Härtebegriffes. Stellt man sich vor, dafs auf einen kleinen kreisrunden Teil der Oberfläche eines Körpers ein sich allmählich steigernder Druck ausgeübt wird und dafs P der Druck ist, der hierbei auf die Oberflächeneinheit im mittleren Teile jenes Kreises wirkt. Für spröde Körper tritt alsdann ein Mo-

ment auf, wo im Inneren des untersuchten Körpers Bruch erfolgt und eine Spalte sich bildet. Die Gröfse des Druckes P in diesem Augenblicke dient als Mafs für die Härte des spröden Körpers. Die Theorie der Hertzschen Methode ist von Brillouin (1898) entwickelt worden. Auerbach (1891) hat einen Apparat konstruiert, bei welchem auf die ebene Oberfläche der untersuchten Substanz die konvexe Oberfläche eines anderen linsenförmigen Körpers aufgedrückt wird; die Gröfse der Berührungsfläche wird mit Hülfe eines Mikroskopes bestimmt. Für nichtspröde Körper machte Auerbach den Vorschlag, als Mafs der Härte jenen Maximaldruck gelten zu lassen, der auf die Oberflächeneinheit einwirken kann und bei dem die untersuchte Substanz sich der Form der den Druck ausübenden Linse vollkommen anpafst. Nimmt der Druck noch weiter zu, so dringt zwar die Linse noch tiefer in die Substanz ein, der Druck aber auf die Einheit der Berührungsfläche, die hierbei zunimmt, bleibt nun ungeändert. Auerbach hat (1896) auf diese Weise folgende Werte für die Härte verschiedener Substanzen, in Kilogrammen pro Quadratmillimeter ausgedrückt, gefunden, die somit als absolute Werte für die Härte gelten können:

Talk	5	Apatit	237
Gips	14	Adular	253
Steinsalz	20	Crownglas (Borsilikat)	274
Kalkspat	92	Quarz (⊥ zur Achse)	308
Flufsspat	110	Topas	525
Schweres Flintglas	170	Beryll	588
Leichtes „	210	Korund	1150

Rydberg (1900) fand, dafs die Härte der Elemente eine periodische Funktion des Atomgewichtes sei, dafs also auch diese Eigenschaft in dem periodischen System der Elemente eine Rolle spielt.

Die Härte einer Substanz hängt von der Art ihrer Bearbeitung ab; Eisen, Kupfer und andere Metalle haben, je nachdem sie gegossen, geschmiedet, gewalzt, gestreckt sind u. s. w. verschiedene Dichte und einen ungleichen Härtegrad.

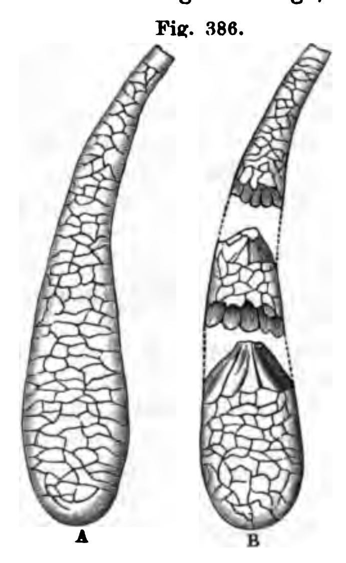
Die Härte der reinen Metalle nimmt bei Hinzufügung selbst sehr geringer Mengen verschiedener Stoffe in bedeutendem Mafse zu, wenn es sich hierbei um eine sogenannte feste Lösung, nicht aber um eine einfache Beimengung handelt. So bildet z. B. der Kohlenstoff im gehärteten Stahl eine homogene feste Lösung (Martensit), während der nicht gehärtete Stahl eine mechanische Mischung von Karbid und reinem Eisen darstellt.

Bottone (1873) fand, dafs die Härte reiner Metalle proportional dem Bruch $d:m$ ist, wo d die Dichte, m das Atomgewicht bedeutet. Diesen Bruch nennt Benedicks (1901) die Atomkonzentration des Metalles, so dafs also die Härte reiner Me-

talle proportional der Atomkonzentration ist. Hierin findet Benedicks eine Analogie mit dem Avogadroschen Gesetz, nach welchem der Druck des Gases bei gegebener Temperatur proportional der Atomkonzentration ist; es kann nun die Härte wohl als eine Art Druck aufgefaſst werden und nach Hertz, wie wir sahen, wird dieselbe ja auch durch einen Druck gemessen. Andererseits weist Benedicks darauf hin, daſs die Härte fester Lösungen (Legierungen) zugleich mit einer Gröſse wächst, die als osmotischer Druck aufgefaſst werden kann.

Von groſsem Einfluſs auf die Härte ist die schnelle Abkühlung einer stark erhitzten Substanz, welche man z. B. in Wasser oder eine andere Flüssigkeit eintaucht. Allbekannt ist es ja, wie sich geglühter und abgelassener Stahl durch ihre verschiedene Härte voneinander unterscheiden. Eine interessante Erscheinung bietet in dieser Beziehung auch das Glas dar. Kühlt man heiſses oder geschmolzenes Glas schnell ab, so erfolgt eine augenblickliche Kontraktion der Oberflächenschicht und auf die Masse im Inneren wird ein äuſserst starker Druck ausgeübt, so daſs dieselbe eine besondere labile Struktur annimmt. Der Zustand, in dem sich hier die Oberflächenschicht befindet, erinnert an die Oberflächenspannung, welche wir in der Lehre von den Flüssigkeiten kennen lernten. Glas dieser Art weist eine scheinbar sehr groſse Härte auf, zerbricht selbst dann nicht, wenn man auf dasselbe kräftig losschlägt, zerfällt indes in sehr kleine Stückchen, sobald nur die Kontinuität der Oberflächenschicht irgendwie beschädigt wird, wozu es hinreicht, eine wenn auch noch so kleine Schramme in dieselbe einzuritzen. Aus solchem schnellgekühlten Glase bestehen z. B. die sogenannten Bologneser Fläschchen, kleine dickwandige Gläschen, auf die man ziemlich kräftig loshämmern kann, ohne sie zu beschädigen, während sie durch den kleinsten Riſs, den sie erhalten, in Stücke gehen. Füllt man ein solches Fläschchen mit eisernen Nägeln und schüttelt es kräftig, so bleibt das Fläschen heil, wirft man dagegen ein noch so kleines Quarzkörnchen hinein, so zerspringt das Fläschchen, sobald die Oberfläche geritzt wird.

Fig. 386.



Die bekannten Glasthränen erhält man dadurch, daſs man geschmolzenes Glas in Wasser tropfen läſst; sie haben die Form eines

länglichen Tropfens mit einem Anhängsel, wie aus Fig. 386 A ersichtlich ist; bricht man den Glasfaden ab, so zerfällt die Glasthräne in kleine Stückchen. In Fig. 386 ist eine Glasthräne abgebildet, bei welcher die Bruchstücke wieder zu einem Ganzen zusammengesetzt sind und ersieht man namentlich aus Fig. 386 B die Anordnung der Bruchstücke. Löst man den Glasfaden ganz allmählich in Flufssäure auf, indem man vom Ende desselben beginnt, so zerspringt die Glasthräne in dem Moment, wo die Säure den etwas dickeren Teil des Anhängsels erreicht. Offenbar wird die ganze Masse der Glasthräne durch einen kleinen Streifen, der sich am Halse befindet, im Zustande labilen Gleichgewichtes erhalten.

§ 4. **Zusammenstellung der Gröfsen, welche in der elementaren Elastizitätslehre vorkommen.** Bei Betrachtung der verschiedenen Fälle von Deformation eines festen isotropen Körpers hat man es mit einer grofsen Anzahl verschiedener Gröfsen zu thun, für welche leider keine allgemein üblichen Bezeichnungen eingeführt sind, so dafs hierdurch die Lektüre der verschiedenen Lehrbücher und Abhandlungen nicht wenig erschwert wird. Die Zahl der zwischen jenen Gröfsen vorhandenen Relationen ist um zwei kleiner, als die Zahl der Gröfsen selbst, so dafs es möglich ist, alle jene Gröfsen durch zwei von ihnen auszudrücken, die zum Ausgangspunkt gewählt werden und die für die elastischen Eigenschaften einer gegebenen Substanz charakteristisch sind. Nun werden aber von den verschiedenen Autoren verschiedene Gröfsen zum Ausgangspunkt gewählt, woher es kommt, dafs man es mit einer beträchtlichen Zahl verschiedenartiger Formeln zu thun hat, wobei noch der Umstand mitspielt, dafs auch die für dieselben Gröfsen von den verschiedenen Autoren eingeführten Buchstaben nicht dieselben sind.

Zur Erleichterung für den Leser sei mit einer Übersicht über jene Gröfsen und die für sie geltenden Bezeichnungen begonnen, die im folgenden vorkommen werden. Es sollen dann die Herleitungen der zwischen jenen Gröfsen bestehenden Relationen folgen und darauf (im § 12) eine Zusammenstellung der verschiedenen Formeln, die man bei Wahl zweier Fundamentalgröfsen erhält, gegeben werden. Die Gröfsen, mit denen wir es im folgenden zu thun haben, sind:

1. α der Koeffizient der linearen Dilatation (Verlängerung) oder Kompression (Verkürzung) eines Stabes oder Drahtes;

2. E Dilatations- oder Kompressionsmodul, Elastizitätsmodul, Modul von Young; derselbe bezieht sich auf Stäbe oder Drähte;

3. α' Koeffizient der einseitigen Kompression einer Schicht;

4. E' Modul der einseitigen Kompression einer Schicht;

5. β Koeffizient der bei Längsausdehnung auftretenden Querkontraktion;

6. $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$ Verhältnis der Querkontraktion zur Längsstreckung, Koeffizient von Poisson;

7. η Koeffizient der Volumenvergröfserung beim Zug;

8. γ Koeffizient der allseitigen Kompression;

9. K Modul der allseitigen Kompression;

10. N Scherungsmodul;

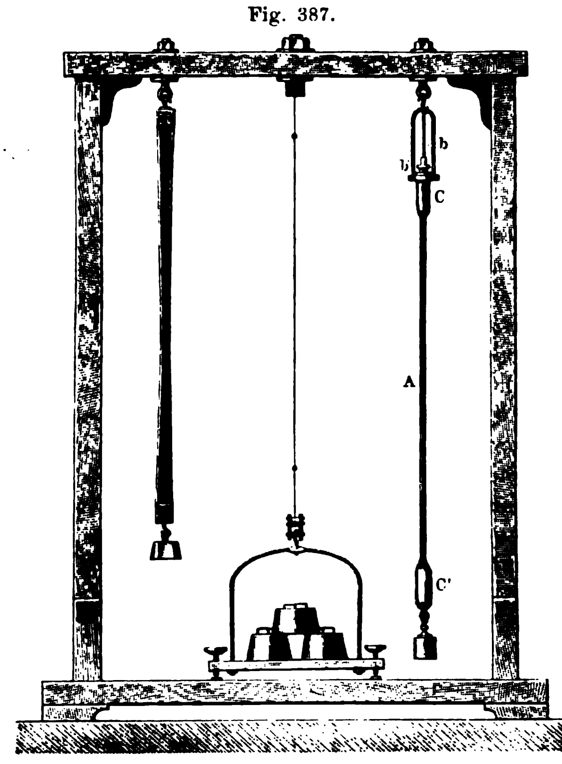
11. f Torsionsmodul eines gegebenen Drahtes;

12. λ Hülfsgröfse, die in den Gleichungen der Elastizitätstheorie vorkommt und mit den übrigen Gröfsen folgendermafsen zusammenhängt

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

§ 5. **Zugfestigkeit von Stäben; Modul von Young.** Der untersuchte Stab (oder Draht) sei mit seinem oberen Ende in der

Fig. 387.



Weise befestigt, wie Fig. 387 es zeigt, und bedeute L_0 die ursprüngliche Länge des Stabes, s den Flächeninhalt seines Querschnittes.

Ans untere Ende des Stabes hängt man das Gewicht P, welches als spannendes Gewicht bezeichnet werde. Diejenige Belastung, welche hierbei auf die Flächeneinheit des Querschnittes kommt, werde mit p bezeichnet und heifse die spannende Kraft, so dafs also

$$p = \frac{P}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist.

Durch Wirkung des spannenden Gewichtes P entsteht eine Längenzunahme, die wir mit $\varDelta L_0$ bezeichnen wollen. Innerhalb enger Grenzen (vergl. S. 693, Satz 1) ist diese Längenzunahme $\varDelta L_0$ proportional dem spannenden Gewichte P; ferner ist $\varDelta L_0$ offenbar proportional der Länge L_0 selbst und schliefslich indirekt proportional dem Flächeninhalte s, da z. B. bei Verdoppelung dieses Flächeninhaltes auch ein doppelt so grofses spannendes Gewicht erforderlich ist, um dieselbe Längenzunahme $\varDelta L_0$ hervorzurufen. Es ergiebt sich also folgende Formel

$$\varDelta L_0 = \alpha \frac{L_0 P}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

in welcher α ein Proportionalitätsfaktor ist, den wir den Koeffizienten der linearen Dilatation (Verlängerung) nennen wollen.

Ist P negativ, so giebt uns Formel (3) die Verkürzung des Stabes an; wir nennen daher α auch den Koeffizienten der linearen Verkürzung. Führt man in Formel (3) die spannende Kraft p (vergl. Formel 2) ein, so erzielt sich

$$\varDelta L_0 = \alpha L_0 p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die neue Länge L des Stabes ist nun $L_0 + \varDelta L_0$, also ist

$$L = L_0 (1 + \alpha p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Aus Formel (4) folgt

$$\alpha = \frac{\varDelta L_0}{L_0} \cdot \frac{1}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

aus welchem Ausdrucke hervorgeht, dafs der lineare Verlängerungskoeffizient α gleich der relativen Längenzunahme des Stabes ist, welche durch die Einheit der spannenden Kraft hervorgerufen wird.

Wir wollen hier P und p in Kilogrammen ausdrücken und als Längeneinheit das Millimeter wählen. In diesem Falle ist α gleich der relativen Verlängerung des Stabes, welche durch eine spannende Kraft von 1 kg pro Quadratmillimeter des Querschnittes hervorgerufen wird oder noch einfacher α ist gleich dem Zuwachs der Längeneinheit des Stabes unter der Einwirkung obiger spannenden Kraft.

Die Gröfse E ist gleich dem reciproken Wert von α,

$$E = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und heifst der Modul der linearen Verlängerung, der Youngsche Modul, oder einfach der Elastizitätsmodul. Führt man denselben in (3) und (4) ein, so ergiebt sich

$$\varDelta L_0 = \frac{1}{E}\,\frac{L_0 P}{s} = \frac{L_0 p}{E} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

also

$$E = \frac{L_0 P}{\varDelta L_0 s} = \frac{L_0}{\varDelta L_0}\, p \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Behielte Formel (8) ihre Geltung für alle Werte von p, so würde die Verlängerung $\varDelta L_0$ schliefslich gleich L_0 und man erhielte somit für die Stablänge den Wert $L = 2\,L_0$. In Wirklichkeit ist eine derartige Verlängerung nur möglich für eine kleine Anzahl von Stoffen; im allgemeinen tritt schon viel früher, d. h. bei einer sehr viel kleineren spannenden Kraft ein Zerreifsen des Stabes auf. Noch früher wird die Elastizitätsgrenze erreicht und ausserdem hört noch eher jene Proportionalität zwischen der Deformation $\varDelta L_0$ und der deformierenden Kraft P oder p auf, welche unseren oben abgeleiteten Formeln zu Grunde liegt. Nichtsdestoweniger kann man sich denken, dafs die Verlängerung, die bei kleinen Werten von P beobachtet wird, auch weiterhin proportional P bleibt, bis sie gleich L_0 wird. Ist $\varDelta L_0 = L_0$, so ist nach Formel (9) $E = p$. Hieraus folgt, dafs der Youngsche Modul gleich derjenigen spannenden Kraft ist, welche die Stablänge verdoppelt oder wenn man bei den vorhin gewählten Einheiten bleibt, ist der Youngsche Modul gleich der Anzahl Kilogramme, welche auf jeden Quadratmillimeter des Stabquerschnitts, wirken müssen, damit sich die Stablänge verdoppelt (falls der Stab nicht schon lange vorher zerreifst).

Wir wollen nunmehr diejenige Arbeit R berechnen, welche geleistet werden mufs, um durch Zug die ursprüngliche Stab- resp. Drahtlänge L_0 um $\varDelta L_0$ zu vergröfsern. Sei L die durch die Belastung Q hervorgerufene Drahtlänge. Fügt man noch die Belastung $d\,Q$ hinzu, so nimmt L um dL zu und wird hierbei die Arbeit $dR = Q\,dL$ geleistet. Die Verlängerung dL wird aber aus (3) erhalten, wenn man $d\,Q$ anstatt P einsetzt, d. h.

$$dL = \frac{\alpha L_0}{s}\, d\,Q$$

folglich

$$dR = \frac{\alpha L_0}{s}\, Q\,d\,Q.$$

Die Gesamtarbeit R des Zuges wird erhalten, wenn man die Summe aller entsprechenden Ausdrücke für Q bildet, das sich zwischen den Grenzen $Q = 0$ und $Q = P$ ändert. Danach ist

$$R = \frac{\alpha L_0 P^2}{2\,s}.$$

Diese Arbeit R ist gleich der potentiellen Energie J des gereckten Drahtes. Zieht man für ΔL_0 die Formel (3) in Betracht oder führt man die Zugkraft $p = P:s$ ein, so erhält man folgende Ausdrücke für die potentielle Energie J des gereckten Drahtes:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{\alpha L_0}{2s} P^2 = \frac{1}{2} P \Delta L_0 \\ J &= \frac{1}{2} \alpha L_0 s p^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Für $L_0 = 1$, $s = 1$ und $p = \sqrt{2}$ ist $J = \alpha$. Daraus ersieht man, dafs der Elastizitätskoeffizient numerisch gleich der potentiellen Energie der Längeneinheit des Drahtes ist, dessen Querschnitt gleich Eins ist und auf den eine Zugkraft von $\sqrt{2}$ Krafteinheiten einwirkt.

Zur experimentellen Bestimmung des Youngschen Modul, einer für die Eigenschaften einer gegebenen Substanz sehr wichtigen physikalischen Gröfse, befestigt man den aus der untersuchten Substanz verfertigten Stab oder Draht in der Weise, wie Fig. 387 zeigt. Am Drahte bringt man oben und unten zwei Marken an, etwa zwei Striche oder sehr dünne Drahtringe, auf denen bei seitlich einfallendem Lichte je eine helle horizontale Lichtlinie sichtbar wird. Auf diese Marken nun stellt man die Horizontalfäden der Okularmikrometer beider Fernrohre eines Kathetometers (S. 310) vor und nach der Belastung ein. Der Unterschied der Verschiebungen beider Marken, die man nach der auf S. 307 dargelegten Methode bestimmt, giebt uns die Verlängerung ΔL_0 der Drahtlänge L_0 innerhalb der beiden Merkzeichen. Mifst man dann noch den Drahtdurchmesser (S. 306), so erhält man s und endlich nach Formel (9) die Gröfse des Modul E.

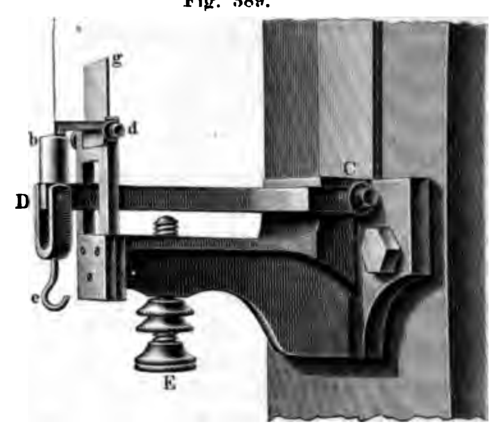
In Fig. 388 (a. f. S.) ist der zur Bestimmung des Youngschen Modul sehr geeignete Apparat von W. W. Lermantow abgebildet. An einem Brette AB sind zwei Kniestücke befestigt, welche das obere und untere Ende des Drahtes ab tragen, dessen Veränderungen beim Zuge untersucht werden sollen. Die einzelnen Teile des unteren horizontalen Ansatzes sind in Fig. 389 (a. f. S.) im vergröfserten Mafsstabe dargestellt, jedoch in entgegengesetzter Lage, so dafs das Brett AB sich rechts, das Drahtende b links befindet. Der mittlere Teil des Drahtes steht mit einer besonderen Vorrichtung FH in Verbindung, die zur Bestimmung des sogenannten Scherungsmodul dient; letztere soll in § 15 gesondert dargestellt und beschrieben werden. Das obere Drahtende a ist an einem Stäbchen ac befestigt, welches durch eine vertikale Durchbohrung hindurchgesteckt ist und in derselben mittels der Schraube x festgeschraubt werden kann. Das untere Drahtende b ist an einem Cylinder befestigt, der sich am Ende des um

C drehbaren Hebels *CD* befindet. Das an den Haken *e* gehängte Gewicht ruft eine Verlängerung des Drahtes hervor, so daſs sich also die

Fig. 388.



Fig. 389.



Enden *D* des Hebels *CD*, sowie des Cylinders *Db* senken. Ein zweiter knieförmiger Ansatz befindet sich unterhalb *CD* und trägt einen vertikalen Rahmen, durch welchen *CD* hindurchführt. Am oberen Rande dieses Rahmens sind um eine Achse drehbar ein kleiner vertikaler Spiegel *g* und fest mit ihm verbunden eine horizontale dreieckige Platte angebracht. An letztere ist ein kleines Kügelchen von unten her angelötet, das auf der oberen Grundfläche des Cylinders *bD* frei aufliegt. Senkt sich infolge der Belastung des Drahtes das Ende *bD* um den Betrag $\varDelta L_0$, so senkt sich auch das Kügelchen um den gleichen Betrag; infolgedessen dreht sich die Platte und mit ihr das Spiegelchen *g* um einen gewissen Winkel α nach links. Bezeichnet man den Abstand des Berührungspunktes der Kugel von der Drehungsachse *d* mit *r*, so ist $tg\,\alpha = \frac{\varDelta L_0}{r}$. Das cylindrische Gewicht *P* (Fig. 388) dient als beständige Belastung (in Fig. 389 ist es fortgelassen). Das Gewicht *Q*, welches den Zug auf den Draht auszuüben hat, wird an den unteren Haken von *P* gehängt. Da sich beim Anhängen von *Q* das obere Drahtende *a* auch verschiebt, wird *Q* zunächst, wie aus Fig. 388 ersichtlich, am Bügel *km* angebracht, dessen Enden mittels

der beiden Schnüre fm und ik mit dem horizontalen Stäbchen if verbunden sind. Auf solche Weise wird erreicht, dafs sich die Belastung des oberen Kniestückes und somit die Lage des Punktes a nicht ändert, wenn Q vom Bügel km abgehängt und nach h gebracht oder wieder nach km zurückgebracht wird. Damit beim Einhängen des Gewichtes in den Haken h keine Erschütterungen erfolgen, schraubt man E soweit nach oben, dafs sich der Hebel CD auf das Ende von E stützt; ist dies der Fall, so kann das eingehängte Gewicht keinen Zug auf den Draht ausüben. Hierauf, nachdem Q nach h gebracht ist, schraubt man E soweit herab, dafs sich CD wiederum frei bewegen kann; das Gewicht Q fängt dann ganz allmählich an, seinen Zug auf den Draht auszuüben und ruft ohne jegliche Erschütterung die gesuchte Verlängerung $\varDelta L_0$ des Drahtes hervor.

Zur Messung von $\varDelta L_0$ wendet man die Methode der Spiegelablenkung (S. 320) an. Das Fernrohr stellt man in einiger Entfernung vom Apparate derart auf, dafs die Fernrohrachse angenähert mit der Normalen zur Spiegelebene g zusammenfällt. Neben dem Fernrohre stellt man eine vertikale Skala auf, deren Teilung sich in g spiegelt und auf diese Weise im Fernrohre sichtbar wird. Ist l der Abstand zwischen Skala und Spiegel und n die Anzahl der Skalenteile, welche bei der Verlängerung des Drahtes den horizontalen Okularfaden passieren, so ergiebt sich der Winkel α, um welchen sich der Spiegel gegen die Vertikalebene neigt, aus der Formel $tg\, 2\alpha = \frac{n}{l}$ vergl. (2) auf S. 320. Hat man hieraus α bestimmt, so wird die gesuchte Verlängerung $\varDelta L_0$ aus der Relation

$$tg\, \alpha = \frac{\varDelta L_0}{r}$$

gefunden.

Für kleine α kann man die Tangenten durch die Winkel selbst ersetzen und erhält sonach den Ausdruck

$$\frac{\varDelta L_0}{r} = \frac{n}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

in welchem n, l und r bekannt sind; der Abstand r beträgt angenähert 15 mm. Hat man nun $\varDelta L_0$ bestimmt, so kann man, wie oben gezeigt wurde, den Youngschen Modul E aus Formel (9) finden. Ganz andere Methoden zur Bestimmung von E werden wir später in der Lehre vom Schall kennen lernen.

§ 6. Bruchfestigkeit, absoluter Widerstand, numerische Werte. Vergröfsert man die Zugkraft p immer mehr und mehr, so zerreifst schliefslich der Stab resp. der Draht. Derjenige Wert p_2 der Gröfse $p = P:s$, für welchen dies erfolgt, dient als Mafs für den

sogenannten absoluten Widerstand der Substanz. Die entsprechenden numerischen Werte zeigen, daſs der absolute Widerstand fast immer unvergleichlich kleiner als E ist, bei welchem der Theorie nach Verdoppelung der Länge auftreten würde.

Weiter unten sind die Werte von E, p_1 (spannende Kraft bei Erreichung der Elastizitätsgrenze) und p_2 (Bruch hervorrufende Kraft) in Kilogrammen pro Quadratmillimeter Querschnitt gegeben. Dieselben Gröſsen erhält man im C.G.S.-System, d. h. in Dynen pro Quadratcentimeter durch Multiplikation jener Zahlen mit $981 \cdot 10^5$, denn es ist $1\,\text{kg} = 1000\,\text{g} = 981 \cdot 10^3$ Dynen (S. 90); ferner ist 1 qcm = 100 qmm und daher wird jener Zahlenwert im C.G.S.-System noch 10^2 mal gröſser. In vielen Formeln ist es bequemer das Meter als Längeneinheit gelten zu lassen. In diesem Falle muſs E auf einen Quadratmeter des Querschnittes bezogen werden und wird daher sein Zahlenwert 10^6 mal gröſser. Solche Werte für E hat man zuweilen in die Formeln einzuführen, welche in der Lehre von der Fortpflanzung von Wellen in einem elastischen festen Medium vorkommen, also beispielsweise in die Formeln der Akustik.

Wir wollen zunächst einige Werte von E, p_1 und p_2 anführen, um zu zeigen, wie auſserordentlich stark dieselben voneinander differieren.

	$E \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$ Elastizitätsmodul	$p_1 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$ Elastizitätsgrenze	$p_2 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$ Bruch (absoluter Widerstand)	t^0 Temperatur
Blei	1 800	0,25	2,2	15°
„	1 630	—	—	100
Eisen, hartes	20 870	32	63	15
„ weiches	20 790	5	48	15
„ „	1 770	—	—	100
Kupfer, hartes	12 450	12	40	15
„ weiches . . .	10 520	3	31	15
„ „ . . .	9 830	—	—	100
„ „ . . .	7 860	—	—	200
Platin, hartes	17 040	26	34	15
„ weiches . . .	15 518	14	25	15
„ „ . . .	14 180	—	—	100
„ „ . . .	12 960	—	—	200
Stahl	22 000	33	70	15
Silber, weiches . . .	7 270	11	29	15
„ hartes	7 140	3	16	15

Die Mehrzahl obiger Werte ist den Beobachtungen von Wertheim entlehnt.

Auerbach hat (1896) den Modul E für einige sehr harte Sub-

stanzen bestimmt und ist dabei zu außerordentlich großen Zahlen gekommen, die z. B. für Korund bis zu 52 000 gehen, d. h. den Elastizitätsmodul des Stahls um das 2,5 fache übertreffen. Es mögen hier einige der von ihm gefundenen Werte folgen:

	$E \frac{kg}{qmm}$		$E \frac{kg}{qmm}$
Korund	52 000	Quarz ‖ zur Achse	10 300
Bras. Topas	30 200	Flußspat	9 110
Sächs. Topas	28 100	Kalkspat	8 440
Beryll ⊥ zur Achse	23 200	Adular	8 120
Beryll ‖ zur Achse	21 100	Glassorten	von 4 700
Apatit ‖ zur Achse	13 800		bis 7 950

Der Youngsche Modul für Legierungen ist nahezu gleich dem Mittel aus den Moduln ihrer Komponenten. Eine Ausnahme bilden die Legierungen von Eisen und Nickel, auf deren besondere Eigenschaften wir bereits einmal hingewiesen haben. Mit wachsendem Nickelgehalt sinkt der Modul E bis zu 20 Proz. Ni, dann erreicht er bei 24,1 Proz. ein Maximum, sinkt wieder bis etwa 37,2 Proz., um dann wieder anzusteigen. Bei 24,1 Proz. Ni ist E für die nicht magnetische Legierung (nach Erwärmung) größer, nämlich 19 300 $\frac{kg}{qmm}$, als für die magnetische (nach starker Abkühlung), wo E gleich 17 400 $\frac{kg}{qmm}$ ist. Das Minimum bei 37,2 Proz. Ni ist gleich 14 600 $\frac{kg}{qmm}$, während bei 5 Proz. Ni die Größe $E = 21\,700 \frac{kg}{qmm}$ und ziemlich der gleiche Wert für reines Nickel gilt.

Für Holz erhält man sehr verschiedene Werte, je nachdem der Holzstab parallel zur Faser oder senkrecht zu ihr geschnitten ist, im letzteren Fall erhält man wiederum verschiedene Werte, je nachdem, ob der Stab in radialer Richtung zum Stamm oder in einiger Entfernung von dessen Achse senkrecht zum Radius herausgeschnitten ist; das wird aus folgenden numerischen Werten ersichtlich:

	$E \frac{kg}{qmm}$ ‖ zur Faser	⊥ zur Faser in radialer Richtung	⊥ zur Faser ⊥ zum Radius
Pappelholz	517	73	39
Fichtenholz	564	98	29
Eichenholz	921	189	130
Buchenholz	980	270	159
Birkenholz	997	81	155
Ahornholz	1021	157	73
Tannenholz	1113	95	31

Die elastischen Eigenschaften weicher Körper sind von Stefan, Warburg, Smoluchowski, Mallock und M. Segel (1899) untersucht worden. Letzterer hat die Werte von E für Paraffin bei verschiedenen Temperaturen bestimmt und dabei folgende Resultate erhalten:

$t^0 =$	5,7	7,4	11,0	13,1	16,0	17,9	23,0
$E =$	226,2	212,6	193,3	177,8	164,4	151,6	126,7

Für gelben Wachs hat Segel $E = 59,1$ bei $t = 11,5^0$ und $E = 46,6$ bei $t = 19,4^0$ gefunden.

Villari hat Untersuchungen am Kautschuk vorgenommen und gefunden, dafs von $\Delta L_0 = 0$ bis $\Delta L_0 = L_0$ der Modul E ziemlich konstant ist und zwischen 0,07 bis 0,10 liegt; wenn ΔL_0 von L_0 bis $3 L_0$ $(L = 4 L_0)$ anwächst, wächst der Modul E von 0,1 bis 300; ist $\Delta L_0 > 3 L_0$, so ist der Modul wiederum ziemlich konstant und liegt zwischen $E = 300$ und $E = 350$.

Bei Zunahme der Temperatur nimmt der Modul E im allgemeinen ab, z. B. für Kupfer von 10 520 bei 15° bis 7860 bei 200°.

Für Eisen und Stahl beobachtete Wertheim eine Zunahme des Modul um 5,2 Proz. bei Erwärmung von 0° bis 100° und eine Abnahme um 19,1 Proz. bei Erwärmung von 100° auf 200°. Kupfer fand für Fe, Cu und Messing eine Abnahme von E um 5,5 Proz., 8,2 Proz. und 3,9 Proz. bei Erwärmung von 0° bis 100°. Ähnliche Resultate haben Kohlrausch und Loomis, Pisati, Tomlinson, Noyes, A. Martens, A. M. Mayer, P. A. Thomas, Cl. Schäfer u. a. erhalten. Die Zahlenwerte von A. M. Mayer sind die folgenden, wobei p angiebt, um wieviel Prozent sich E bei Erwärmung von 0° auf 100° vermindert:

	p
St. Gobain-Glas	1,16
Verschiedene Stahlsorten . .	2,24 bis 3,09
Messing	3,73
Aluminium.	5,5
Silber	2,47 (von 0° bis 60°)
Zink	6,04 (von 0° bis 62°)

P. A. Thomas fand, dafs sich E bei Änderung der Temperatur proportional einer Potenz $\varkappa$ der Dichte ändert, wobei für das untersuchte Flufseisen $\varkappa = 31,3$ gefunden wurde.

Cl. Schäfer untersuchte E für Pt, Ni, Ag, Cu, Pd und Fe bei Temperaturen von $+20^0$ bis -186^0 und fand, dafs innerhalb dieser Grenzen der Temperaturkoeffizient des Modul E eine konstante Gröfse ist.

N. A. Hesehus fand, dafs Wasserstoff, welcher von Palladium

und dessen Legierungen (75 Proz. Pd und 25 Proz. Pt, Au oder Ag) absorbiert ist, den Elastizitätskoeffizienten derselben vermindert.

Von neueren Untersuchungen seien hier die Arbeiten von Winkelmann und Schott erwähnt, welche für verschiedene Glassorten Werte von E fanden, die zwischen 4699 und 7592 kg pro Quadratmillimeter schwanken, für den absoluten Widerstand p_2 dagegen Werte zwischen 3,5 und 8,5 kg. Ferner hat Winkelmann allein (1897) die Abhängigkeit des Modul E von der Temperatur für verschiedene Glassorten untersucht. Er fand, dafs sich seine Messungen durch folgende Formel

$$E_t = E_{20}[1 - \alpha(t - 20)^\beta]$$

in der α und β konstante Zahlen sind, gut wiedergeben lassen. Erhitzung und darauf folgende Abkühlung des Glases ruft im allgemeinen eine Vergröfserung von E hervor, das dann nach längerer Ruhe sich langsam wieder vermindert. Sehr beachtenswert ist, dafs sich die gleiche Eigenschaft auch beim Platin zeigt, für welches Winkelmann $\log \beta = 0{,}008\,51$, $\log \alpha = 0{,}366\,88 - 4$ fand.

Im Jahre 1891 veröffentlichte J. O. Thompson eine Arbeit über die Abhängigkeit der Verlängerung ΔL_0 von dem spannenden Gewichte P. Er fand, dafs eine Proportionalität dieser beiden Gröfsen nur innerhalb sehr enger Grenzen existiert und dafs ihr genauerer Zusammenhang durch folgende empirische Formel $\Delta L_0 = aP + bP^2 + cP^3$, in der a, b und c für den gegebenen Draht konstante Werte haben, ausgedrückt wird. Georg S. Meyer fand für einen Aluminiumdraht eine ungewöhnlich starke Abweichung von der Hookeschen Regel (S. 693). Seine Formel für die Verlängerung ΔL_0 eines Drahtes von der Länge $L_0 = 18\,315$ mm lautet

$$\Delta L_0 = 62{,}863\,p + 14{,}312\,p^2$$

wobei p von 0 bis 0,3 kg anwächst. Der Koeffizient von p^2 ist ungewöhnlich grofs.

Wir betrachten nun den absoluten Widerstand p_2, für welchen einige numerische Werte bereits auf S. 706 gegeben worden sind, aus denen klar hervorging, dafs die Zerreissungsfestigkeit eines harten (gezogenen) Drahtes beträchtlich gröfser ist als diejenige eines weichen (geglühten) Drahtes.

Man hat für den absoluten Widerstand die Fälle, wo die Wirkung der spannenden Kraft p eine kurzdauernde war, von denjenigen zu unterscheiden, wo obige Kraft dauernd eingewirkt hat; im letzteren Falle ist der absolute Widerstand, wie aus folgenden von Wertheim stammenden Bestimmungen hervorgeht, beträchtlich geringer:

Substanz	$p_2 \frac{kg}{qmm}$	
	Langsam erfolgender Bruch	Schnell erfolgender Bruch
Gegossenes Blei	1,25	2,21
Gegossenes Zinn	3,40	4,16
Umgeglühtes Zinn . . .	1,70	3,60
Gezogenes Zink	12,80	15,77
Gezogenes Kupfer . . .	40,30	41,00
Gezogenes Eisen	61,10	62,5 bis 65,1
Gezogener Stahl	70,00	85,9 bis 99,1
Umgeglühter Stahl . . .	40,00	53,90

Jeder in vertikaler Lage hängende Stab mufs, wenn seine Länge hinreichend ist, durch sein eigenes Gewicht zerreifsen. Dies tritt für folgende Stablängen ein: Pb 5 m, Zn 11 m, Sn 50 m, Ag 263 m, Eisen 550 m.

Der absolute Widerstand von Metallen ändert sich bisweilen in beträchtlichem Mafse durch geringfügige Beimengungen anderer Metalle, was aus folgenden Zahlen ersichtlich ist:

Reines Gold . . . . $p_2 = 10 \frac{kg}{qmm}$

99,8 Proz. Au + 0,2 Proz. K oder Bi . . . . . . 0,8 „
99,8 „ „ + 0,2 „ Te oder Pb . . . . . 6 „
99,8 „ „ + 0,2 „ Th, Sn, Sb . . . . . 10 „
99,8 „ „ + 0,2 „ aller übrigen Metalle . . 11 bis 14 „

Mit Zunahme der Temperatur verringert sich der absolute Widerstand beim Kupfer gemäfs der Formel $p_2 = 29{,}40 - 0{,}037\,t$. In unregelmäfsiger Weise ändert sich p_2 mit der Temperatur für Eisen und Stahl, wobei mehrere Maxima und Minima auftreten. Dewar hat den absoluten Widerstand von Drähten bei der sehr niedrigen Temperatur von -182^0 bestimmt, indem er sie in flüssige Luft brachte. Seine Werte sind:

Drahtdurchmesser 2,49 mm			Drahtdurchmesser 5,1 mm		
Substanz	p_2		Substanz	p_2	
	$+15^0$	-182^0		$+15^0$	-182^0
Weicher Stahl . .	191 kg	318 kg	Zinn	91 kg	177 kg
Eisen	145 „	304 „	Blei	35 „	77 „
Kupfer	91 „	136 „	Zink	16 „	12 „
Messing	141 „	200 „	Quecksilber . . .	0 „	14 „
Neusilber	213 „	272 „	Wismut	27 „	14 „
Gold	116 „	154 „	Antimon	28 „	14 „
Silber	150 „	191 „	Schnelllot	136 „	293 „
			Woodsches Metall	64 „	204 „

Die Bruchfestigkeit eines Palladiumdrahtes vermindert sich, wenn derselbe Wasserstoff absorbiert hat.

Für Holz erhält man drei verschiedene Werte für den absoluten Widerstand p_2, entsprechend den drei Werten des Modul E (S. 707).

Substanz	$p_2 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$		
	∥ der Faser	⊥ zur Faser in radialer Richtung	⊥ zur Faser ⊥ zum Radius
Pappelholz	1,97	0,15	0,21
Fichtenholz	2,48	0,26	0,20
Ahornholz	3,58	0,72	0,37
Tannenholz	4,18	0,22	0,30
Birkenholz	4,30	0,82	1,06
Eichenholz	6,49	0,58	0,41

Von besonders grofsem Interesse ist die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem absoluten Widerstande eines Stabes oder Drahtes und der Gröfse seines Querschnitts s. Bezeichnet man mit P_2 das spannende Gewicht, für welches ein Zerreifsen auftritt, so hängt, wie wir annahmen, die Gröfse $p_2 = P_2 : s$ nicht mehr von s ab. Bei dünnen Drähten läfst sich aber P_2 nur durch die Formel

$$P_2 = as + b\sigma \quad \text{. . . . .} \quad (12)$$

darstellen, in welcher σ den Umfang des Drahtes bedeutet, a und b zwei Konstanten sind. Somit besteht also die Kraft P_2 aus zwei Teilen, von welchen der erste proportional dem Querschnitte, der letztere proportional dem Umfange ist. Es erklärt sich dies dadurch, dafs die Oberflächenschicht eines Drahtes, insbesondere eines ausgezogenen, eine besondere Spannung besitzt; diese Schicht ist wahrscheinlich von gröfserer Dichte als die übrige Masse und setzt dem Zerreifsen einen besonderen Widerstand entgegen. Je dünner ein Draht ist, eine um so gröfsere Bedeutung kommt dem zweiten Gliede unserer Formel (12) zu, denn s nimmt proportional dem Quadrate, σ dagegen proportional der ersten Potenz des Drahtradius ab. Hieraus erklärt sich auch, weshalb sehr dünne Drähte oder Blättchen einen relativ sehr grofsen absoluten Widerstand darbieten. Einen solchen zeigen z. B. dünne Glasfäden, welche jedoch zum Aufhängen von Körpern in physikalischen Apparaten (Galvanometern, Elektrometern u. a.) nicht verwendet werden können, wegen der in ihnen auftretenden grofsen elastischen Nachwirkung (§ 21).

Im Jahre 1889 hat Boys eine Methode gefunden Quarzfäden herzustellen: der Pfeil einer kräftigen Armbrust wird an einem Stückchen Quarz befestigt, das an einer Knallgasflamme erweicht wird; durch Losschnellen der Armbrustsehne entsteht dann ein äufserst dünner Quarzfaden. Die Dicke dieser Fäden kann den minimen Wert

Substanz	$p_2 \frac{kg}{qmm}$	
	Langsam erfolgender Bruch	Schnell erfolgender Bruch
Gegossenes Blei	1,25	2,21
Gegossenes Zinn	3,40	4,16
Umgeglühtes Zinn . . .	1,70	3,60
Gezogenes Zink	12,80	15,77
Gezogenes Kupfer . . .	40,30	41,00
Gezogenes Eisen	61,10	62,5 bis 65,1
Gezogener Stahl	70,00	85,9 bis 99,1
Umgeglühter Stahl . . .	40,00	53,90

Jeder in vertikaler Lage hängende Stab mufs, wenn seine Länge hinreichend ist, durch sein eigenes Gewicht zerreifsen. Dies tritt für folgende Stablängen ein: Pb 5 m, Zn 11 m, Sn 50 m, Ag 263 m, Eisen 550 m.

Der absolute Widerstand von Metallen ändert sich bisweilen in beträchtlichem Mafse durch geringfügige Beimengungen anderer Metalle, was aus folgenden Zahlen ersichtlich ist:

Reines Gold	$p_2 = 10$	$\frac{kg}{qmm}$
99,8 Proz. Au + 0,2 Proz. K oder Bi	0,8	„
99,8 „ „ + 0,2 „ Te oder Pb	6	„
99,8 „ „ + 0,2 „ Th, Sn, Sb	10	„
99,8 „ „ + 0,2 „ aller übrigen Metalle . .	11 bis 14	„

Mit Zunahme der Temperatur verringert sich der absolute Widerstand beim Kupfer gemäfs der Formel $p_2 = 29{,}40 - 0{,}037\,t$. In unregelmäfsiger Weise ändert sich p_2 mit der Temperatur für Eisen und Stahl, wobei mehrere Maxima und Minima auftreten. Dewar hat den absoluten Widerstand von Drähten bei der sehr niedrigen Temperatur von — 182° bestimmt, indem er sie in flüssige Luft brachte. Seine Werte sind:

Drahtdurchmesser 2,49 mm			Drahtdurchmesser 5,1 mm		
Substanz	p_2		Substanz	p_2	
	+ 15°	— 182°		+ 15°	— 182°
Weicher Stahl . .	191 kg	318 kg	Zinn	91 kg	177 kg
Eisen	145 „	304 „	Blei	35 „	77 „
Kupfer	91 „	136 „	Zink	16 „	12 „
Messing	141 „	200 „	Quecksilber . . .	0 „	14 „
Neusilber	213 „	272 „	Wismut	27 „	14 „
Gold	116 „	154 „	Antimon	28 „	14 „
Silber	150 „	191 „	Schnelllot	136 „	293 „
			Woodsches Metall	64 „	204 „

Die Bruchfestigkeit eines Palladiumdrahtes vermindert sich, wenn derselbe Wasserstoff absorbiert hat.

Für Holz erhält man drei verschiedene Werte für den absoluten Widerstand p_2, entsprechend den drei Werten des Modul E (S. 707).

Substanz	$p_2 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$		
	‖ der Faser	⊥ zur Faser in radialer Richtung	⊥ zur Faser ⊥ zum Radius
Pappelholz	1,97	0,15	0,21
Fichtenholz	2,48	0,26	0,20
Ahornholz	3,58	0,72	0,37
Tannenholz	4,18	0,22	0,30
Birkenholz	4,30	0,82	1,06
Eichenholz	6,49	0,58	0,41

Von besonders grofsem Interesse ist die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem absoluten Widerstande eines Stabes oder Drahtes und der Gröfse seines Querschnitts s. Bezeichnet man mit P_2 das spannende Gewicht, für welches ein Zerreifsen auftritt, so hängt, wie wir annahmen, die Gröfse $p_2 = P_2 : s$ nicht mehr von s ab. Bei dünnen Drähten läfst sich aber P_2 nur durch die Formel

$$P_2 = as + b\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

darstellen, in welcher σ den Umfang des Drahtes bedeutet, a und b zwei Konstanten sind. Somit besteht also die Kraft P_2 aus zwei Teilen, von welchen der erste proportional dem Querschnitte, der letztere proportional dem Umfange ist. Es erklärt sich dies dadurch, dafs die Oberflächenschicht eines Drahtes, insbesondere eines ausgezogenen, eine besondere Spannung besitzt; diese Schicht ist wahrscheinlich von gröfserer Dichte als die übrige Masse und setzt dem Zerreifsen einen besonderen Widerstand entgegen. Je dünner ein Draht ist, eine um so gröfsere Bedeutung kommt dem zweiten Gliede unserer Formel (12) zu, denn s nimmt proportional dem Quadrate, σ dagegen proportional der ersten Potenz des Drahtradius ab. Hieraus erklärt sich auch, weshalb sehr dünne Drähte oder Blättchen einen relativ sehr grofsen absoluten Widerstand darbieten. Einen solchen zeigen z. B. dünne Glasfäden, welche jedoch zum Aufhängen von Körpern in physikalischen Apparaten (Galvanometern, Elektrometern u. a.) nicht verwendet werden können, wegen der in ihnen auftretenden grofsen elastischen Nachwirkung (§ 21).

Im Jahre 1889 hat Boys eine Methode gefunden Quarzfäden herzustellen: der Pfeil einer kräftigen Armbrust wird an einem Stückchen Quarz befestigt, das an einer Knallgasflamme erweicht wird; durch Losschnellen der Armbrustsehne entsteht dann ein äufserst dünner Quarzfaden. Die Dicke dieser Fäden kann den minimen Wert

von 0,0003 mm erreichen; dabei besitzen sie einen bemerkenswert hohen absoluten Widerstand. Ein solcher Quarzfaden von nur 0,0018 mm Dicke vermag ein Gewicht von 2 g zu tragen, was einer Belastung von 820 kg pro Quadratmillimeter entspricht, während bei $p = 80 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$ für fast alle Stahlsorten Bruch auftritt.

Quincke hat den Wert der Konstanten b aus Formel (12) bestimmt und zwar in Grammen pro Millimeter des Umfangs; er fand

	Zn	Au	Cu	Ag	Pt	Fe	Stahl
$b =$	557	1592	2388	2388	3023	5731	6685 $\frac{\text{g}}{\text{mm}}$.

§ 7. Absoluter Widerstand gegen einseitigen Druck. Nach dem Satz 2 auf S. 693 gelten die Formeln (3) bis (9) auch für negative Werte von P und p, d. h. auch für den Fall, daſs der Stab (Cylinder, Prisma) einem longitudinal wirkenden Drucke unterworfen wird. Ihre Gültigkeit ist indes auf sehr kleine Werte von ΔL_0 beschränkt. Wir hatten den Modul von Young auch als Kompressionsmodul bezeichnet.

Nimmt die komprimierende Kraft p zu, so tritt ein Augenblick ein, wo der Zusammenhang zwischen den Teilchen des Körpers überwunden und letzterer zerdrückt wird, wobei er sich bisweilen wie bei einer Explosion in feines Pulver verwandelt (Glas). Den hierher gehörigen Wert von p kann man den absoluten Widerstand gegen einseitigen Druck nennen. Für alle Körper ist dieser Wert gröſser als der oben betrachtete p_2; eine Ausnahme jedoch bildet Holz.

Auf S. 709 waren die von Winkelmann und Schott für verschiedene Glassorten gefundenen Werte von E und p_2 angeführt worden. Dieselben Autoren fanden für den Widerstand gegen die Kompression Werte zwischen 60,6 und 120,8 kg pro Quadratmillimeter. Für andere Stoffe gelten folgende Zahlen für den Widerstand gegen einseitigen Druck: Guſseisen 57 bis 102, Kupfer 30 bis 45, Granit 12 bis 22, Marmor 6 bis 12, fester Kalkstein 14, weicher Kalkstein 1, Ziegel 0,5 bis 2, Eichenholz 7, Fichtenholz 4,8, Birkenholz 4,5, Pappelholz 3,6; alle Zahlen bedeuten die Anzahl Kilogramme pro Quadratmillimeter Oberfläche.

§ 8. Querkontraktion, Koeffizient von Poisson. Wird ein Stab oder Draht der Länge nach gedehnt, so tritt immer auch eine Querkontraktion auf; der Stab wird also dünner und sein Durchmesser d_0 nimmt um einen gewissen Wert Δd_0 ab, den man nach Analogie von (4) auf S. 701 gleich

$$\Delta d_0 = \beta d_0 p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

setzen kann. Den Faktor β werden wir den Koeffizienten der

Querkontraktion nennen; er ist numerisch gleich der relativen Dickenabnahme $\left(\frac{\varDelta d_0}{d_0}\right)$ für die Einheit der spannenden Kraft. Für die neue Dicke erhalten wir somit $d = d_0 - \varDelta d_0$ oder

$$d = d_0 (1 - \beta p) \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

In der Elastizitätslehre spielt das Verhältnis σ der Koeffizienten β und α eine überaus wichtige Rolle, und zwar ist

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varDelta d_0}{d_0} : \frac{\varDelta L_0}{L_0} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Dieses Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung heifst der Poissonsche Koeffizient. Wir werden sehen, dafs nicht nur stets $\beta < \alpha$ ist, d. h. $\sigma < 1$, sondern dafs auch für sämtliche Körper

$$\sigma < \frac{1}{2} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

sein mufs.

Wir wollen nun die Änderung $\varDelta v_0$ des ursprünglichen Volumens v_0 eines Stabes unter Einwirkung der spannenden Kraft p berechnen. Es ist $v_0 = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2$; das neue Volumen ist gleich $v = \frac{\pi}{4} L d^2$ oder [vergl. (5) auf Seite 701 und (14)] $v = \frac{\pi}{4} L_0 d_0^2 (1 - \beta p)^2 (1 + \alpha p)$ oder schliefslich

$$v = v_0 (1 - \beta p)^2 (1 + \alpha p) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Für sehr kleine αp und βp kann man $v = v_0 [1 + (\alpha - 2\beta) p]$ schreiben oder

$$v = v_0 [1 + \alpha (1 - 2\sigma) p] \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Schreibt man nun nach Analogie von (4) und (13)

$$\varDelta v_0 = \eta v_0 p \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

so ergiebt sich

$$\eta = \alpha (1 - 2\sigma) \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Gröfse η kann man den Koeffizienten der Volumenvergröfserung beim Zuge nennen. Durch eben diese Gröfse wird die Volumenkompression bei einseitigem, longitudinal wirkendem Drucke bestimmt, die immer von einer Ausdehnung in die Breite begleitet ist. Ein Prisma, auf welches senkrecht zu den Grundflächen ein Druck ausgeübt wird, nimmt an Dicke zu: es baucht sich nach den Seiten aus. Da das Volumen eines Stabes während des Zuges immer zunimmt, so mufs $\eta > 0$ sein, woraus die Relation $\sigma < 0{,}\,5$, vergl. (16), folgt. Dies bezieht sich indes auf kleine Werte von αp; ist die Verlängerung eine beträchtliche, so hat man (17) heranzuziehen, woraus sich (bei Substitution von $\beta = \alpha \sigma$)

$$\Delta v_0 = v_0 [(1 + \alpha p)(1 - 2\sigma\alpha p) - 1]$$

ergiebt. Das Volumen bleibt ungeändert und ist somit $\Delta v_0 = 0$ z. B. für $\alpha p = 0{,}001$ und $\sigma = 0{,}4996$ ebenso für $\alpha p = 0{,}03$ und $\sigma = 0{,}486$ u. s. w. Poisson fand auf theoretischem Wege, dafs für alle homogenen und isotropen Körper

$$\sigma = \frac{1}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

sein müfste.

Es existiert eine ganze Reihe verschiedener Methoden zur Bestimmung von σ und werden wir uns weiter unten (§ 15 und § 17) mit ihnen bekannt machen. An dieser Stelle mögen die von verschiedenen Autoren für σ gefundenen Werte folgen:

	σ
Gehärteter Stahl	0,294 (Kirchhoff)
" "	0,294 (Okatow)
" "	0,296 (Schneebeli)
Ausgeglühter Stahl	0,304 (Okatow)
" "	0,253 bis 0,333 (andere Beobachter)
Eisen	2,243 bis 0,310
Messing	0,226 bis 0,469
Kupfer	0,348
" (galvanoplastisches) . .	0,250 (Voigt)
Blei	0,375
Zink	0,205
Glas	0,197 bis 0,319 (Straubel)
Ebonit	0,389
Paraffin	0,50
Kautschuk (schwacher Zug) . .	0,37 bis 0,64 (Röntgen)
" " " . .	0,50 (Amagat)
" (starker Zug) . . .	0,31 bis 0,41
Kork	0,0

Smoluchowski findet für Wachs, Paraffin und Wallrat für σ Werte zwischen 0,4 und 0,44. Bei Zunahme der Temperatur von 0° bis 100° wächst σ nach den Untersuchungen von Katzenelsohn für Pt um 5,5 Proz., Fe 3,7 Proz., Au 2,5 Proz., Ag 12,2 Proz., Al 15,7 Proz.; derselbe findet folgende Werte von σ: Pt 0,16 Proz., Fe 0,27 Proz., Au 0,17 Proz., Ag 0,37 Proz., Al 0,13 Proz.

Bock findet für σ und die prozentuale Änderung q dieser Gröfse bei Erwärmung von 0° bis 100°:

	σ	q Proz.		σ	q Proz.
Fe	0,256	2	Ni	0,329	2,4
Cu	0,346	4	Ag	0,346	10

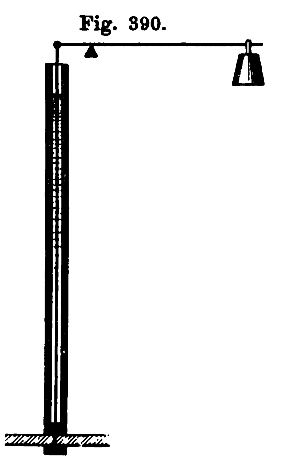
Everett, Cornu, Voigt, Cantone, Kowalski, Amagat und Straubel (1899) haben den Wert von σ für Glas bestimmt. Letzterer fand, dafs σ für die verschiedenen Glassorten zwischen 0,197 und 0,319 schwankt, so dafs also Werte möglich sind, die bedeutend kleiner als die von Poisson gegebene Zahl 0,25 sind.

Alle angeführten Zahlen beweisen, dafs σ allgemein nicht gleich 0,25 ist, wie es die Theorie von Poisson verlangt, sondern innerhalb sehr weiter Grenzen schwankt. Hierbei kann man nicht wohl annehmen, dafs dieser Umstand nur dadurch hervorgerufen ist, dafs die von den verschiedenen Substanzen untersuchten Proben sämtlich inhomogen oder anisotrop waren. Weit natürlicher ist es vielmehr anzunehmen, dafs anfangend von den Flüssigkeiten, für welche theoretisch genommen $\sigma = 0{,}5$ ist, diese Gröfse für die verschiedenen festen Körper alle möglichen Werte annimmt.

Interessante Grenzfälle bieten Kork und Kautschuk dar; für ersteren ist $\sigma = 0$, d. h. er zeigt bei der Kompression keine seitliche Ausbauchung; für Kautschuk dagegen ist $\sigma = 0{,}5$, d. h. er verändert bei Druck oder Zug sein Volumen nicht. Wir werden hierauf noch später zurückkommen.

Direkte Versuche von Cagniard-Latour zeigen, dafs $\eta > 0$ ist, dafs sich also das Volumen eines Drahtes beim Zuge vergröfsert. Der hierzu verwendete Apparat ist in Fig. 390 abgebildet. Der untersuchte Draht befand sich im Inneren einer mit Wasser gefüllten Röhre und konnte man aus der Änderung des Wasserniveaus auf die Volumenzunahme des Drahtes innerhalb der Röhre schliefsen.

Fig. 390.



Wertheim hat die Änderung des inneren Volumens von Röhren beim Zuge bestimmt. Dieses Volumen ändert sich beim Zuge um so viel, als sich das entsprechende Volumen ändern würde, wenn man statt einer Röhre einen massiven Stab vor sich hätte. Dies Resultat wird verständlich, wenn man sich den in Fig. 391 (a. f. S.) dargestellten Röhrenquerschnitt ansieht. Ziehen wir zwei einander parallele Tangentialebenen ab und cd und denken wir uns den Raum zwischen ihnen in Schichten $afoh$, $ohik$, $ikmn$ u. s. w. zerlegt. Alle diese Schichten werden beim Ausziehen der Röhre um ebenso viel zusammendrückt, als es der Fall sein würde, wenn sie in einem massiven Stabe enthalten wären; infolgedessen ist die Annäherung der Ebenen ab und cd, folglich auch der Punkte f und p aneinander in beiden Fällen die gleiche. Dies gilt von allen ähnlichen parallelen Ebenen, z. B. von gt und rs, woraus

denn auch das oben Gesagte folgt. Wertheim fand für Glas und Messing $\sigma = \frac{1}{3}$; er benutzte hierbei die Formel (20), nach welcher $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{\eta}{2\alpha}$ ist, indem er die relativen Änderungen des Volumens und der Länge maſs.

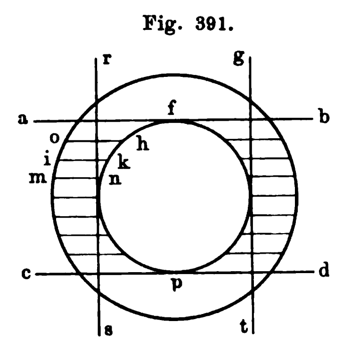


Fig. 391.

Durch besondere Sorgfalt zeichnen sich die Untersuchungen von Okatow aus, dessen Resultate bereits im Vorhergehenden angeführt worden sind; sie wurden nach einer Methode von Kirchhoff ausgeführt, die sich auf eine Kombination der beim Biegen und Tordieren erhaltenen Resultate gründet. Ausführlicheres kann hierüber nicht mitgeteilt werden.

§ 9. **Koeffizient und Modul der einseitigen Kompression für eine unbegrenzte Schicht.** Ziehen wir im unbegrenzten Medium zwei einander parallele Ebenen AB und CD (Fig. 392) in der Entfernung $mr = ns = L_0$ voneinander und nehmen wir an, daſs die zwischen ihnen befindliche Schicht dem Drucke p auf die Flächeneinheit sowohl von der einen, als auch von der anderen Seite ausgesetzt sei. Denken wir uns ferner ein Prisma oder einen Cylinder $mnsr$ von der Länge $L_0 = mr$ aus dieser Schicht herausgeschnitten; wäre dieses Prisma nicht allseitig vom Stoff des Mediums umgeben, so daſs es sich nach den Seiten frei ausdehnen könnte, so würde sich seine Länge L_0 in

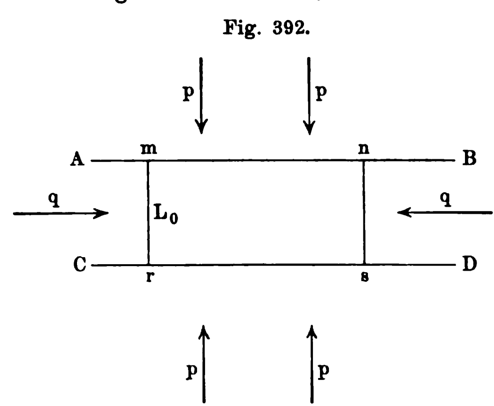


Fig. 392.

$$L = L_0 (1 - \alpha p) \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

verwandeln und der Kompressionsmodul (der Youngsche Modul) wäre gleich

$$E = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Im gegebenen Falle kann sich aber das Prisma nicht nach der Seite ausbauchen. Der Druck p auf die Flächen mn und rs ruft ein Bestreben der Seitenflächen sich auszubauchen hervor, infolgedessen an denselben ein Druck q pro Flächeneinheit der umgebenden Masse auftritt, welche wiederum ihrerseits einen ebensolchen Druck q auf die Seitenflächen des Prismas ausübt, der ihr Bestreben, sich auszubauchen, vollkommen unterdrückt. Dieser Seitendruck ruft eine Zunahme der Dimensionen des Prismas senkrecht zu q hervor, so dafs die Prismenlänge gröfser wird, als es dem Ausdruck (22) für L entspricht. Die Kompression der Schicht ist also geringer als die Kompression des freien Prismas, da innerhalb der Schicht ein Ausbauchen nach der Seite nicht möglich ist. Die ursprüngliche Dicke L_0 der Schicht wird gleich

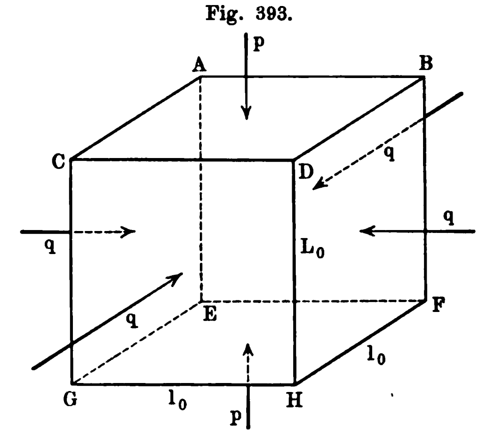
$$L' = L_0 (1 - \alpha' p) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

wo $\alpha' < \alpha$ ist. Den reciproken Wert von α' wollen wir mit E' bezeichnen

$$E' = \frac{1}{\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Offenbar ist $E' > E$. Die Gröfsen α' und E' bezeichnen wir als den Koeffizienten resp. den Modul der einseitigen Kompression der Schicht. Um zwischen α und α' einerseits und E und E' andererseits einen Zusammenhang zu finden, betrachten wir die Fig. 393. Nehmen wir an, es sei aus der in Betracht gezogenen Schicht ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit quadratischer Grundfläche und den Kanten $HD = L_0$ (Dicke der Schicht) und $HF = HG = l_0$ herausgeschnitten. Auf die Flächeneinheit der Grundflächen wirkt die Kraft p, auf die Flächeneinheit der Seitenflächen die Kraft q.

Fig. 393.



Der Voraussetzung gemäfs mufs l_0 unverändert bleiben. Sehen wir nun zu, was aus L_0 unter der Wirkung aller auf das Parallelepipedon einwirkenden Kräfte wird. Infolge der Wirkung von p verwandelt sich die Länge L_0 in $L_0 (1 + \alpha p)$. Die beiden Drucke q von links und rechts (auf $BFHD$ und $CAEG$) bewirken eine relative Verkürzung von GH, die αq beträgt und somit eine relative Verlängerung der Kante $HD = L_0$, die $\sigma \alpha q$ beträgt. Mithin verwandelt sich

$L_0(1 - \alpha p)$ nach Satz 3 auf S. 693 in $L_0(1 - \alpha p)(1 + \alpha\sigma q)$. Die beiden Drucke q auf die vordere und hintere Seitenfläche $CDHG$ und $ABEF$ bewirken eine ebensolche Verlängerung der Kante DH, deren schliefsliche Länge L' also gleich

$$L' = L_0(1 - \alpha p)(1 + \alpha\sigma q)^2$$

wird; für kleine Werte von αp wird

$$L' = L_0\left\{1 - \alpha p\left(1 - 2\frac{q}{p}\sigma\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (24), so ergiebt sich

$$\alpha' = \alpha\left(1 - 2\frac{q}{p}\sigma\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Das Verhältnis $q : p$ findet man auf Grund des Umstandes, dafs die Kante $GH = l_0$ ihre Länge unverändert beibehalten soll. Ihre Änderungen sind dreierlei Art: die Drucke q auf $DBFH$ und $AEGC$ rufen eine relative Verkürzung von l_0, die gleich αq ist, hervor; die Drucke q auf $CDHG$ und $ABFE$ haben eine relative Verlängerung der Kante $GH = l_0$ zur Folge, die gleich $\sigma\alpha q$ ist und endlich rufen die Drucke p eine relative Verlängerung vom Betrage $\sigma\alpha p$ hervor. Hieraus folgt, dafs sich l_0 in

$$l = l_0(1 - \alpha q)(1 + \sigma\alpha q)(1 + \sigma\alpha p)$$

oder

$$l = l_0(1 - \alpha q + \sigma\alpha q + \sigma\alpha p)$$

verwandelt.

Die Bedingungsgleichung $l = l_0$ giebt, wenn man noch durch α hebt

$$-q + \sigma q + \sigma p = 0$$

d. h.

$$\frac{q}{p} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Diese interessante Formel liefert das Verhältnis zwischen dem äufseren Druck p auf die Flächen der Schicht und dem im Inneren der Schicht auftretenden seitlichen Drucke q. Substituiert man (28) in (27) so ist

$$\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma}\right) = \alpha\,\frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma}$$

oder schliefslich

$$\alpha' = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Für den Modul E' der allseitigen Kompression des Mediums erhält man

$$E' = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}\,E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die Formeln (28), (29) und (30) lösen die überaus wichtige Frage nach der Kompression einer unbegrenzt ausgedehnten Schicht vollkommen. Für $\sigma = 0$ ist offenbar $\alpha' = \alpha$; für $\sigma = \frac{1}{2}$ würde man $\alpha' = 0$ erhalten.

Wir wollen nun noch einige Zahlenwerte für die Verhältnisse $q : p$, $\alpha' : \alpha$ und $E' : E$ mit den Werten von σ zusammenstellen:

σ	q	α'	E'
0 (Kork)	0	α	E
$\frac{1}{4}$ (Nach Poisson)	$\frac{1}{3}p$	$\frac{5}{6}\alpha$	$\frac{6}{5}E$
$\frac{1}{3}$ (Nach Wertheim)	$\frac{1}{2}p$	$\frac{2}{3}\alpha$	$\frac{3}{2}E$
0,4	$\frac{2}{3}p$	$\frac{7}{15}\alpha$	$\frac{15}{7}E$
$\frac{1}{2}$ (Flüssigkeiten, Kautschuk)	p	0	∞

Somit ist der Seitendruck q, der in den Flüssigkeiten und beim Kautschuk gleich dem faktischen Drucke p ist, in den übrigen festen Körpern nach Poisson gleich $\frac{1}{3}p$, nach Wertheim gleich $\frac{1}{2}p$; für Kork ist er, wenigstens in gewissen Grenzen, gleich Null. Aus unserer Tabelle ist ersichtlich, wieviel mal die deformierende Kraft, welche dazu erforderlich ist, eine Schicht um einen geringen Bruchteil ihrer Dicke, z. B. um 0,0001 derselben zu komprimieren, gröſser ist als die Kraft, durch welche ein Prisma aus demselben Stoffe sich um den gleichen Betrag verkürzt; erstere wird durch die Gröſse E', letztere durch E gemessen.

§ 10. Koeffizient des allseitigen Druckes. Das Volumen v_0 eines Körpers vermindert sich unter Einwirkung eines auf seine gesamte Oberfläche wirkenden Druckes p um eine gewisse Gröſse, deren absoluten Betrag wir mit Δv_0 bezeichnen wollen. Für kleine Deformationen können wir entsprechend dem Satz 1 auf S. 693 folgenden Ausdruck gelten lassen:

$$\Delta v_0 = \gamma v_0 p \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

wo γ der Koeffizient des kubischen allseitigen Druckes ist; er ist gleich

$$\gamma = \frac{\Delta v_0}{v_0} \frac{1}{p} \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Das neue Volumen ist $v = v_0 - \Delta v_0$, d. h.

$$v = v_0 (1 - \gamma p) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Um eine Beziehung zwischen γ und α zu erhalten, wenden wir uns wiederum der Fig. 393 zu und setzen $q = p$ und der Einfachheit halber $l_0 = L_0$, d. h. wir machen die Annahme, dafs das komprimierte Volumen die Form eines Würfels hat. Offenbar ist $v_0 = L_0^3$. Jede Kante erfährt eine relative Verkürzung αp und zwei relative Verlängerungen $\alpha\sigma p$, infolgedessen sich L_0 in

$$L = L_0\,(1 - \alpha p)\,(1 + \alpha\sigma p)^2$$

verwandelt, oder für kleine Werte von αp in

$$L = L_0\,[1 - \alpha\,(1 - 2\,\sigma)p]\,.\;.\;.\;.\;.\quad(34)$$

welcher Ausdruck sich direkt aus (26) ergiebt, wenn man $q = p$ setzt. Das neue Volumen des Würfels ist $v = L^3$, folglich ist

$$v = v_0\,[1 - \alpha\,(1 - 2\,\sigma)p]^3.$$

Für kleine Werte von αp erhält man demnach

$$v = v_0\,[1 - 3\,\alpha\,(1 - 2\sigma)p]\,.\;.\;.\;.\;.\quad(35)$$

Vergleicht man diese Formel mit (33), so erhält man schliefslich für den Koeffizienten des allseitigen Druckes folgenden Ausdruck:

$$\gamma = 3\,\alpha\,(1 - 2\sigma)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(36)$$

Für $\sigma = \frac{1}{4}$ ist $\gamma = \frac{3}{2}\,\alpha$, für $\sigma = \frac{1}{3}$ (Wertheim) ist $\gamma = \alpha$.

Den reciproken Wert von γ nennen wir den Modul des allseitigen Druckes und bezeichnen ihn mit K. Es ist

$$K = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3\,\alpha\,(1 - 2\,\sigma)}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(37)$$

oder, da $E = \frac{1}{\alpha}$ ist,

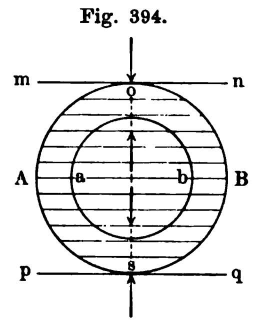
$$K = \frac{E}{3\,(1 - 2\,\sigma)}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(38)$$

Für $\sigma = \frac{1}{4}$ ist $K = \frac{2}{3}\,E$, für $\sigma = \frac{1}{3}$ ist $K = E$, d. h. die Moduln des allseitigen und des einseitigen Druckes werden einander gleich. Es gilt dies, wohl zu merken, für ein Prisma, nicht aber für eine unbegrenzte Schicht, für welche E durch $E' = \frac{3}{2}\,E$, vergl. S. 719, zu ersetzen ist. Die Gröfse K nennt man bisweilen den Modul der Volumelastizität.

Bevor davon die Rede sein soll, in welcher Weise γ bestimmt werden kann, möge zunächst auf folgenden wichtigen Umstand hingewiesen

werden. Wenn die Wandungen eines Gefäſses von innen und auſsen dem gleichen Drucke ausgesetzt werden, so vermindert sich das Volumen des Gefäſses um ebensoviel, wie ein demselben entsprechender Raumteil, der von einem massiven Körper erfüllt ist. Zum Beweise nehmen wir an, wir hätten eine massive Kugel vor uns (Fig. 394), welche einem gleichmäſsigen Drucke p ausgesetzt sei. Wir ziehen nun zwei Tangenten mn und pq und betrachten eine dünne Schicht, die dem durch die Berührungspunkte s und o gehenden gröſsten Kreise entspricht. Teilt man diese Schicht in Streifen, welche mn parallel sind, so werden durch die äuſsere Kraft p alle diese Streifen zusammengedrückt und werden infolgedessen schmäler. Dasselbe gilt auch von den mittleren Teilen jener Streifen, die innerhalb des Kreises ab liegen. Hieraus folgt, daſs die innere Kugel, die wir aus der Masse der gegebenen Kugel herausgenommen denken, denselben Druck p von allen Seiten her erfährt, wie die ganze Kugel und hieraus folgt wieder umgekehrt, daſs diese innere Kugel auf die innere Fläche der sie allseitig umgebenden Kugelschale den Druck p ausübt. Wenn wir also die innere Kugel entfernen, dafür aber auf die Innenfläche der übrigbleibenden Kugelschale den Druck p ausüben, so ändert sich für eben jene Schale nichts; ihr äuſseres Volumen sowohl, als auch ihr inneres nehmen um so viel ab, als ob sie den Teil einer massiven Kugel bildete.

Fig. 394.



Regnault verwandte zur Bestimmung des allseitigen Druckes das in Fig. 293 auf S. 553 abgebildete Piezometer. Bei der Beschreibung desselben ist angegeben worden, in welcher Weise man auf das innere Gefäſs A entweder nur von auſsen oder von innen, oder endlich gleichzeitig von auſsen und innen einen Druck ausüben kann. Aus der Höhe der Flüssigkeitssäule in der mit A verbundenen Kapillarröhre kann man auf die Volumenänderung des Gefäſses einen Schluſs ziehen und durch Kombination der drei genannten Beobachtungen kann man unter Zuhülfenahme entsprechender Formeln aus der Elastizitätslehre den gesuchten Druckkoeffizienten derjenigen Substanz bestimmen, aus welcher das innere Gefäſs besteht. Wir wollen die erwähnten Formeln ohne Herleitung anführen und überall mit ΔV die Zunahme des ursprünglichen Volumens V bezeichnen.

I. Hohlkugel; innerer Radius R_0, äuſserer Radius R.

1. Der Druck wirkt nur von auſsen

$$\frac{\Delta_1 V}{V} = -\frac{9(1-\sigma)}{2E}\,\frac{R^3}{R^3 - R_0^3}\,p \quad . \quad . \quad . \quad (39, a)$$

2. Der Druck wirkt nur von innen

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3(1-2\sigma)R_0^3 + \frac{3}{2}(1+\sigma)R^3}{E(R^3 - R_0^3)} p \quad . \quad . \quad (39, b)$$

3. Der Druck wirkt von aufsen und von innen

$$\frac{\Delta_3 V}{V} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} p = -\gamma p \quad . \quad . \quad . \quad (39, c)$$

Offenbar ist

$$\Delta_3 V = \Delta_1 V + \Delta_2 V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39, d)$$

II. Hohlcylinder; innerer Radius R_0, äufserer R.

1. Druck blofs von aufsen

$$\frac{\Delta_1 V}{V} = \frac{5-4\sigma}{E} \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} p \quad . \quad . \quad . \quad (40, a)$$

2. Druck blofs von innen

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3(1-2\sigma) R_0^2 + 2(1+\sigma) R^2}{E(R^2 - R_0^2)} \quad . \quad . \quad (40, b)$$

3. Druck von aufsen und innen

$$\frac{\Delta_3 V}{V} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} p = -\gamma p \quad . \quad . \quad (40, c)$$

Auch hier ist

$$\Delta_3 V = \Delta_1 V + \Delta_2 V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40, d)$$

Sacerdote hat eine elementare Herleitung dieser Formeln gegeben. Die unmittelbaren Beobachtungen des Flüssigkeitsniveaus in der Kapillarröhre des Regnaultschen Apparates geben noch nicht die wahren Werte für die Änderung des Gefäfsvolumens an, da die Flüssigkeit durch den Druck eine gewisse Volumenänderung ΔV erfährt; es ist

$$\Delta V = -\gamma_1 V p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

wo γ_1 den kubischen Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit bedeutet. Diese Volumenänderung wird zu $\Delta_2 V$ und $\Delta_3 V$ bei der zweiten und dritten Messung von Regnault hinzugefügt. Die beobachteten oder scheinbaren Volumenänderungen sind

$$\left.\begin{aligned} \Delta' V &= \Delta_1 V \\ \Delta'' V &= \Delta_2 V - \Delta V \\ \Delta''' V &= \Delta_3 V - \Delta V \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Substituiert man hier (39) oder (40) und (41), so erhält man drei Gleichungen, die uns γ_1, d. h. den Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit (vergl. S. 553 die Grassischen Versuche) und die Gröfsen E und σ und sodann noch das gesuchte γ auf Grund der Formel (36), in der

$\alpha = 1 : E$ ist, geben. Die Zahlenwerte für γ fallen verschieden aus, je nachdem man als Einheit des Druckes p den Atmosphärendruck oder den Druck von 1 kg pro Quadratmillimeter oder den einer Dyne pro Quadratcentimeter (C. G. S.-System) annimmt. Wir wollen die erste der genannten Druckeinheiten benutzen, so daſs also die folgenden Zahlen angeben, um welchen Teil sich das Volumen eines Körpers vermindert, wenn der Auſsendruck um den einer Atmosphäre = 10 333 kg pro Quadratmeter = 0,010 333 kg pro Quadratmillimeter = 1,013 . 10^6 Dynen pro Quadratcentimeter zunimmt. Die genauesten Bestimmungen der Kompressibilität fester Körper sind von Regnault, Voigt und Amagat (1889, 1891) ausgeführt worden.

$\gamma \, . \, 10^6$

Blei . . .	2,761	(Amagat)	Glas . .	1,67	(Regnault)
Kupfer . .	1,23	(Regnault)	„ . .	2,197	(Amagat)
„ . .	0,857	(Amagat)	Stahl . .	0,68	„
Messing .	1,07	(Regnault)	Steinsalz .	4,2—50	
„ .	0,953	(Amagat)	Topas . .	0,61	(Voigt)
Bergkrystall	2,675	(Voigt)	Turmalin .	0,1128	„

§ 11. Scherungsmodul. Stellen wir uns im Inneren eines festen Körpers zwei parallele Ebenen AB und CD (Fig. 395) vor, welche senkrecht zur Zeichnungsebene sein mögen. Nehmen wir an, die Ebene CD werde in unveränderlicher Lage erhalten und längs der Ebene AB seien gleichmäſsig Kräfte verteilt, die einander parallel sind und in dieser Ebene liegen, wobei auf jede Flächeneinheit eine Kraft p komme. Diese Kraft bewirkt dann eine Verschiebung der Ebene AB und aller zwischen CD und AB dazwischen liegenden Ebenen nach der Seite der Kraft hin, infolgedessen die physikalische Gerade GE, welche zu allen diesen Ebenen senkrecht ist, die Lage GE' annimmt, die ihrerseits mit der geometrischen Normale GE zu AB und CD einen sogenannten Scherungswinkel ω bildet. Ein beliebiger Teil EF der Ebene AB gelangt hierbei nach $E'F'$ und das rechtwinklige Parallelepipedon $GEFH$ verwandelt sich in das schiefwinklige $GE'F'H$.

Fig. 395.

Als Ursache für die Deformation tritt in unserem Falle eine auf die Flächeneinheit wirkende Kraft oder ein Zug p auf; als Maſs für die Deformation kann man im gegebenen Falle der Scherung den Winkel ω gelten lassen, um welchen sich die ursprüngliche Normale zu den

verschobenen parallelen Ebenen gedreht hat. Nach Satz 1 auf S. 693 kann man folgende Relation aufstellen:

$$\omega = np \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wo n ein für die gegebene Substanz konstanter Faktor ist, den man als Scherungskoeffizient bezeichnen kann. Seinen reciproken Wert $N = 1 : n$ wollen wir den Scherungsmodul nennen; es ist dies eine Gröfse, welche eine überaus wichtige Rolle spielt. Führt man dieselbe ein, so ist

$$\omega = \frac{1}{N} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

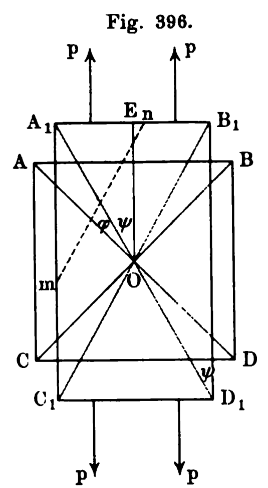
Für $\omega = 1$ wird $N = p$, d. h. der Scherungsmodul ist in diesem Falle gleich derjenigen Zugkraft, welche einen Scherungswinkel gleich der Einheit ($\omega = 57^0\ 17'\ 44{,}8''$) hervorrufen würde, falls die Formeln (43) und (44) auch für so gewaltige Scherungen ihre Gültigkeit behalten würden und falls nicht schon viel früher die Elastizitätsgrenze erreicht und ein Bruch der Körper erfolgen würde.

Bezeichnen wir mit f die Kraft, welche an der in der Ebene AB liegenden Fläche S angreift; es ist dann $p = f : S$. Ist der Abstand der Ebenen AB und CD voneinander gleich ξ, der absolute Betrag der Scherung $EE' = FF' = \sigma$, so ist $\omega = \frac{\sigma}{\xi}$. Setzt man p und ω in Formel (44) ein, so ergiebt sich

$$N = \frac{f\xi}{S\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44, a)$$

Zwischen den Moduln E und N und der Gröfse σ besteht eine einfache Beziehung, die wir nunmehr herleiten wollen. Stellen wir uns einen Würfel $ABDC$ (Fig. 396) vor, dessen Kanten wir der Einfachheit halber gleich der Längeneinheit setzen und nehmen wir an, dafs an zwei gegenüberliegenden Seitenflächen AB und CD senkrechte Zugkräfte p angreifen, unter deren Einwirkung der Würfel sich in ein rechtwinkliges Parallelepipedon $A_1B_1D_1C_1$ mit den Seiten $B_1D_1 = 1 + \alpha p$ und $A_1B_1 = 1 - \sigma\alpha p$ verwandelt. Die Diagonalebenen CB und AD werden hierbei in C_1B_1 und A_1D_1 übergehen. Die physikalische Gerade (Molekülreihe) OA, welche zur Ebene CB senkrecht war, wird nun mit der neuen Lage dieser Ebene C_1B_1 den Winkel A_1OB_1 bilden, der sich von einem rechten Winkel um den

Fig. 396.



Winkel 2φ unterscheidet, wo $\angle \varphi = \angle A_1 O A = \angle B_1 O B$ ist. Hieraus folgt, dafs die zur Diagonalebene CB parallelen Ebenen eine cherung erfahren haben, wobei der Scherungswinkel ω gleich

$$\omega = 2\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

ist.

Die Gröfse der parallel zu diesen Ebenen wirkenden und die Scherung hervorrufenden Zugkräfte bezeichnen wir jetzt mit p, so dafs (44) für den Scherungsmodul N folgenden Wert giebt

$$N = \frac{p_1}{\omega} = \frac{p_1}{2\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

Um p_1 zu bestimmen, betrachten wir eine der verschobenen Ebenen mn, welche parallel zu $C_1 B_1$ ist. Auf sie überträgt sich die Kraft, welche auf den Teil $A_1 n$ der Grundfläche $A_1 B_1$ wirkt und daher ist es klar, dafs auf die Einheit der Fläche mn die Kraft

$$\frac{A_1 n}{mn}\, p = p \cos (A_1 n m)$$

kommt.

Diese Kraft ist der Kante $C_1 A_1$ parallel; die gesuchte Kraft p_1, welche die Scherung bewirkt, ist gleich der Projektion dieser Kraft auf die verschobene Ebene mn, d. h. es ist

$$p_1 = p \cos (A_1 n m) \sin (A_1 n m).$$

Ist jedoch die Deformation sehr gering, so unterscheidet sich der Winkel $A_1 nm$ nur sehr wenig von 45^0 und man kann daher $\cos (A_1 nm) = \sin (A_1 n m) = 1 : \sqrt{2}$ oder $p_1 = 0{,}5\,p$ setzen. Setzt man dies in (46) ein, so ist

$$N = \frac{p}{2\omega} = \frac{p}{4\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Es bleibt nun übrig, den Winkel φ zu bestimmen. Bezeichnet man $\angle A_1 O E = \angle A_1 D_1 B_1$ mit ψ, so ist

$$tg\,\psi = \frac{A_1 B_1}{B_1 D_1} = \frac{1 - \alpha\sigma p}{1 + \alpha p}.$$

Für ein sehr kleines αp ist

$$tg\,\psi = (1 - \alpha\sigma p)\,(1 - \alpha p) = 1 - \alpha\,(1 + \sigma) p \quad . \quad (48)$$

Andererseits ist

$$tg\,\psi = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\,\varphi}{1 + tg\frac{\pi}{4}\,tg\,\varphi} = \frac{1 - tg\,\varphi}{1 + tg\,\varphi}$$

oder für kleine Werte von φ

$$tg\,\psi = \frac{1-\varphi}{1+\varphi} = 1 - 2\,\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (48), so erhält man $\varphi = \frac{\alpha(1+\sigma)}{2}\,p$. Setzt man nun noch diesen Wert in (47) ein, und führt die Gröfse $\frac{1}{\alpha} = E$ ein, so ergiebt sich schliefslich

$$N = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Diese wichtige Formel stellt den Zusammenhang des Youngschen Moduls E und des Scherungsmoduls N mit dem Poissonschen Koeffizienten σ dar.

§ 12. Zusammenstellung der Formeln. Im §. 4 auf S. 699 war bereits erwähnt worden, dafs von den verschiedenen Autoren als Fundamentalgröfsen, welche die elastischen Eigenschaften isotroper Körper charakterisieren, verschiedene Gröfsen gewählt werden und dafs daher in der einschlägigen Litteratur sehr mannigfaltige Formeln vorkommen, unter denen sich ein Anfänger schwer zurechtfinden kann. Wir wollen deshalb in diesem Paragraphen die Formeln zusammenstellen, die man erhält, je nach den Gröfsen, welche zum Ausgangspunkte dienen.

Die hauptsächlichsten Gröfsen sind folgende vier:

E	K	N	σ
Modul für den Zug,	Modul für den allseitigen Druck,	der Scherungsmodul,	der Poissonsche Koeffizient.

Ferner hat man fünf Koeffizienten:

$$\alpha = \frac{1}{E}; \qquad \gamma = \frac{1}{K}; \qquad n = \frac{1}{N}; \qquad \beta = \alpha\sigma \qquad \eta\left(=\frac{1}{3}\gamma\right)$$

β: Koeff. der Querkontraktion; η: Koeff. der Volumenausdehnung — beim Zug.

Ferner beziehen sich zwei Gröfsen

$$E' \text{ und } \alpha' = \frac{1}{E'}$$

auf die einseitige Kompression einer unbegrenzten Schicht und schliefslich existiert noch die Hülfsgröfse

$$\lambda,$$

die in Gleichung (1) auf S. 700 bestimmt wurde und deren Bedeutung aus dem Folgenden klar werden wird. Aus den zahlreichen möglichen

und in der That vorkommenden Formelgruppen wollen wir drei auswählen.

I. Als Fundamentalgröſse nehmen wir den Youngschen Modul E und den Poissonschen Koeffizienten σ. Es sind dies diejenigen beiden Gröſsen, durch welche wir bereits bei unseren Ableitungen alle übrigen Gröſsen ausgedrückt haben.

Wir hatten folgende Formeln erhalten:

(30) auf S. 718 $$E' = \frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad \text{(50, a)}$$

(38) „ „ 720 $$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad \text{(50, b)}$$

(49) „ „ 726 $$N = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad \text{(50, c)}$$

(15) „ „ 713 $$\beta = \alpha\sigma = \frac{\sigma}{E} \quad \text{(50, d)}$$

(20) „ „ 713 $$\eta = \alpha(1-2\sigma) = \frac{1-2\sigma}{E} \quad \text{(50, e)}$$

(1) „ „ 700 $$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad \text{(50, f)}$$

II. Als Fundamentalgröſsen wählen wir den Modul des allseitigen Druckes K und den Scherungsmodul N. Die Gleichungen (50, b) und (50, c) geben zunächst σ und E, worauf dann die übrigen Gröſsen leicht gefunden werden können:

$$\sigma = \frac{3K-2N}{2(3K+N)} \quad \text{(51, a)}$$

$$E = \frac{9NK}{3K+N} \quad \text{(51, b)}$$

$$E' = K + \frac{4}{3}N \quad \text{(51, c)}$$

$$\lambda = K - \frac{2}{3}N \quad \text{(51, d)}$$

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{1}{3N} + \frac{1}{9K} \quad \text{(51, e)}$$

$$\beta = \alpha\sigma = \frac{1}{6N} - \frac{1}{9K} \quad \text{(51, f)}$$

Beiläufig bemerkt sei, daſs die beiden letzten Formeln einen interessanten Ausdruck für den Scherungskoeffizienten $n = \frac{1}{N}$ geben,

nämlich

$$n = 2(\alpha + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

In Formel (40, a) auf S. 722 kam ein Faktor vor, der nunmehr folgende einfache Form annimmt

$$\frac{5 - 4\sigma}{E} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

III. **Die Koeffizienten von Lamé λ und $2N$.** Lamé und Cauchy haben in die Elastizitätslehre zwei Koeffizienten eingeführt. nämlich erstens λ, welche Gröfse von uns in die vorhergehende Formelzusammenstellung aufgenommen worden ist, und zweitens $2N$, d. h. den doppelten Scherungsmodul. Diese Koeffizienten werden auf Grund folgender Überlegungen erhalten: man stellt sich einen Würfel (Fig. 396) vor, auf zwei von dessen Seitenflächen die Zugkräfte p wirken; die Würfelkanten sind gleich der Längeneinheit. Diese Kräfte p rufen eine Verlängerung αp und eine Volumenzunahme ηp hervor. Man kann sich dabei vorstellen, dafs ein Teil der wirkenden Kräfte p die Deformation αp, der andere die Deformation ηp hervorruft, und dafs nach Satz 1 auf S. 693 diese Teile den von ihnen hervorgerufenen Deformationen proportional sind. Bezeichnet man die Proportionalitätskoeffizienten vorläufig mit $2N$ und λ, so ist

$$p = 2N\alpha p + \lambda \eta p$$

oder

$$2N\alpha + \lambda \eta = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Ausgehend von obiger Vorstellung kann man die ganze Theorie der Elastizität eines isotropen Körpers entwerfen und den Youngschen Modul, den Kompressions- und Scherungsmodul, den Poissonschen Koeffizienten u. s. w. durch $2N$ und λ ausdrücken. Hierbei zeigt sich auch, dafs der Koeffizient $2N$ gleich dem doppelten Scherungsmodul ist und dafs λ durch die Formeln (50, f) oder (51, d) ausgedrückt wird. Hier wollen wir uns auf den Hinweis beschränken, dafs sich Formel (54) in eine Identität verwandelt, wenn man in dieselbe die Werte aus (50, c), (50, f), (50, e) und $\alpha = \frac{1}{E}$ ein setzt.

Löst man die Gleichungen (50) und (51) auf, so ergiebt sich

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + N)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55, a)$$

$$E = \frac{N(3\lambda + 2N)}{\lambda + N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55, b)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3} N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55, c)$$

$$\eta = \frac{1}{3\lambda + 2N} \quad \dots \dots \dots \quad (55, d)$$

$$E' = \lambda + 2N \quad \dots \dots \dots \quad (55, e)$$

Bedient man sich der Laméschen Konstanten, so bezeichnet man gewöhnlich $2N$ mit einem Buchstaben, z. B. $2N = \mu$.

IV. Andere Konstanten. Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dafs Kirchhoff zwei Konstanten eingeführt hat (K) und L, welche mit unseren Konstanten folgendermafsen zusammenhängen

$$(K) = N$$

$$L = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}.$$

Einige Autoren führen die Gröfsen

$$A = \lambda + 2N = E'$$

$$B = N$$

ein.

Bisweilen führt man auch das Verhältnis

$$\varkappa = \frac{N}{K}$$

ein; dann ergiebt Formel (51, a)

$$\sigma = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)}.$$

Von Interesse ist es, zu bestimmen, was die Poissonsche Theorie, d. h. die Annahme $\sigma = \frac{1}{4}$ ergiebt. Aus den im vorhergehenden angeführten Gleichungen folgt für $\sigma = \frac{1}{4}$:

$$N = \lambda; \quad L = \frac{1}{2}; \quad A = 3B; \quad K = \frac{5}{3}\lambda = \frac{5}{3}N;$$

$$E = \frac{5}{2}\lambda = \frac{5}{2}N; \quad \varkappa = \frac{3}{5}.$$

§ 13. **Torsion.** Die ersten genauen Untersuchungen der Torsionsgesetze stammen von Coulomb, der für die Torsion von Drähten zu folgenden Resultaten gelangte. Macht man das eine Drahtende unbeweglich, so ist zum Drehen oder Drillen des anderen Endes um einen gewissen Winkel φ ein Kräftepaar erforderlich, dessen Moment mit P bezeichnet werden möge. Diese Gröfse spielt im vorliegenden Falle die Rolle einer äufseren, die Deformation hervorrufenden Kraft. In hergebrachter Weise werden wir (obgleich dies sehr ungenau ist) das Moment P des wirkenden Kräftepaares die tordierende Kraft

nennen. Die Länge des Drahtes sei l und r der Radius seines Querschnittes für den besonderen Fall, dafs dieser Querschnitt ein Kreis ist.

Coulomb fand, dafs der Torsionswinkel φ proportional der tordierenden Kraft P, direkt proportional der Drahtlänge l und indirekt proportional der vierten Potenz des Radius r ist. Der Winkel φ hängt vom Grade der Spannung des Drahtes nicht ab. Die Coulombschen Gesetze führen zu folgender Formel

$$\varphi = C\,\frac{Pl}{r^4} \quad \dots\dots\dots \quad (56)$$

wo C ein von der Substanz des Drahtes abhängiger Faktor ist. Bezeichnet man $\frac{1}{C}$ mit F, so ergiebt sich für das tordierende Moment P folgender Ausdruck

$$P = \frac{F\varphi r^4}{l} \quad \dots\dots\dots \quad (57)$$

Setzt man

$$\frac{Fr^4}{l} = f \quad \dots\dots\dots \quad (58)$$

so ist

$$P = f\varphi \quad \dots\dots\dots \quad (59)$$

Letztere Formel gilt für einen Draht von beliebiger Querschnittsform. Die Gröfse f kann man den Torsionsmodul des gegebenen Drahtes nennen. Diese Gröfse ist numerisch gleich dem Momente des Kräftepaares oder der todierenden Kraft, durch welche das Drahtende um den Einheitswinkel, d. h. um $\varphi = 57^0\ 17'\ 44{,}8''$ gedreht wird.

Wir wollen jetzt die Arbeit R bestimmen, welche geleistet werden mufs, um das Drahtende um den Winkel φ zu tordieren. Sei Q das Moment des Kräftepaares, welches den Draht um den Winkel ψ tordiert, dann ist dR diejenige Arbeit, welche bei Vermehrung des Momentes Q um den Betrag dQ und des Winkels ψ um $d\psi$ geleistet wird und zwar ist $dR = Q d\psi$. Es ist aber $Q = f\psi$, vergl. (59), folglich $dR = f\psi d\psi$ Hieraus ergiebt sich für die Gesamtarbeit

$$R = f\int_0^\varphi \psi\, d\psi = \frac{1}{2} f\varphi^2 = \frac{1}{2} P\varphi \quad \dots \quad (59, a)$$

Mithin ist die potentielle Energie J des tordierten Drahtes ebenfalls gleich

$$J = \frac{1}{2} f\varphi^2 \quad \dots\dots\dots \quad (59, b)$$

Für $\varphi = \sqrt{2}$, d. h. $\varphi = 81^0\ 1'\ 42''$ ist $J = f$.

Der Torsionsmodul f eines gegebenen Drahtes ist

numerisch gleich der potentiellen Energie, welche der Draht besitzt, wenn der Torsionswinkel gleich $\varphi = \sqrt{2} = 81^0\,1'\,42''$ ist.

Die Proportionalität zwischen P und φ ist für dünne Drähte bis zu sehr grofsen Werten von φ eine befriedigend genaue; infolgedessen sind die Torsionsschwingungen eines Körpers, der sich am unteren Ende eines tordierten und darauf sich selbst überlassenen Drahtes befindet, in hohem Mafse isochron, d. h. die Schwingungsdauer derselben hängt von der Amplitude nicht ab. Dieser Umstand war bereits auf S. 359 erwähnt worden. Die Schwingungsdauer T findet sich zu

$$T = \pi \sqrt{\frac{Q}{f}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

wo Q das Trägheitsmoment (S. 99) des Körpers ist, welcher am unteren Drahtende hängt. Dasselbe wird, wie wir sahen, in speziellen Fällen durch die Formeln (36) bis (39) auf S. 101 bis 103 bestimmt. Identisch mit (60) ist (23) auf S. 361, wo anstatt Q und f die Buchstaben K und C gewählt sind.

Die Formel (60) kann dazu dienen, die Coulombschen Gesetze zu verifizieren, denn ändert man Länge und Durchmesser eines Drahtes von gegebenem Stoff, so mufs

$$\frac{f}{f_1} = \frac{T_1^2}{T^2}$$

sein, wo das Verhältnis $\frac{f}{f_1}$ sich aus (58) im Zusammenhange mit der gewählten Länge und Durchmesser des Drahtes bestimmt.

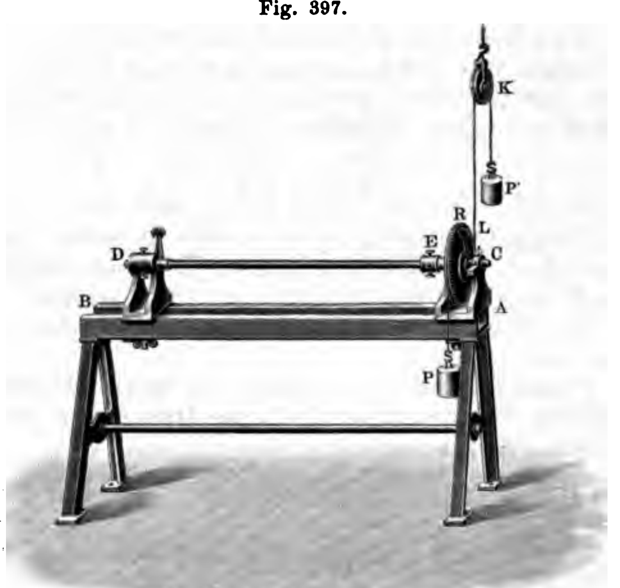
Wenn das untere Ende eines Drahtes, während das obere festbleibt, Torsionsschwingungen vollführt, so vermindert sich allmählich die Amplitude der letzteren nicht nur aus äufseren, sondern auch aus inneren Gründen; es entsteht infolge von innerer Reibung ein Energieverlust. Diese Frage ist von Bouasse untersucht worden.

Die Gröfse F ist charakteristisch für die gegebene Substanz und wir werden sehen, in welchem Zusammenhange sie mit den in den letzten Paragraphen betrachteten Gröfsen steht.

Coulomb hat seine Untersuchungen auf Drähte beschränkt; Savart (1829) und Wertheim (1857) haben die Torsion von Stäben untersucht. Der Apparat, welchen Wertheim benutzte, findet sich in Fig. 397 (a. f. S.) abgebildet. Der zu untersuchende Stab wurde in den Klemmen D und E oberhalb eines gufseisernen Tischchens befestigt. In der Nähe des Endes D war am Stabe ein Zeiger angebracht, von dem aus die Stablänge l bis zur Hülse E gerechnet wurde. Die Verschiebungen des Zeigers auf einen kleinen an D befestigten Kreisbogen setzten in den Stand, die sehr minime Torsion des linken Stabendes zu bestimmen; diese Torsion wurde vom Torsionswinkel des anderen Endes E subtrahiert, um den Torsionswinkel φ zu erhalten. Zwei gleiche Ge-

wichte P und P' wirkten tangential zur Kreisscheibe R, deren Drehungswinkel mittels des Index L, des auf demselben angebrachten Nonius und der Gradteilung auf dem Kreise R bestimmt wurde. Ist ϱ der Radius dieses Kreises und p das Gewicht jedes der beiden Gewicht-

Fig. 397.



stücke, so ist das Produkt $2p\varrho$ gleich der tordierenden Kraft. Wertheim fand, dafs die Coulombschen Gesetze auch für Stäbe ihre volle Geltung behalten; der Winkel φ ist proportional Pl und für runde Stäbe indirekt proportional r^4.

§ 14. Zusammenhang zwischen dem Torsionsmodul f und dem Scherungsmodul N. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Torsionsmodul f eines Drahtes von beliebigem Querschnitte und dem Scherungsmodul N der Drahtsubstanz finden. Sei AB (Fig. 398) die Achse des Drahtes, um die sich die untere Grundfläche um den Winkel φ gedreht hat; ferner sei ds ein Flächenelement der Grundfläche, das sich bei D im Abstande $DB = AC = \varrho$ von der Drehungsachse befindet und nach D_1 gelangt ist, wobei $\angle DBD_1 = \varphi$ ist. Zieht man $DC \parallel BA$, so findet man bei C das Element ds der anderen Grundfläche, wobei beide Elemente in D und C vor der Torsion einander parallel waren und sich auf derselben Senkrechten befanden. Nach der Torsion war diese Gerade in die Schraubenlinie CD_1 übergegangen, die sich, wie bekannt, bei Abwicklung der Cylinderfläche (vom Grundflächenradius r) in eine Gerade verwandelt. Der Scherungswinkel ω wird durch den Dreieckswinkel C dargestellt,

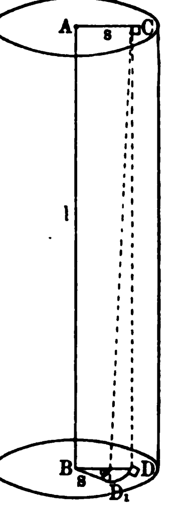
so dafs $tg\,\omega = \frac{\frown DD_1}{DC} = \frac{\varrho\,\varphi}{l}$ ist. Wegen der Kleinheit des Winkels ω kann man sogar für grofse Werte von φ

$$\omega = \frac{\varrho}{l}\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

setzen.

Um den Scherungswinkel ω zu erhalten, mufs man an die Oberflächeneinheit die Kraft $p = N\omega$ angreifen lassen, vergl. (44) auf S. 724, also am Flächenelement ds die Kraft $N\omega ds$. Das Moment dieser Kraft in Bezug auf die Drehungsachse ist gleich $N\varrho\,\omega ds$ oder, wenn man (61) berücksichtigt, $N\frac{\varrho^2}{l}\,\varphi ds$. Hieraus folgt, dafs die tordierende Kraft P, d. h. das Moment des Kräftepaares, welches alle Elemente ds der Grundfläche um den Winkel φ dreht, gleich

Fig. 398.



$$P = \frac{N\varphi}{l}\iint \varrho^2 ds \quad \ldots \quad (62)$$

ist, wo sich die Integration auf alle Elemente ds der Grundfläche des Drahtes oder Stabes erstreckt. Da ds von der Dimension $[L^2]$ ist, so ist klar, dafs das gesamte Integral eine Gröfse von der Dimension $[L^4]$ darstellt, d. h. dafs P eine Gröfse von der vierten Potenz in Bezug auf die linearen Dimensionen des Draht- oder Stabquerschnittes ist. Bezeichnet man sie symbolisch mit B^4, so ist

$$P = \frac{N\varphi B^4}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Es ist aber $P = f\varphi$, also

$$\left.\begin{aligned} f &= N\frac{B^4}{l} \\ B^4 &= \iint \varrho^2 ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Diese Formel liefert in allgemeinster Form den Zusammenhang zwischen dem Torsionsmodul f eines Drahtes und dem Scherungsmodul N des Stoffes, aus welchem er besteht.

Führen wir für einen gewöhnlichen cylindrischen Draht vom Radius r die Polarkoordinaten ϱ und α ein, so ist $ds = \varrho\, d\varrho\, d\alpha$ und

$$B^4 = \int\limits_{\varrho=0}^{r}\int\limits_{\alpha=0}^{2\pi} \varrho^3 d\varrho\, d\alpha = 2\pi\int\limits_{0}^{r}\varrho^3 d\varrho = \frac{\pi r^4}{2} \quad \ldots \quad (65)$$

Berechnet man B^4 auch für andere Querschnittsformen, so erhält man:

Für einen kreisförmigen Querschnitt . . . . $B^4 = \frac{\pi}{2} r^4$,

für eine Röhre mit den Radien r_1 und r_2 . . $B^4 = \frac{\pi}{2} (r_1^4 - r_2^4)$,

für einen rechtwinkligen Querschnitt mit den Seiten a und b . . . . $B^4 = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$.

Bleiben wir bei dem gewöhnlichen cylindrischen Draht stehen und setzen (65) in 63) und (64) ein, so ergiebt sich

$$P = \frac{\pi N r^4}{2l} \varphi \quad \text{. . . . . (66, a)}$$

$$f = \frac{\pi N r^4}{2l} \quad \text{. . . . . (66, b)}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Formel (57), welche die von Coulomb gefundenen Torsionsgesetze wiedergiebt, so sieht man, dafs dieselben miteinander vollkommen übereinstimmen. Der Koeffizient F in der Coulombschen Formel ist gleich $\frac{\pi}{2} N$, wo N der Scherungsmodul ist.

§ 15. **Experimentelle Bestimmung des Scherungsmoduls *N* und des Poissonschen Koeffizienten σ.** Die abgeleiteten Formeln setzen uns in den Stand, nach zwei Methoden den Scherungsmodul N und sodann den Poissonschen Koeffizienten σ desjenigen Stoffes zu bestimmen, aus welchem der Draht besteht.

I. Schwingungsmethode (Dynamische Methode). Am unteren Ende eines Drahtes wird ein Körper befestigt, dessen Trägheitsmoment (S. 99) gleich Q ist. Nehmen wir an Q könne aus der Dichte, Form und den Dimensionen des Körpers oder indirekt mit Hülfe der auf S. 375 angegebenen Methoden gefunden werden; dann hat man noch die Schwingungsdauer T des Körpers zu bestimmen, welcher Schwingungsbewegungen um die Drahtachse ausführt. Formel (60) ergiebt, wenn man (66, b) substituiert,

$$T = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2\pi l Q}{N}}$$

und hieraus findet man

$$N = \frac{2\pi l Q}{T^2 r^4} \quad \text{. . . . . (67)}$$

Im besonderen Falle, wo der Körper eine Kugel vom Gewichte Π ist, erhält man $Q = \frac{2}{5} \frac{\Pi R^2}{g}$, wobei R den Kugelradius und g die

Beschleunigung der Schwerkraft, vergl. (39) auf S. 103, bedeutet. In diesem Falle ist

$$N = \frac{\pi}{5} \frac{l\Pi}{g} \left(\frac{2R}{r^2 T}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (67, a)$$

Kennt man Q, l und r und mifst T, so ergiebt sich aus Formel (67) der Scherungsmodul N. Berechnet man N in den üblichen Einheiten, d. h. in Kilogrammen pro Quadratmillimeter Oberfläche, so hat man Π in Formel (67, a) oder einer anderen diese Gröfse enthaltenden Formel in Kilogrammen auszudrücken, l, r und andere lineare Gröfsen aber, wie z. B. R in (67, a) in Millimetern. Drückt man T in Sekunden aus, so ist $g = 9810 \frac{\text{mm}}{(\text{sec})^2}$. Die Dimension des Moduls N ist

$$[N] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Oberfläche}} = \frac{ML}{T^2} : L^2 = \frac{M}{LT^2} \quad \ldots \quad (68)$$

Von derselben Dimension sind auch die Moduln E und K.

II. Torsionsmethode (Statische Methode). Hat man das Moment P des Kräftepaares, welches man am unteren Drahtende angreifen lassen mufs, um den Draht um den Winkel φ zu drehen, durch Messung ermittelt, so findet man den Scherungsmodul N aus Formel (66, a)

$$N = \frac{2lP}{\pi r^4 \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

wo l die Länge, r der Querschnittsradius des Drahtes ist. Der Winkel φ mufs in den auf S. 44 betrachteten Einheiten, l und r in Millimetern, P in Millimeterkilogrammen ausgedrückt werden.

Man kann auch beide Drahtenden befestigen, das Kräftepaar in der Drahtmitte angreifen lassen und den Drehungswinkel φ messen. In diesem Falle ist zur Tordierung jeder Hälfte des Drahtes ein Kräftepaar erforderlich, dessen Moment man erhält, wenn man in (66, a) den Wert $\frac{1}{2} l$ anstatt l einsetzt. Das gesuchte Moment P_1, das auf den Draht einwirkt, mufs jetzt zweimal gröfser sein, also

$$P_1 = \frac{2N\pi r^4}{l} \varphi$$

woraus dann

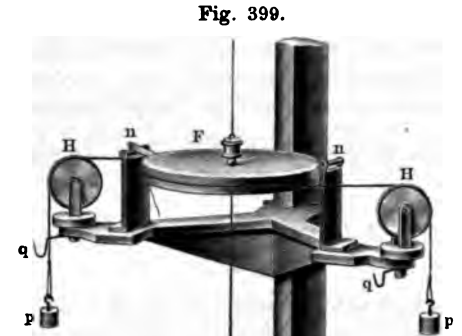
$$N = \frac{lP_1}{2\pi r^4 \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (69, a)$$

folgt. Wie man sieht, ist $P_1 = 4P$.

Zur Bestimmung des Scherungsmoduls kann der Apparat von W. W. Lermantow dienen, welchen wir auf S. 704 (Fig. 388 und 389) beschrieben hatten, und zwar insbesondere sein in der Mitte ange-

brachter Teil FHp (Fig. 388). Derselbe ist in Fig. 399 in gröfserem Mafsstabe dargestellt und hat folgende Einrichtung. An der Mitte des Drahtes ist eine horizontale Scheibe F befestigt. Dieselbe ist mit einer (in der Figur nicht dargestellten) Kreisteilung versehen, der gegenüber sich die beiden festen Indices nn befinden, so dafs man mit ihrer Hülfe den Drehungswinkel φ der Scheibe ablesen kann. Zwei Fäden, deren Enden am Rande der Scheibe befestigt sind, ruhen auf den festen Rollen HH, sie sind einander parallel und haben die Richtung horizontaler Tangenten zum Scheibenrande. An ihnen hängen die Gewichte pp; letztere werden an die Haken qq gehängt, wenn man die Lage der Scheibe F bei nichttordiertem Drahte beobachtet. Bezeichnet p das in Kilogrammen ausgedrückte Gewicht jedes der beiden Gewichtsstücke und d den Scheibendurchmesser in Millimetern, so ist das Moment $P_1 = pd$, so dafs man den Scherungsmodul N aus der Formel

Fig. 399.



$$N = \frac{lpd}{2\pi r^4 \varphi} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (69, b)$$

erhält, wo l die Länge des ganzen Drahtes und r der Radius seines Querschnittes ist.

Der Poissonsche Koeffizient. Hat man nach einer der beiden angeführten Methoden den Scherungsmodul N und ferner nach der auf S. 701 gegebenen Methode den Youngschen Modul E bestimmt, so erhält man den Poissonschen Koeffizienten nach Formel (49) auf S. 726; es ist

$$N = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

mithin

$$\sigma = \frac{E}{2N} - 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (70)$$

Hierin besteht die eine der Methoden zur Bestimmung von σ, auf welche im Früheren (S. 714) hingewiesen worden war.

§ 16. Zahlenwerte des Scherungsmoduls N. Da σ zwischen Null und $\frac{1}{2}$ liegt, so ist offenbar

$$\frac{1}{3} E < N < \frac{1}{2} E.$$

Nach der Theorie von Poisson ($\sigma = 0{,}25$) mufs $N = 0{,}4\ E$ sein. Für Kork ist $\sigma = 0$, folglich $N = 0{,}5\ E$; für Kautschuk ist $\sigma = 0{,}5$, also $N = \frac{E}{3}$. Die Messungen nach der dynamischen Methode liefern im allgemeinen etwas gröfsere Werte, als die nach der statischen Methode angestellten. Es mögen hier einige Werte folgen:

	$N \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$	
Eisen	7651	(Coulomb)
„	6706	(Wertheim)
Kupfer	4213	(Savart)
„	3612	(Wertheim)
Gufsstahl	7458	„
Glas	2346	„
Weiches Eisen	8100	(Baumeister)
Hartes „	7850	„
Silber	2650	„
Messing	3500	„
Zinn	1543	„
Zink	3820	„
Aluminium	3350	„

Mit Zunahme der Temperatur nimmt der Scherungsmodul ab, und zwar im allgemeinen schneller, als es der Temperaturzunahme bei einfacher Proportionalität entsprechen würde. Wir wollen hier einige von Pisati für Eisen und Stahl gefundene Werte der Moduln E und N anführen:

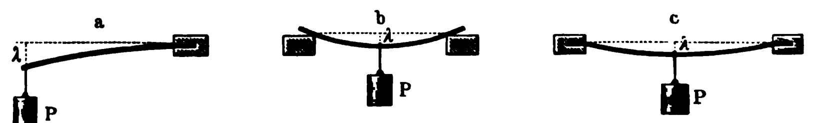
t^0	Eisen		Stahl	
	$E \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$	$N \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$	$E \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$	$N \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$
0	21 483	8108	18 518	8290
100	21 212	7934	18 232	8094
200	20 458	7784	17 820	7846
300	19 175	7706	17 372	7585

Für Glas ist $N = N_0\ (1 - 0{,}001\,51\ t)$, während für Eisen angenähert $N = N_0\ (1 - 0{,}000\,206\ t)$ ist. Bei Erwärmung von 0° bis 100° nimmt N für Pt um 1,64 Proz. ab, für Cu um 3,65 Proz., Ag um 7,10 Proz., Al um 21,3 Proz., Zn um 40 Proz. und Pb um 80 Proz.

Der Scherungsmodul des Kautschuks ist bei 20° gleich $0.163\ \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$, bei Steigerung der Temperatur nimmt er zu.

§ 17. **Biegung.** Wir wollen zunächst diejenigen Formeln anführen, welche sich auf die durch Biegung hervorgerufene Deformation beziehen und die hierfür theoretisch gefundenen und experimentell bestätigten Gesetze ausdrücken. Gewöhnlich unterscheidet man drei Fälle der Biegung eines geradlinigen Stabes; ihr Wesen läfst sich aus der Fig. 400 erkennen. Im ersten Falle (a) ist der Stab an einem Ende befestigt, im zweiten Falle (b) stützt er sich mit beiden Enden frei auf seine Unterlage, im dritten Falle (c) ist der Stab an beiden

Fig. 400.



Enden befestigt. Die Kraft P wirkt, wie aus den Figuren zu ersehen ist, in allen drei Fällen senkrecht zur Länge des Stabes. Die Senkung des Angriffspunkts der Kraft, d. h. des Stabendes (a) oder der Stabmitte (b und c) heifst der Biegungspfeil; wir wollen ihn mit λ bezeichnen. Für diese Gröfse erhält man folgende allgemeine Formel:

$$\lambda = \frac{k}{12q} \frac{Pl^3}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Hier bedeutet P die wirkende Kraft, l die Stablänge, E den Youngschen Modul, k eine Konstante, welche für die drei verschiedenen Arten von Biegung verschieden ist, und q einen Ausdruck, welcher von den Dimensionen und der Form des Stabquerschnitts abhängt. Der Faktor k hat folgende Werte:

Biegungsfall	a	b	c
$k =$	4	$^1/_4$	$^1/_{16}$

Hieraus folgt, dafs, wenn man λ in den drei Fällen a, b und c (Fig. 400) der Reihe nach mit λ_a, λ_b und λ_c bezeichnet, man für ein und denselben Stab die Relation

$$\lambda_a : \lambda_b : \lambda_c = 64 : 4 : 1$$

erhält.

Die Gröfse q hat für verschiedene Querschnitte verschiedene Werte, und zwar:

Runder Querschnitt vom Radius R . . . . . . $q = \frac{\pi R^4}{4}$

Rechtwinkliger Querschnitt mit den Seiten a ($\perp$ zu P, horizontal) und b ($\parallel$ zu P) . . . . . . $q = \frac{a b^3}{12}$

Quadratischer Querschnitt (a^2) . . . . $q = \frac{a^4}{12}$

Röhre mit den Radien R und r . . . . $q = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$.

Setzt man den zum rechtwinkligen Querschnitt gehörigen Wert von q in (71) ein, so ergiebt sich

$$\lambda = k \frac{Pl^3}{ab^3E} \quad \text{. . . . . (71, a)}$$

wo $k = 4$, $^1/_4$ oder $^1/_{16}$ ist, je nach dem vorliegenden Biegungsfall.

Die angeführten Formeln drücken folgende Gesetze der Biegung aus:

Der Biegungspfeil ist der wirkenden Kraft und dem Kubus der Stablänge direkt und dem Youngschen Modul für die Stabsubstanz indirekt proportional; für einen Stab mit rechtwinkligem Querschnitt ist der Biegungspfeil aufserdem indirekt proportional der Breite und dem Kubus der Höhe des Stabes.

Formel (71) ergiebt

$$E = \frac{k}{12q} \frac{Pl^3}{\lambda} \quad \text{. . . . . (72)}$$

und speziell für einen Stab mit rechtwinkligem Querschnitt

$$E = k \frac{Pl^3}{ab^3\lambda} \quad \text{. . . . . (72, a)}$$

Obige Formeln können dazu dienen, den Youngschen Modul E zu bestimmen, wenn man den Biegungspfeil λ gemessen hat. Zu diesem Zwecke hat man mit Hülfe des Kathetometers die Senkung des Stabendes resp. der Stabmitte zu bestimmen; man kann übrigens auch die Methode der Spiegelablenkung (S. 320) anwenden, wobei man das Spiegelchen derart anzubringen hat, dafs seine Drehung als Mafs für den Biegungspfeil dient.

Viel genauer als λ kann man den Winkel Θ zwischen der Tangente zur Achse des gebogenen Stabes an seinem Ende und der ursprünglichen Richtung dieser Achse bestimmen. Die Theorie ergiebt für den Fall (a), wo $k = 4$ ist,

$$\lambda = \frac{2}{3} l \, tg \, \Theta \quad \text{. . . . . (73)}$$

woraus für einen rechtwinkligen Stab

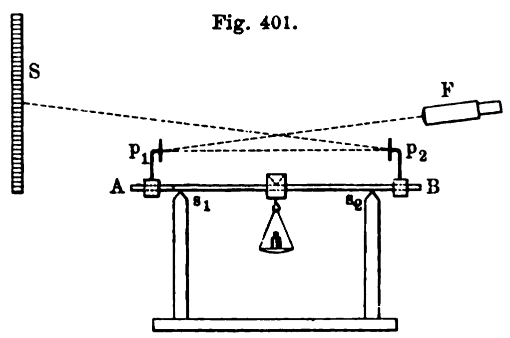
$$E = \frac{6 Pl^2}{ab^3 tg \, \Theta} \quad \text{. . . . . (73, a)}$$

folgt. Befestigt man das Spiegelchen am Stabende, so läfst sich Θ leicht durch Messung finden.

Noch empfindlicher ist eine von A. König (1886) in Vorschlag gebrachte Methode, für welche der in Fig. 401 (a. f. S.) abgebildete Apparat diente. An beiden Enden des in der Mitte belasteten Stabes

AB sind die Spiegelchen p_1 und p_2 befestigt Die von der Skala S ausgehenden Strahlen fallen zunächst auf das Spiegelchen p_2, werden nach p_1 reflektiert und treten darauf ins Fernrohr F ein. Im vorliegenden

Fig. 401.



Falle ist $k = 0{,}25$ und hat man in (73) $0{,}5\,l$ an Stelle von l zu setzen; demgemäfs ist

$$E = \frac{3\,Pl^2}{4\,ab^3 tg\,\Theta}.$$

Es läfst sich nun aber leicht finden, dafs für den Apparat von König

$$tg\,\Theta = \frac{n}{4\,D + 2\,d}$$

ist, wo n die Anzahl der Skalenteile ist, die während der erfolgenden Biegung durchs Gesichtsfeld des Fernrohrs wandern, D der Abstand von S und p_2 und endlich d der Abstand der Spiegelchen p_1 und p_2 voneinander. Demgemäfs erhält man schliefslich den Ausdruck

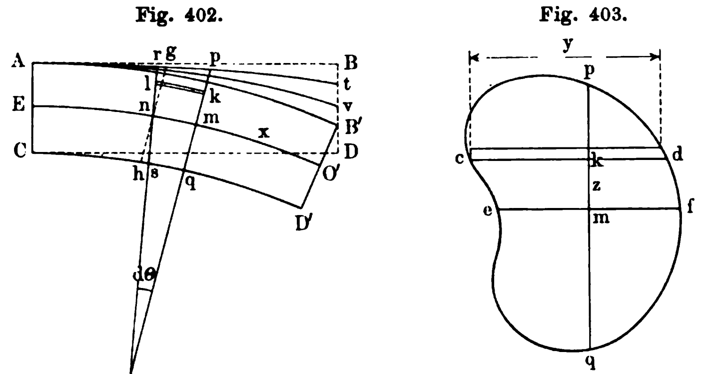
$$E = \frac{3\,Pl^2(2\,D + d)}{2\,n\,a\,b^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Kombiniert man die Messungsresultate für die Biegung mit denen für die Torsion, so kann man E und N und hieraus nach Formel (70) die Gröfse σ finden. In den Versuchen von Kirchhoff, Okatow, Cornu, Voigt, Straubel (1899) u. a. wurde der Stab gleichzeitig gebogen und tordiert. Wir gehen nunmehr darauf über, zu zeigen, wie die Formeln (71) und (73) gefunden werden und wollen uns dabei auf den ersten Fall der Biegung (Fig. 400, a) beschränken, wo $k = 4$ ist. Wir wollen demnach beweisen, dafs

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3\,q}\,\frac{Pl^3}{E} \\ \lambda &= \frac{2}{3}\,l\,tg\,\Theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

ist.

Die allgemeine Bedeutung der Gröſse q, welche vom Flächeninhalt des Stabquerschnitts abhängt, wird aus der folgenden Betrachtung klar werden; ihre speziellen Werte sind auf S. 738 und 739 angegeben worden. Nehmen wir an, der Querschnitt des Stabes habe eine beliebige Form, wie z. B. die in Fig. 403 angegebene. Wir legen nun durch den Stab eine senkrechte Ebene, parallel zu seiner Seitenfläche. Diese Ebene wird den ungebogenen Stab im Rechtecke $ABDC$ (in Fig. 402 punktiert gezeichnet) schneiden und verwandelt sich bei der Biegung in die Figur $AB'D'C$. Nehmen wir an, der in Fig. 403 dargestellte Querschnitt befinde sich bei pq (Fig. 402) und die Geraden $pkmq$ stellen in beiden Figuren dieselbe Durchschnittslinie zweier zu einander senkrechten Ebenen dar und denkt man sich den ungebogenen



Stab in dünne horizontale Schichten zerlegt, so verlängern sich bei der Biegung des Stabes die oberen Schichten, indem sie ausgereckt werden (z. B. $AB' > AB$) und verkürzen sich die unteren, welche wiederum zusammengedrückt werden ($CD' < CD$). Zwischen diesen und jenen Schichten befindet sich nun eine neutrale, deren Länge ungeändert bleibt. Sei EO' diese Schicht; sie schneidet den betrachteten Querschnitt längs der Geraden emf. Dieser Querschnitt steht unter der Wirkung eines Kräftepaars, welches ihn um die Gerade ef zu drehen sucht, denn die elastischen Kräfte wirken auf den oberen Teil $ecpdf$ in der Richtung zum unbeweglichen Stabende hin, auf den unteren Teil eqf dagegen in der entgegengesetzten Richtung; der Teil $mpAE$ (Fig. 402) erlangt das Bestreben sich zu verkürzen, der Teil $mqCE$ sich zu verlängern.

Wir wollen nun das Moment M des Kräftepaars berechnen, welches auf den Querschnitt pq (vergl. Fig. 402 und 403) wirkt. Zu diesem Zwecke ziehen wir unendlich nahe zu diesem Schnitte noch einen anderen rs und bezeichnen den Winkel zwischen diesen senkrechten Schnitten mit $d\Theta$. Bezeichnet man ferner den Abstand des betrachteten Querschnitts pq vom Stabende $D'B'$, auf welches die Kraft P einwirkt,

mit x, so ist $mn = dx$. Den Teil des gebogenen Stabes, welcher zwischen den Schnitten pq und rs liegt, zerlegt man in unendlich dünne Schichten, parallel zur neutralen Schicht mn oder ef. Sei lk eine dieser Schichten, ihre Breite bezeichnen wir mit $y = cd$ und setzen $km = z$, so dafs die Dicke der Schicht gleich dz ist. Endlich ziehen wir noch zwei Tangenten rt und pv; es ist dann leicht einzusehen, dafs $tv = d\lambda$ den Zuwachs einer gewissen variablen Gröfse $B'v$ darstellt, deren Wert für $x = l$, wenn die Tangente AB ist, den gesuchten Biegungspfeil $\lambda = B'B$ darstellt. Die Schicht lk hatte ursprünglich die Länge $mn = dx$; zieht man $hg \parallel pq$, so sieht man, dafs seine Verlängerung gleich $nl\,d\Theta = z\,d\Theta$ ist. Um die Länge dx um den Betrag $z d\Theta$ zu vermehren, hat man die Kraft f wirken zu lassen, für welche man leicht einen Ausdruck aus (8) auf Seite 702 findet. Setzt man $L_0 = dx$, $\Delta L_0 = z\,d\Theta$ und $s = y\,dz$ (s ist gleich dem Streifen cd in Fig. 403), so erhält man für die gesuchte Kraft

$$f = E\,\frac{y\,z\,dz\,d\Theta}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75,\text{a})$$

Diese Kraft aber wirkt auf cd in der Richtung von kl und sucht den Querschnitt pq um die neutrale Linie ef zu drehen. Das Moment dieser Kraft erhält man durch Multiplikation derselben mit z; es ist gleich

$$fz = E\,\frac{y\,z^2\,dz\,d\Theta}{dx}.$$

Das ganze auf den Querschnitt pq wirkende Drehungsmoment M erhält man, wenn man die Summe der entsprechenden Ausdrücke für alle zum Teil ausgereckten, zum Teil zusammengedrückten Schichten bildet, welche den Querschnitt pq berühren. Da bei beliebiger Form des Querschnitts $y = cd$ von $z = km$ abhängt, so ist jenes ganze Moment M gleich

$$M = E\,\frac{d\Theta}{dx}\int_{-z_1}^{z_2} y\,z^2\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

wo z_1 und z_2 die absoluten Grenzwerte der Gröfse z bedeuten. Wir wollen nun für das Folgende

$$\int_{-z_1}^{z_2} y\,z^2\,dz = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

setzen.

Offenbar ist q nichts anderes als das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts in Bezug auf die Schnittlinie ef des Querschnitts mit der neutralen Fläche. Das Moment M wird vom Moment Px der die Biegung hervorrufenden Kraft im Gleichgewicht erhalten, folglich geben (76) und (77)

$$E \frac{d\Theta}{dx} q = Px$$

oder

$$Eq\,d\Theta = Px\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Der Winkel zwischen den Tangenten rt und pv ist gleich $d\Theta$, ihre Länge beträgt x; da $tv = d\lambda$ ist, so ist $d\lambda = x\,d\Theta$. Ferner erhält man aus Formel (78)

$$Eq\,d\lambda = Px^2 dx.$$

Bildet man die Summe dieser Gleichungen für dx von $x = 0$ bis $x = l$, so ist $Eq\lambda = \frac{Pl^3}{3}$ oder

$$\lambda = \frac{Pl^3}{3\,Eq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

dies aber ist die erste der Formeln (75). Für einen rechtwinkligen Querschnitt ist $y = a$, $z_1 = z_2 = \frac{b}{2}$ und

$$q = a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} z^2 dz = \frac{ab^3}{12}$$

entsprechend dem auf Seite 738 angegebenen Werte von q.

Integriert man Formel (78), so erhält man $Eq\Theta = \frac{1}{2} Pl^2$, woraus sich für Θ oder bei geringen Deformationen für $tg\,\Theta$ folgender Wert ergiebt

$$tg\,\Theta = \frac{Pl^2}{2\,Eq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79, a)$$

Vergleicht man dies mit (79), so erhält man

$$\lambda = \frac{2}{3}\, l\, tg\,\Theta$$

d. h. die zweite der Formeln (75).

Formel (79, a) giebt

$$E = \frac{Pl^2}{2\,q\,tg\,\Theta}$$

d. h. eine Verallgemeinerung von Formel (73, a).

Wir sahen, dafs auf einen Streifen vom Querschnitt $s = y\,dz$ eine Kraft $f = E \frac{yz\,dz\,d\Theta}{dx}$ einwirkt. Das Verhältnis $f : s = \varphi$ giebt ein Mafs für die **Spannung**, welche die Stabsubstanz an der gegebenen Stelle auszuhalten hat. Es ist $\varphi = Ez \frac{d\Theta}{dx}$; aus (76) und (77) aber

ist $M = E \frac{d\Theta}{dx} q$, woraus sich für die Spannung folgende Formel ergiebt

$$\varphi = \frac{Mz}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79, b)$$

Von dieser Formel macht man in der Praxis Gebrauch, wenn man die Festigkeit verschiedener Bauanlagen zu berechnen hat.

§ 18. Relativer Widerstand; Bruch und Zerreifsen infolge von Torsion. In § 6 und 7 hatten wir die Erscheinung betrachtet, dafs ein Körper durch einen auf ihn wirkenden Zug oder durch einseitige Kompression zerrissen resp. zerdrückt wird. Dieselbe Erscheinung kann auch bei Biegung oder Torsion eintreten. Im ersten Falle spricht man von einem Bruch; die Gröfse der deformierenden Kraft charakterisiert in diesem Falle den sogenannten relativen Widerstand der Substanz, aus welcher der gebogene Stab besteht. Nehmen wir an, der Stab sei in der Mitte unterstützt und an seine Enden greifen zwei Kräfte P an, welche ihn biegen; es möge L die Länge jeder Stabhälfte bedeuten, dann ist

$$P = q' \frac{p'}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

diejenige Kraft, welche den Bruch hervorruft. Hierbei unterscheidet sich p' nur wenig vom absoluten Widerstand p_2, von dem in § 6 die Rede war; q' hängt von der Gestalt und den Dimensionen des Querschnitts ab, und zwar ist:

für einen rechteckigen Querschnitt (a Breite, $b \parallel P$) . $q' = \frac{1}{6} ab^2$

für einen quadratischen Querschnitt . . . . $q' = \frac{1}{6} a^3$

für einen runden Querschnitt . . . . $q' = \frac{\pi}{4} r^3$.

Liegt der Stab frei auf beiden Enden (Fig. 400 b, S. 738) auf, so ist der Bruchwiderstand (falls P in der Mitte angreift) viermal gröfser. sind jedoch seine beiden Enden festgeklemmt (Fig. 400 c), so ist er achtmal gröfser.

Für einen rechtwinkligen Querschnitt ist

$$P = \frac{ab^2}{6L} p'.$$

Um aus einem runden Baumstamm vom gegebenen Durchmesser D einen rechtwinkligen Balken von gröfstmöglicher Bruchfestigkeit herauszuschneiden, hat man $a = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$ zu machen.

Bruch infolge von Torsion tritt ein, falls ein gewisses Kräftepaar wirkt, dessen Moment vom Stoff abhängt und einer mit dem Querschnitt zusammenhängenden Gröfse q'' proportional ist; hierbei ist

für einen runden Querschnitt . . . . . . $q'' = \frac{\pi}{2} r^3$

für einen rechtwinkligen Querschnitt . . . . $q'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$

für einen quadratischen Querschnitt . . . . $q'' = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

Diese Formeln zeigen, in welchem Zusammenhang der Bruchwiderstand eines Stabes bei der Torsion mit der Form seines Querschnitts steht.

Deformationen können nicht blofs durch äufsere Kräfte hervorgerufen werden, sondern auch durch Wärmewirkungen, bei denen ungleichmäfsige Temperaturänderungen in verschiedenen Punkten des Körpers auftreten. Winkelmann und Schott haben den Begriff des thermischen Widerstandskoeffizienten eingeführt; derselbe kennzeichnet diejenige plötzliche Temperaturänderung in einem Teile eines Körpers, bei der Bruch eintritt. Es hängt diese Gröfse ab vom Youngschen Modul E, dem absoluten Widerstande, dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten, der Wärmeleitungsfähigkeit, der Wärmekapazität und der Dichte der Substanz. Interessant ist die Thatsache, dafs Glas leichter eine plötzliche Steigerung der Temperatur überdauert, als eine plötzliche Abkühlung.

§ 19. Zähigkeit und Fluidität. Auf Seite 695 bezeichneten wir als zähe solche Körper, welche die Fähigkeit besitzen, durch Einwirkung hinreichend starker äufserer Kräfte schnell sehr bedeutende restierende Deformationen zu erfahren, ohne dabei ihren Zusammenhang zu verlieren, d. h. zu zerreifsen, zu zerbrechen u. s. w. Damit ein Körper als zähe gelten kann, ist es erforderlich, dafs er seine Elastizitätsgrenze erreicht lange bevor er zerreifst, dafs also p_1 sehr viel kleiner sei als p_2 (S. 705). Spröde Körper können keine Zähigkeit in diesem Sinne besitzen; restierende Deformationen werden in ihnen nicht durch Kräfte von kurzer Wirkungsdauer hervorgerufen, vielmehr rufen letztere in ihnen entweder eine zeitweilige Deformation hervor oder aber sie bewirken Bruch, Zerreifsen u. s. w.

Von der Zähigkeit zu unterscheiden ist die Fluidität oder Plastizität; es ist dies die Fähigkeit von Körpern, unter gewissen Umständen ihre Form angenähert in der Weise zu ändern, wie man es an Flüssigkeiten von sehr beträchtlicher Viskosität beobachtet (S. 641). Fluidität tritt in zwei Fällen auf: erstens bei Wirkung schwacher, aber sehr lange

andauernder Kräfte, zweitens, wenn fast auf die ganze Oberfläche des Körpers ungeheuere Druckkräfte wirken.

Die Zähigkeit kann sich darin äufsern, dafs die Substanz ohne zu zerreifsen in sehr dünne Fäden ausgezogen werden kann, während auf sie ein einseitig wirkender Zug ausgeübt wird oder dafs sie ohne zu zerreifsen die Gestalt dünner Platten annehmen kann, falls sie gehämmert, plattiert oder gewalzt wird. Die Reihenfolge, in welcher sich die Metalle nach ihrer Fähigkeit zu Fäden ausgezogen oder zu dünnen Platten gewalzt zu werden aneinanderordnen, ist nicht die gleiche. Dies läfst sich leicht einsehen, da die Drähte beim Ausziehen eine starke Spannung erfahren und daher aufser der Dehnbarkeit noch einen genügend grofsen Widerstand gegen das Zerreifsen aufweisen müssen. In Bezug auf ihre Fähigkeit, zu dünnen Drähten ausgezogen zu werden, ordnen sich die Metalle in folgender Weise: Pt, Ag, Fe, Cu, Au, Zn, Sn, Pb. Auf indirektem Wege ist es gelungen, aus Pt einen Draht herzustellen, dessen Dicke nur 0,000 05 mm = 0,05 μ betrug. Die von Boys hergestellten Quarzfäden haben einen Durchmesser von 0,3 μ. Hinsichtlich ihrer Fähigkeit, zu dünnsten Blättchen gewalzt zu werden, ordnen sich die Metalle folgendermafsen: Au, Ag, Cu, Pt, Sn, Zn, Fe. Gewöhnliches Blattgold hat eine Dicke von ungefähr 0,1 μ; Faraday ist es gelungen, auf indirektem Wege Goldblättchen herzustellen, deren Dicke gegen 1 $\mu\mu = 10^{-6}$ mm betrug.

Mit Zunahme der Temperatur nimmt die Zähigkeit zu; besonders gilt dies für einige Körper, welche bei gewöhnlicher Temperatur spröde sind, wie z. B. Glas. Schellack (Siegellack).

Betrachten wir nunmehr die Fluidität (das Fliefsen), welche unter Einwirkung geringer, aber sehr andauernd in einer Richtung wirkender Kräfte auftritt. Solche Kräfte können sogar an spröden Körpern kontinuierliche Formenänderungen hervorrufen. So biegt sich z. B. eine an beiden Enden unterstützte Siegellackstange allmählich durch ihr eigenes Gewicht und ebendasselbe beobachtet man, wenn auch in sehr viel geringerem Grade, an Glasstäbchen. Bottomley in Glasgow hat es (1881) unternommen, „säkulare" Beobachtungen an Drähten aus Au, Pt, Ag und anderen Metallen anzustellen, deren allmähliche Änderungen im Verlaufe vieler Jahre beobachtet werden sollten. Eine bemerkenswerte Fluidität besitzt Eis, dessen vollkommen spröde Masse unter fortdauerndem Drucke in einer Weise fliefst, die in hohem Grade an die Gesetze des Strömens von Flüssigkeiten erinnert. Man kann dies am besten an Gletschern beobachten, die allmählich in die Thäler hinabgelangen. Die Massen des festen Eises schmiegen sich der wechselnden Breite des Bettes, in dem sie sich befinden, an, indem sie sich zusammendrängen und auseinanderrücken wie eine zähe Flüssigkeit. Hierbei strömt die Mitte des Eisstroms schneller als seine

Ränder, was man leicht an der Verschiebung von quer über den Gletscher aufgestellten Meſspfählen erkennen kann.

Eine bemerkenswerte Fluidität besitzt das sogenannte Schusterpech, ein schwarzer, harzartiger und überaus spröder Körper. Ein dünner Stab aus Pech kann leicht gebogen werden, wenn man ganz allmählich einen nicht zu starken Druck darauf ausübt; sobald man es aber schnell biegen will, zerbricht es wie Glas, wobei auch die Bruchfläche glatt und glänzend ausfällt und einer Bruchfläche am Glase vollkommen ähnlich ist. Stücke Pech flieſsen langsam unter Wirkung ihres eigenen Gewichts. Bringt man Stücke von festem Pech in einen Trichter, so vereinigen sie sich allmählich, bilden eine zusammenhängende Masse mit horizontaler Oberfläche, die dann allmählich durch den Trichter hinabflieſst. Stellt man aus Holz das Modell eines Berges mit abfallendem Thale her, das sich verengt und erweitert und legt auf dem höchsten Punkte dieses Holzmodells Pechstückchen nieder, so kann man sämtliche Erscheinungen beobachten, welche bei der Gletscherbewegung auftreten.

Ein zweiter Fall von Fluidität tritt auf, wenn ein sehr starker Druck auf den gröſsten Teil der Oberfläche von Körpern, z. B. von Metallen ausgeübt wird. Hierhergehörige Versuche sind insbesondere von Tresca angestellt worden. Auf eine starke, in der Mitte mit einer runden Öffnung versehene Platte wurde eine Reihe von kleinen Platten aus dem zu untersuchenden Metall übereinandergestapelt und starkem Drucke ausgesetzt. In diesen Fällen lagen die Platten frei übereinander, so daſs sie sich seitlich ausdehnen konnten; bei einer anderen Versuchsreihe wurden die Platten in einem dickwandigen Cylinder, dessen Boden mit einer Öffnung versehen war, auf einander gepreſst. In beiden Fällen floſs das Metall gewissermaſsen aus der Öffnung heraus, wobei es in Form eines Stäbchens heraustrat.

Den nach erfolgter Kompression entstandenen Körper durchsägte Tresca sodann der Länge nach und schliff die erhaltene Schnittfläche. Hierbei lieſsen sich die Berührungsflächen der ursprünglich übereinander gelegten Metallplatten an deutlich auftretenden Linien erkennen, so daſs man die Formveränderungen erkennen konnte, welche jede der Platten erfahren hatte. In Fig. 404 (a. f. S.) ist ein Querschnitt durch einen Körper dargestellt, der durch Kompression erhitzter Eisenplatten erhalten wurde, in Fig. 405 (a. f. S.) dasselbe für Bleiplatten. Die Form der Schichten erinnert lebhaft an die Konturen einer aus einer Öffnung heraustretenden zähen Flüssigkeit.

Auf der Fluidität der Metalle beruhen viele Bearbeitungsmethoden derselben, die in der Technik Verwendung finden, wie z. B. die Herstellung von Gefäſsen für Ölfarben. Auf den Boden eines Cylinders wird ein Stück Zinn gebracht und durch einen langen Kolben, dessen Durchmesser etwas kleiner als derjenige des Cylinders ist, komprimiert

Unter der Einwirkung des auf ihm lastenden Drucks fliefst das Zinn in den freien Raum zwischen Cylinder und Kolben hinein und nimmt

Fig. 404.

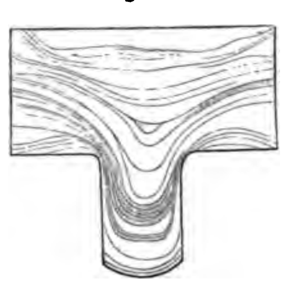
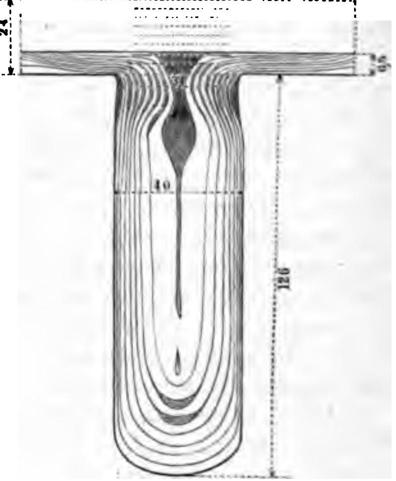


Fig. 405.



dabei die gewünschte Gefäfsform an. Auch das Prägen von Münzen und Medaillen beruht auf der Fluidität der Metalle.

Die Fluidität tritt auch in nicht metallischen Körpern auf, wie aus den Versuchen von Spring hervorgeht, welche zugleich mit anderen Versuchen desselben Forschers im folgenden Paragraphen betrachtet werden sollen.

§ 20. Wirkung des Drucks auf sich berührende Körper; Versuche von Spring und Roberts-Austen. Diffusion bei festen Körpern. Die Molekularkräfte wirken zwischen den Teilchen eines festen Körpers nur auf sehr kleine Entfernungen hin, woraus es sich auch erklärt, dafs sich die Teile eines zerbrochenen Körpers beim Aneinanderlegen nicht wieder vereinigen; die Unebenheiten an der Oberfläche verhindern eben eine hinreichende Annäherung der Teilchen. In den Fällen jedoch, wo eine hinreichende Annäherung der Oberflächen zweier Körper erreicht wird, ist auch ein Auftreten der Molekularkräfte möglich und können sodann auch die Körper sich gewissermafsen zu einem einzigen aneinanderschliefsen. Eine solche Annäherung ist möglich, erstens, wenn einer der Körper in den flüssigen Aggregatzustand übergeführt ist; hierauf beruht das Löten, Leimen u. s. w. Ferner wird eine Annäherung bis auf den Radius der molekularen Wirkungssphäre für weiche Körper leicht erreicht; Stücke von geschnittenem Wachs, Kautschuk und sogar Blei vereinigen sich beim Aneinanderdrücken leicht, falls die Schnittfläche noch frisch ist (Schweifsen von glühendem Eisen); Staub, Oxydschichten u. s. w. verhindern die Wiedervereinigung.

Die Molekularkräfte treten auch beim Zusammendrücken von

Stücken anderer Körper in Wirksamkeit, falls deren Oberflächen zuvor sorgfältig poliert worden sind. Es mufs übrigens an dieser Stelle bemerkt werden, dafs die scheinbare Kohäsion zweier aneinandergedrückter Glasplatten (sogenannte Kohäsionsplatten), die gewöhnlich in elementaren Physikbüchern beschrieben wird, sich, wie Stefan gezeigt hat, nicht durch das Auftreten von Molekularwirkungen beider Glasplatten erklärt. Beim Aneinanderdrücken der Platten wird vielmehr die zwischen ihnen eingeschlossene Luft verdünnt, so dafs die Platten durch den äufseren Luftdruck aneinander gehalten werden. Nichtsdestoweniger aber unterliegt es keinem Zweifel, dafs, falls die ebenen Oberflächen zweier Körper sehr sorgfältig poliert worden sind, in der That auch wirkliche Kohäsion der Platten auftreten kann, und zwar ohne dafs dieselben sehr stark aneinander gedrückt werden.

Die Annäherung der Oberflächen und somit die Vereinigung der Körper wird natürlich durch Zusammenpressen begünstigt und in dieser Richtung sind seit 1878 viele sehr interessante Versuche von dem belgischen Physiker M. Spring angestellt worden. Derselbe hat auch unter anderem überhaupt den Einflufs des Drucks auf verschiedene Körper untersucht, wobei er auch die oben beschriebenen Versuche von Tresca wiederholt hat.

Spring zeigte, dafs wirklich feste Körper, die keine Hohlräume enthalten, also z. B. klarkrystallisierte Substanzen oder Metalle, die bereits einmal einem starken Druck ausgesetzt wurden, eine vollkommene Volumenelastizität besitzen, d. h. genau wie die Gase und die Flüssigkeiten, bei der Einwirkung eines beliebig starken allseitigen Druckes zwar eine Verminderung des Volumens erleiden, aber nach Aufhören dieses Druckes ihr früheres Volumen vollständig wieder herstellen. Wirklich feste Körper erleiden also selbst bei dem gröfsten allseitigen Druck keine permanente Verminderung des Volumens.

Fernere Versuche von Spring bezogen sich auf die Kompression von Pulvern und Feilicht, welche in einem Parallelepipedon aus Stah Drucken bis zu 20000 Atmosphären ausgesetzt wurden. Hierbei verwandelte sich das Feilicht vieler Metalle unter der Wirkung des gewaltigen Drucks in eine vollkommen homogene Masse, die in vielen Fällen ein krystallinisches Gefüge hatte; offenbar übte der Druck die gleiche Wirkung aus wie das Schmelzen. Spring untersuchte im ganzen 83 Körper, wobei sich ergab, dafs der Druck nicht nur ein Aneinanderschweifsen der getrennten Teile, sondern auch Strukturänderungen bewirkt, welche mit einer Dichtezunahme der betreffenden Substanz verbunden sind und schliefslich sogar chemische Reaktionen und die Bildung von Legierungen hervorruft, die doch gewöhnlich nur beim Schmelzen der Körper auftreten. So verwandeln sich z. B. Bleifeilspäne in eine homogene, kompakte Masse unter einem Druck von 2000 Atm., Zinkspäne bei 5000 Atm.; Graphitpulver giebt bei 5000 Atm.

eine harte Masse und übermangansaures Kali einen Körper, welcher mit dem in der Natur vorkommenden Pyrolusit identisch ist. Gepulverter Salpeter verwandelte sich in eine homogene, halbdurchsichtige Masse. Holzfeilicht gab eine harte Masse (von der Dichte 1,328) mit muscheligem Bruch. Stücke prismatischen, sowie plastischen Schwefels verwandelten sich in eine kompakte Masse von oktaedrischem Schwefel mit gröfserer Dichte. Roter amorpher Phosphor verwandelte sich in metallischen Phosphor. Ein fast weifsgefärbtes Pulver von $CuSO_4 + 5 H_2O$ ging bei 6000 Atm. Druck in eine hellblaue durchsichtige Masse über; Kampfer gab einen bemerkenswert durchsichtigen Körper. Torf verwandelte sich bei 6000 Atm. Druck in eine glänzende schwarze Masse, welche vollkommen an Steinkohle erinnerte und aufserdem vollständig fliefsend wurde. Wachs bei 700 Atm. und Paraffin bei 2000 Atm. Druck fliefsen wie Wasser. Stärke giebt bei 6000 Atm. eine kompakte, an den Rändern durchscheinende Masse. Zusatz von einigen Tropfen Wasser verhindern das Zusammenschweifsen von Metallen, begünstigen es hingegen bei Marmor, Quecksilberoxyd u. s. w.

Aus seinen an 83 Substanzen vorgenommenen Versuchen zog Spring den Schlufs, dafs alle krystallinischen Substanzen bei starkem Druck zusammenschweifsen; waren sie in amorphem Zustande, so nehmen sie durch den Druck krystallinische Struktur an. Viele amorphe Substanzen schweifsen nicht zusammen. Spring komprimierte auch Feilichtgemenge von verschiedenen Metallen und erhielt dabei vollkommen homogene Legierungen, z. B. Woodsches Metall (aus Bi, Pb, Sn, Cd) mit dem Schmelzpunkt 70° und sogar Messing (aus Cu und Zn-feilicht). Von besonderem Interesse ist das Auftreten chemischer Reaktionen beim Komprimieren von Gemischen aus verschiedenen Körpern. So erhielt Spring Verbindungen von Metallen mit Arsen und Schwefel, indem er Feilichtgemenge mit gepulvertem As oder S vermischte und komprimierte. Ein Gemenge von Quecksilberchlorid und Kupferfeilicht lieferte Cu_2Cl_2 und Hg, ein Gemenge von Jodkalium und Quecksilberchlorid gab Quecksilberjodid und Chlorkalium. Ein Gemenge aus Na_2CO_3 und $BaSO_4$ verwandelte sich in $BaCO_3$ und Na_2SO_4.

In allen betrachteten Fällen ersetzt der starke Druck gewissermafsen den Schmelzprozefs, indem er die Moleküle einander nähert, bringt er die Kohäsionskräfte zur Wirkung und veranlafst sogar das Auftreten chemischer Kräfte. Spring dehnte diese Erklärung auch auf das Zusammenbacken zweier Eisstücke aus, das auch bei geringem Drucke auftritt; er verwirft somit die Thomsonsche Erklärung, welche auf der Schmelzpunktserniedrigung des Eises beim Drucke beruht (vergl. den neunten Abschnitt, Wärmelehre). Im Jahre 1894 publizierte Spring neue sehr interessante Versuche über das Zusammenschweifsen von Metallen und die Bildung von Legierungen bei sehr

schwachem Druck und erhöhter Temperatur (zwischen 200 und 400°), welche jedoch andauernd einwirken.

Es sei zunächst die Erklärung erwähnt, welche Spring selbst für diese Erscheinungen giebt. Seiner Meinung nach besitzen die Moleküle der festen Körper, gleich denen der Gase (vergl. S. 490) verschiedene Geschwindigkeiten; es kommen, falls ein Körper nicht allzu strengflüssig ist, auch Geschwindigkeiten vor, die denjenigen der Moleküle bei der Schmelztemperatur gleich sind. Solche „flüssige“ Moleküle müssen in besonders grofser Zahl an der Oberfläche des Körpers, wo die Bewegung der Moleküle überhaupt eine freiere ist, vorkommen. Diese Moleküle nun sind es, welche das allmähliche Zusammenschweifsen der sich berührenden Körper bewirken. Spring stellte bei seinen ersten derartigen Versuchen zwei Cylinder aus demselben Metalle mit ihren sehr sorgfältig geschliffenen Grundflächen aufeinander, drückte sie schwach aneinander und erhielt sie so einige Zeit bei erhöhter Temperatur. Die Cylinder wurden hierbei aneinander geschweifst und bildeten schliefslich einen einzigen massiven Cylinder. Das Zusammenschweifsen erfolgte für Cylinder

aus	Sb	bei	395°	in	12	Stunden
„	Al	„	418	„	8	„
„	Bi	„	240	„	7	„
„	Cu	„	403	„	8	„
„	Sn	„	190	„	8	„
„	Au	„	400	„	4	„
„	Pt	„	400	„	4	„
„	Pb	„	300	„	6	„
„	Zn	„	385	„	3	„

Nur beim Antimon, einem sehr spröden Körper, waren die Cylinder nur schwach zusammengeschweifst. Eine zweite Versuchsreihe wurde mit Cylindern aus verschiedenen Metallen vorgenommen. Hierbei wurden die Metalle nicht nur vollständig zusammengeschweifst, sondern es bildete sich sogar eine dicke Schicht einer Legierung. So gaben Cu und Zn in sechs bis acht Stunden bei 400° eine Legierungsschicht von 18 mm Dicke, beide Metalle waren gewissermafsen ineinander hineindiffundiert.

Die Diffusion geschmolzener und auch fester Metalle ineinander hat Roberts-Austen untersucht. Er stellte einen Cylinder aus Pb auf eine Platte aus Au und erhielt dieselben im Verlaufe mehrerer Tage bei hoher, jedoch unter dem Schmelzpunkte derselben liegenden Temperatur, z. B. im Verlaufe eines Monats bei 250° (Pb schmilzt erst bei 325°). Durch Analyse der horizontalen Schichten des Cylinders konnte er sodann die Diffusion von Au ins Pb hinein untersuchen. Eine derartige Diffusion konnte er bei seinen ersten Versuchen schon

bei 40° nachweisen. Bei 800° diffundiert Au durch Ag und Cu ebenso schnell wie bei 100° durch Pb.

In späteren Versuchen (1900) fand Roberts-Austen, daſs eine gegenseitige Diffusion von Blei und Gold selbst bei gewöhnlicher Temperatur stattfindet. Eine Goldscheibe war mit einer Bleistange verbunden worden und vier Jahre lang sich selbst überlassen. Die hierauf ausgeführte Untersuchung zeigte, daſs das Gold in das Blei eingedrungen war.

§ 21. Elastische Nachwirkung und elastische Hysteresis. W. Weber beobachtete 1835 folgende Erscheinung: Wenn man einen Seidenfaden durch ein Gewicht spannt, so verlängert er sich augenblicklich um einen gewissen Betrag, welcher sodann im Verlaufe von 36 Stunden langsam zuzunehmen fortfährt. Entfernt man das Gewicht, so verkürzt sich der Faden augenblicklich, nimmt jedoch nicht seine ursprüngliche Länge an und fährt dann noch während der Dauer von 20 Tagen fort sich merklich zu verkürzen. Weber nannte diese Erscheinung elastische Nachwirkung. Eine Untersuchung dieser wichtigen Erscheinung, welche, vollständig aufgeklärt, ein helles Licht auf die Gesetze, nach denen die Molekularkräfte wirken, werfen und den Bau der festen Körper zu erklären helfen könnte, begann 1863 F. Kohlrausch. Er untersuchte die elastische Nachwirkung bei Torsion von Glasfäden, Metalldrähten und Kautschuk. Er fand, daſs die Nachwirkung der Gröſse der Deformation nahezu proportional ist und bei Erhöhung der Temperatur schnell zunimmt. Bezeichnet man die elastische Nachwirkung, d. h. diejenige Deformation, welche, nachdem das tordierende Kräftepaar zu wirken nachgelassen hat, übrig bleibt, mit x, so ist diese Gröſse eine Funktion der Zeit t, welche bei Zunahme von t unendlich abnimmt. Für alle untersuchten Körper kann x in folgender Form dargestellt werden

$$x = Ce^{-at^m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

In vielen Fällen genügt sogar die einfachere Formel

$$x = \frac{C}{t^a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

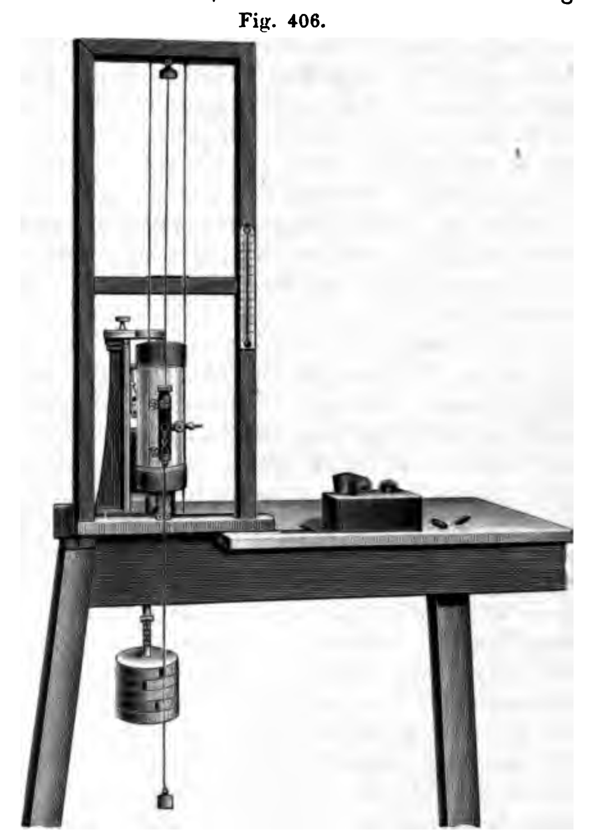
wo C, a und m Konstanten sind.

Sehr bemerkenswert ist die folgende, von Kohlrausch gemachte Beobachtung: Er tordierte zunächst einen Draht kräftig in einer Richtung, überlieſs ihn darauf sich selbst und beobachtete, wie sich der Torsionswinkel, infolge der elastischen Nachwirkung, allmählich verminderte. Während dieser Winkel noch einen recht groſsen Wert hatte, tordierte er dann den Draht auf einen Moment um einen kleinen Winkel in entgegengesetzter Richtung und überlieſs ihn darauf

wieder sich selbst. Der Draht drehte sich nun in der Richtung der ursprünglichen Deformation um einen gewissen Winkel und begann sich darauf wieder ganz allmählich loszudrehen. Somit trat die erste elastische Nachwirkung, bevor sie zu wirken aufgehört hatte, gewissermafsen von neuem auf, obgleich dazwischen eine Deformation in entgegengesetzter Richtung erfolgt war.

Auch Streintz, O. E. Meyer, Boltzmann, Maxwell, Neesen, G. Wiedemann, Braun, Nissen, Austen, Cantone, L. Weinhold (1899) und insbesondere N. A. Hesehus haben sich mit experimentellen und theoretischen Untersuchungen der elastischen Nachwirkung beschäftigt. Besonders auffallend tritt diese Erscheinung beim Kautschuk, Guttapercha, Glas und Blei auf; bei anderen Metallen ist sie kaum merklich, obgleich sie Austen für Silber, Kupfer und Messing gemessen hat. Austen fand, dafs die elastische Nachwirkung in den drei genannten Metallen bei einer Temperaturerhöhung um 1⁰ sich um 3 Proz. vermehrt.

Fig. 406.



N. A. Hesehus hat insbesondere die elastische Nachwirkung bei Kautschuk untersucht. Um die allmählichen Längenänderungen einer Kautschukschnur verfolgen zu können, bediente er sich des in Fig. 406 abgebildeten Apparates, dessen Hauptbestandteile die folgenden waren. Ein vertikaler Metallcylinder, vor jedem Versuche mit einem Papierstreifen überspannt, wurde durch ein Uhrwerk in gleichförmige Rotation versetzt. Am unteren Ende der zu untersuchenden Kautschuk-

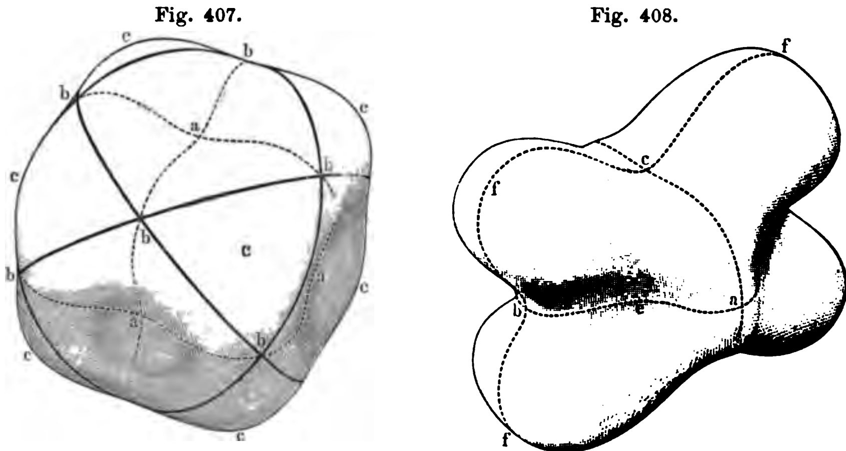
schnur hing eine Schreibvorrichtung, die bei jeder Längenänderung der Schnur mittels dreier Röllchen an zwei in einem grofsen Holzrahmen straff eingespannten Drähten sich hin und her bewegte. Ein an dieser Vorrichtung angebrachter Schreibstift verzeichnete auf der Cylinderfläche eine Linie, und war es mit Hülfe der letzteren möglich, die Gesetze zu ermitteln, nach denen sich die Längenänderungen der Schnur in den verschiedenen Fällen vollzogen. Die hauptsächlichsten Resultate, zu denen N. A. Hesehus geführt wurde, sind folgende. Dauert die Deformation nur sehr kurze Zeit an, so ist die elastische Nachwirkung unmerklich. Ist der Kautschuk noch nicht ausgereckt, so kehrt er nach erfolgter Deformation schneller in seinen Gleichgewichtszustand zurück, als wenn er schon zuvor ausgereckt war. Je gröfser bei gegebener Masse die Oberfläche ist, um so geringer ist die elastische Nachwirkung. Mit Zunahme der Temperatur nimmt die Nachwirkung beim Kautschuk ab. Ferner sprach Hesehus den Gedanken aus, dafs das umgebende Medium von Einflufs auf die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung sein mufs. Die von N. Bachmetjew und P. Baskow an Kupfer und Nickeldrähten in Luft, Petroleum und $CuSO_4$ oder $NiSO_4$ ausgeführten Beobachtungen weisen, wie es scheint, darauf hin, dafs ein solcher Einflufs in der That existiert. Erklärungen für die elastische Nachwirkung sind von verschiedenen Gelehrten in grofser Zahl gegeben worden. Wir wollen dieselben indes nicht aufführen, da keine von ihnen als vollkommen befriedigend und zur völligen Aufklärung dieser interessanten Erscheinung hinreichend gelten kann.

Eine Erscheinung von besonderer Art ist die von M. Cantone (1893 bis 1898) und L. Weinhold (1899) untersuchte elastische Hysteresis. Läfst man zunächst die deformierende Kraft f bis zu einem gewissen Maximalwert F allmählich zunehmen und vermindert sie hierauf ebenso allmählich, so kann man bei gleichen Werten von f eine stärkere Deformation beobachten, wenn der betreffende Wert von f bei Abnahme, als wenn er bei Steigerung der Kraftwirkung erreicht wird. Läfst man f zwischen den Grenzwerten $+F$ und $-F$ sich ändern, so sieht man, dafs die Kurve, welche die Deformation als Funktion der Kraft f darstellt, aus zwei Ästen besteht, die sich in zwei Punkten mit den Abscissen $+F$ und $-F$ schneiden; der eine von ihnen entspricht den zunehmenden, der andere den abnehmenden Werten von f. Die ganze Kurve schliefst einen gewissen Teil der Ebene ein, und man kann sich leicht davon überzeugen, dafs die Gröfse dieses Flächenraumes ein Mafs für diejenige innere Arbeit abgiebt, die bei der Deformation verbraucht und beim allmählichen Nachlassen der Deformation nicht vollständig zurückgewonnen wurde. M. Cantone hat die elastische Hysteresis bei Zug, Biegung und Torsion von Drähten und Streifen aus Fe, Ni, Pt, Cu,

Al und Messing, sowie die Wirkung der Temperatur auf diese Erscheinung untersucht. Übrigens waren bereits vorher von G. Wiedemann einige der von Cantone beschriebenen Erscheinungen entdeckt worden.

§ 22. Elastizität der Krystalle. Bevor wir das Kapitel über die Deformationen fester Körper beschließen, wollen wir noch Einiges über die elastischen Erscheinungen, welche in anisotropen Körpern auftreten, mitteilen. Dieselben zeichnen sich durch ihre Kompliziertheit aus, weswegen wir uns auf einige wenige Hinweise beschränken müssen. Besonders eingehend sind sie von Voigt untersucht worden. In anisotropen Körpern sind die elastischen Eigenschaften in den verschiedenen Richtungen verschiedene. Die isotropen Körper hatten, wie wir sahen, zwei Elastizitätsmoduln, durch welche alle übrigen ausgedrückt werden konnten, was auch z. B. durch den Kompressionsmodul K und den Scherungsmodul N geschah. Ein Krystall des regulären Systems hat bereits drei Moduln, einen für die Kompression und zwei für die Scherung. Ein Krystall des hexagonalen Systems hat vier Moduln, zwei verschiedene K und zwei N; ein

Fig. 407. Fig. 408.



zweiachsiges Krystall hat sechs Moduln, drei Kompressionsmoduln und drei Scherungsmoduln.

Der Youngsche Modul E und der Poissonsche Koeffizient σ hängen von der Richtung ab. Bei allseitigem Druck bleiben sich alle dem regulären Systeme nicht angehörigen Krystalle nicht ähnlich und erfahren außer einer Volumenverminderung auch eine Formveränderung. Die Biegung wird von Torsion begleitet und die Torsion von Biegung. Sämtliche Deformationen hängen nicht bloß von der Form des betreffenden Stäbchens, Blättchens u. s. w. und von den äußeren wirken-

den Ursachen ab, sondern auch von der Richtung, in welcher diese Körper aus dem Krystall herausgeschnitten worden sind.

Zieht man von einem beliebigen Punkte aus Gerade nach allen möglichen Richtungen, so dafs ihre Länge proportional dem Youngschen Modul E in der entsprechenden Richtung wird, so bildet der geometrische Ort der Endpunkte aller dieser Geraden die sogenannte Modulfläche der Dilatation. Nach der Gestalt der Fläche zerfallen die Krystalle in neun Klassen. Zwei Figuren mögen zur Illustrierung genügen. Fig. 407 (a. v. S.) stellt die Modulfläche der Dilatation für den Flufsspat dar, dessen Krystalle dem regulären Systeme angehören. In Fig. 408 (a. v. S.) ist dieselbe Fläche für den Baryt (schwefelsaures Baryum, rhombisches System) dargestellt.

Litteratur.

Lehrbücher über die Theorie der Elastizität.

A. Clebsch: Theorie der Elastizität. Leipzig 1862.
F. Grashof: Theorie der Elastizität und Festigkeit. Berlin 1878.
D. Bobylew: Hydrostatik und Theorie der Elastizität (russ.). St. Petersburg 1886.
A. Beer: Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität und Kapillarität. Leipzig 1869.
G. Lamé: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité. Paris 1866.
F. Neumann: Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Leipzig 1883.
Weyrauch: Theorie elastischer Körper. Leipzig 1884.
Mathieu: Théorie de l'élasticité. Paris 1890.

Zu § 1.

Hooke: A description of helioscopes, London 1675; Lectures de potentia restitutiva, London 1678; Philosophical tracts and collections, London 1679.
Poisson: Mémoire sur le mouvement des corps élastiques. Mém. de l'Acad. des Sciences **8**, 1829; Journ. de l'école polytechn. 20 cahier, 1831.
Kirchhoff: Crelles Journ. **40** und **56**.

Zu § 3.

H. Hertz: Crelles Journ. **92**, 156, 1882; Gesammelte Werke **1**, 155.
F. Auerbach: Wied. Ann. **43**, 61, 1891; **45**, 262, 1892; **53**, 1000, 1894; **58**, 357, 1896; Instr. **12**, 430, 1892.
Rydberg: Zeitschr. f. phys. Chemie **33**, 353, 1900.
Benedicks: Zeitschr. f. phys. Chem. **36**, 529, 1901.
Bottone: Chem. News **27**, 215, 1873.
Brillouin: Ann. chim. et phys. (7) **13**, 231, 1898.
Föppl: Wied. Ann. **63**, 103, 1897; Instr. **18**, 88, 1898.

Zu § 5 und § 6.

Th. Young: Course of lectures on natural Philosophy. London 1807.
S'Gravesande: Physicae Elementa mathematica. **1**, 375. Leyden 1721.

Wertheim: Ann. chim. et phys. (3) **12**, 385, 1844; Pogg. Ann., Ergb. **2**, 1, 73, 1848.
Kupffer: Mém. de l'Acad. des Scienc. de St. Pétersb. (6), Scienc. mathém. (8) **6**, 1856.
Kohlrausch und Loomis: Pogg. Ann. **141**, 481, 1870.
Tomlinson: Phil. Mag. **23**, 1887.
P. A. Thomas: Drud. Ann. **1**, 232, 1900; Diss. Jena 1899.
Noyes: Physical Review **2**, 277, 1895; **3**, 432, 1896.
A. M. Mayer: Phil. Mag. (5) **41**, 168, 1896.
Cl. Schäfer: Verh. d. phys. Ges. **2**, 122, 1900; Drud. Ann. **5**, 220, 1901.
Pisati: Gaz. chim. ital. **6**, 1876; **7**, 1877.
Auerbach: Wied. Ann. **58**, 381, 1896.
Stefan: Wien. Ber. **77**, II, 1868.
Smoluchowski: Wien. Ber. **103**, 1894.
Warburg: Wied. Ann. **136**, 89, 1869.
Mallock: Proc. Roy. Soc. 1879, p. 157.
M. Segel: Versuch einer Anwendung der Interferenzstreifen zur Untersuchung der Elastizität von weichen Körpern (russ.). Kasan 1899.
N. Hesehus: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **11**, 98, 1879.
Georg S. Meyer: Wied. Ann. **59**, 668, 1896.
Villari: Pogg. Ann. **143**, 88, 1871.
Winkelmann und Schott: Wied. Ann. **51**, 698, 1894.
Winkelmann: Wied. Ann. **61**, 104, 1897; **63**, 117, 1897 (für Pt); siehe auch Hovestadt, Jenaer Glas, Jena 1900, S. 149—202.
J. O. Thompson: Wied. Ann. **44**, 555, 1891.
Dewar: Chemical News **71**, 192, 199, 1895; Instr. **15**, 375, 1895.

Zu § 8.

Okatow: Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung eines elastischen Drahtes (russ.), St. Petersburg 1867, Pogg. Ann. **119**, 11, 1863.
Schneebeli: Pogg. Ann. **140**, 589, 1870.
Kirchhoff: Pogg. Ann. **108**, 369, 1859.
Voigt: Berl. Ber. 1883, S. 961; 1884, S. 1004.
Röntgen: Pogg. Ann. **159**, 601, 1876.
Katzenelsohn: Diss. Berlin 1887.
Bock: Wied. Ann. **52**, 609, 1894.
Everett: Proc. Roy. Soc. **15**, 356, 1867; **16**, 248, 1868; Phil. Trans. **157**, 139, 1867.
Cornu: Compt. rend. **69**, 333, 1869.
Voigt: Wied. Ann. **15**, 497, 1882.
Cantone: Rend. Ac. dei Lincei **4**, 220, 292, 1888.
Kowalski: Wied. Ann. **36**, 307, 1889; **39**, 155, 1890.
Amagat: Ann. chim. et phys. (6) **22**, 95, 1891; Compt. rend. **107**, 618, 1888.
Straubel: Wied. Ann. **68**, 369, 1899.
Smoluchowski: Wien. Ber. **103**, 739, 1894.
Cagniard Latour: Ann. chim. et phys. **36**, 384, 1827; Pogg. Ann. **12**, 516, 1828.

Zu § 10.

Sacerdote: Journ. de phys. (3) **7**, 516, 1898; **8**, 209, 1899.
Regnault: Mém. de l'Acad. des Scienc. **21**, 1847.
Amagat: Compt. rend. **99**, 130, 1884; **106**, 479, 1888; Ann. chim. et phys. (6) **22**, 95, 1891.

Voigt: Wied. Ann. **31**, 479, 1887; **34**, 981, 1888; **35**, 642, 1888; **41**, 712, 1890.

Zu § 13.

Coulomb: Mém. de l'Acad. des Sc. Paris 1784.
Savart: Ann. chim. et phys. (2) **41**, 373, 1829; Pogg. Ann. **16**, 206, 1829.
Bouasse: Ann. chim. et phys. (7) **14**, 106, 1898.
Wertheim: Ann. chim. et phys. (3) **12**, 385, 1844; **23**, 52, 1849; **50**, 202, 1857; Pogg. Ann. **78**, 381, 1829.
Saint-Venant: Torsion des prismes. Paris 1855.

Zu §. 16.

Baumeister: Wied. Ann. **18**, 578, 1882.
Pisati: Nuovo Cimento (3) **4**, 152, 1878; **5**, 34, 135, 1878.

Zu § 17.

A. König: Wied. Ann. **28**, 108, 1886.

Zu §. 19.

Bottomley: Reports of the Brit. Assoc. 1881—1887.
Tresca: Compt. rend. **59**, 754, 1864; **60**, 398, 1865; **64**, 809, 1867; **66**, 263, 1868.
W. Spring: Ann. chim. et phys. (5) **22**, 170, 1881.

Zu § 20.

Spring: Bull. de l'Ac. R. de Belg. (2) **45**, 746, 1878; **49**, 323, 1880; (3) **5**, 55, 492, 1883; **6**, 507, 1883; **14**, 595, 1887; **28**, 238, 1894; **30**, 311, 1895; Chem. Ber. **15**, 595, 1881; **16**, 324, 999, 1883; Bull. Soc. Chim. (Paris) **40**, 520, 1883; **41**, 488, 1884; **44**, 166, 1885; **46**, 299, 1886; **50**, 218, 1888: Sill. Journ. (3) **35**, 78, 1888; **36**, 286, 1888; Ann. Soc. géol. Belg. **15**, 156, 1888; Zeitschr. f. phys. Chemie **2**, 536, 1888; Rapports au Congrès internat. de physique **1**, 402, 1900.
Roberts-Austen: Proc. Royal Soc. of London **49**, 281, 1896; **67**, 101, 1900; Phil. Trans. **187**, 383, 1896.

Zu § 21.

W. Weber: Pogg. Ann. **34**, 247, 1835; **54**, 1, 1841.
F. Kohlrausch: Pogg. Ann. **119**, 337, 1863; **128**, 1, 1866; **158**, 337, 1876; **160**, 225, 1877.
Streintz: Pogg. Ann. **153**, 387, 1874; Wien. Ber. **79**, 1874; **80**, 397; Carls Repert. **16**, 476, 1880.
Maxwell: Encyklop. Br., 9. Aufl., **6**, 313.
Neesen: Pogg. Ann. **157**, 579, 1876.
Braun: Pogg. Ann. **159**, 337, 1876; Carls Repert. **17**, 253, 1881.
G. Wiedemann: Pogg. Ann. **103**, 563, 1858; **106**, 161; **107**, 139, 1859; **117**, 183, 1862; Wied. Ann. **6**, 502, 1879.
Boltzmann: Crelles Journ. **81**, 96; Wied. Ann. **5**, 430, 1878.
O. E. Meyer: Crelles Journ. **78**, 130; Pogg. Ann. **151**, 108, 1874; **154**, 358, 1875; Wied. Ann. **4**, 249, 1878.
N. Hesehus: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **14**, 287, 1882; Beibl. **7**, 654, 1883.
N. Bachmetjew und P. Baskow: Journ. d. russ. phys. Ges. **28**, 217, 1896.

M. Cantone: Rendic. R. Acc. Lincei (5) **2**, II, 246, 295, 339, 385, 1893; **3**, I, 26, 1894; **3**, II, 122, 1894; **4**, I, 437, 488, 1895; **4**, II, 270, 354, 1896; **5**, II, 191, 1897; Nuovo Cimento (4) **2**, 180, 1895.
L. Weinhold: Zur Elastizität der Metalle. Diss. (Leipzig). Chemnitz 1899.
G. Wiedemann: Wied. Ann. **6**, 485, 1879; **27**, 402, 1886.

Zu § 22.

Voigt: Vergl. die Angabe der Litteratur zu § 10.

Viertes Kapitel.

Reibung und Stofs fester Körper.

§ 1. Innere Reibung in festen Körpern. Auf S. 497 und 641 hatten wir uns mit der Erscheinung der inneren Reibung in gasförmigen und flüssigen Körpern bekannt gemacht. Da feste Grenzen zwischen den drei Aggregatzuständen nicht existieren und Spuren derjenigen Eigenschaften, welche für die eine Aggregatform scharf ausgeprägt sind, fast immer auch in den anderen zu finden sind, so kann man erwarten, dafs Spuren einer inneren Reibung oder Viskosität sich auch bei den festen Körpern werden finden lassen; der Reibungskoeffizient (vergl. S. 497 und 641) mufs jedoch, wenn von einem solchen die Rede sein kann, aufserordentlich grofs sein. In der That weisen die Arbeiten vieler Gelehrten darauf hin, dafs man auch für die festen Körper den Begriff der inneren Reibung einführen kann. So erklären z. B. einige Autoren die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung durch innere Reibung im deformierten Körper. In besonders engem Zusammenhang mit der inneren Reibung steht indes die Erscheinung der Dämpfung (S. 156), welche man bei den Schwingungen elastischer Körper beobachtet. Befestigt man einen Körper am unteren Ende eines Drahtes, dreht ihn um einen gewissen Winkel und überläfst ihn darauf sich selbst, so fängt er an Drehungsschwingungen nach der einen und anderen Seite hin auszuführen. Indes nimmt seine Schwingungsamplitude ab, was sich nur zum Teil durch Reibung an der Luft und durch Abgabe der Bewegungsenergie an die umgebenden Körper durch den Aufhängepunkt des Drahtes erklären läfst. Es bleibt noch ein Teil der Dämpfung übrig, den man nur durch innere Reibung, welche die Scherung der Drahtschichten begleitet, erklären kann.

Die Versuche, welche man zur Messung der inneren Reibung fester Körper angestellt hat, haben seither noch zu keinen klaren und

bestimmten Resultaten geführt. Es gehören hierher die Untersuchungen von Barus (an Leim, Paraffin, Stahl), Voigt (Nickel, Kupfer), Heydweiller (Menthol) und Reiger (Kolophonium, 1901).

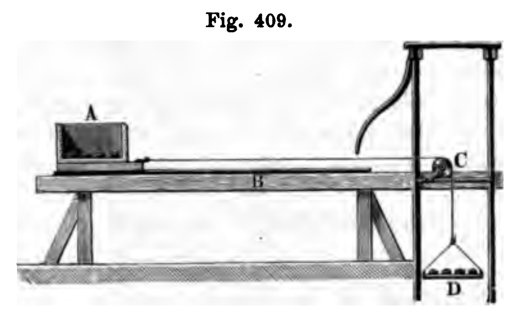
Barus findet für den Koeffizienten η der inneren Reibung in C. G. S.-Einheiten für harten Stahl den Wert $1 . 10^{17}$ bis $6 . 10^{17}$. Für Kupfer findet Voigt $\eta = 3{,}73 . 10^{6}$, für Nickel $\eta = 12{,}5 . 10^{6}$. Heydweiller giebt für Menthol bei 14,9° den Wert $\eta = 209 . 10^{10}$ an und Reiger für Kolophonium $\eta = 1 . 10^{17}$ bei 12° und $\eta = 5 . 10^{11}$ bei 46°.

§ 2. **Reibung fester Körper beim Gleiten.** Wenn die Oberfläche eines festen Körpers längs der Oberfläche eines anderen, den man sich als unbeweglich denken kann, dahin gleitet, während beide Körper durch eine gewisse Kraft P aneinander gedrückt werden, so tritt eine neue Kraft F tangential zur Berührungsfläche auf, welche auf den sich bewegenden Körper in einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung wirkt. Diese Kraft verzögert die relative Bewegung der sich berührenden Körper und wird als Kraft der Reibung bezeichnet. Die Ursachen der Reibung können verschiedene sein; zunächst sind es die Unebenheiten der Oberflächen, die gewissermaßen kleine Hervorragungen bilden und eine ununterbrochene Reihe von Hindernissen für das Dahingleiten darstellen. Gleichzeitig kann auch die unmittelbare Kohäsion zwischen den Teilchen der sich gegeneinander reibenden Körper eine gewisse Rolle spielen. Die Untersuchungen von Warburg und Babo (1877) haben zu dem Resultate geführt, daß die Reibung durch Verbiegung der kleinen Hervorragungen entsteht, welche auch an gut geschliffenen Oberflächen immer vorhanden sind; somit bilden elastische Kräfte, welche in den rauhen Oberflächenschichten auftreten, die ursprüngliche Ursache der Reibung. Die Reibung fester Körper ist von einem sich Loslösen kleinster Teilchen der sich aneinander reibenden Körper begleitet. Bisweilen haften die Teilchen des einen Körpers an der Oberfläche des anderen; hierauf beruht das Schreiben mit Bleifeder (Graphit) auf Papier, mit Kreide auf Holz u. s. w. Hierher gehört auch die seltsame Erscheinung, daß Teilchen von Aluminium am Glase haften, welche Erscheinung in geringerem Maße auch beim Magnesium, Zink und Kadmium auftritt und von Margot untersucht worden ist.

Die Gesetze der Reibung sind zuerst von Coulomb (1781) untersucht worden. Der von ihm benutzte, ohne weiteres verständliche Apparat ist in Fig. 409 dargestellt. Die auf dem Tische liegende Tafel B und der Boden des Kästchens A stellen die sich reibenden Oberflächen dar. Das Kästchen wird durch auf die Schale D gelegte Gewichtstücke in Bewegung versetzt und hierauf das Gesetz, nach dem es sich bewegt, zu ermitteln gesucht. Es zeigt sich hierbei, daß

diese Bewegung überhaupt eine gleichförmig veränderliche (S. 64) ist, woraus hervorgeht, dafs **während der Bewegung eine beständige Kraft wirkt.** Es sei P das Gewicht des Kästchens, somit also auch diejenige Kraft, mit welcher die sich aneinander reibenden Oberflächen gegeneinander gedrückt sind; p sei das Gewicht von D mit den daraufliegenden Gewichtstücken, d. h. also die am Kästchen angreifende Kraft. Subtrahiert man von p die Kraft der Reibung F, so erhält man die treibende Kraft $p - F$, welche gleich sein mufs dem Produkte der bewegten Masse $\frac{P + p}{g}$ und der Bewegungsbeschleunigung γ. Somit ist

Fig. 409.



$$p - F = \frac{P + p}{g} \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Beschleunigung γ kann durch Beobachtung der Zeit t gefunden werden, während welcher sich das Kästchen um die Strecke s verschiebt. Es ist dann $s = \gamma \frac{t^2}{2}$, also $\gamma = \frac{2s}{t^2}$ und schliefslich

$$F = p - \frac{(P + p) 2s}{gt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Gröfse der Reibung finden und hat Coulomb für dieselbe folgende Gesetze aufgestellt:

I. Die Reibung ist dem Druck, welcher zwischen den sich reibenden Oberflächen herrscht, proportional.

II. Die Reibung ist unabhängig von der Gröfse der sich reibenden Flächen.

III. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich die eine Fläche längs der anderen dahinbewegt.

Die von der Art der sich reibenden Oberflächen abhängige Konstante

$$f = \frac{F}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

heifst der Reibungskoeffizient. Morin hat (1833) die Coulombschen Versuche nach einer besonderen graphischen Methode wiederholt, welche es ermöglichte, das Gesetz, nach welchem die Bewegung des gleitenden Körpers erfolgt, sehr genau zu studieren. Er hat den

Reibungskoeffizienten f für verschieden beschaffene Oberflächen bestimmt und gefunden, dafs die Kraft F während der Bewegung kleiner ist als zu Anfang, wo der Körper noch in Ruhe war und erst in Bewegung versetzt werden mufste. Endlich fand er, was übrigens schon vorher bekannt war, dafs sich die Reibung merklich verringert, wenn man zwischen die aneinander gleitenden Flächen ein Schmiermittel, wie etwa Öl, Petroleum, trockene Seife u. s. w. bringt. Es mögen hier einige von den Morinschen Beobachtungen folgen:

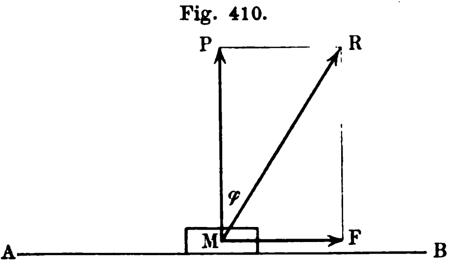
Aneinander gleitende Substanzen	f zu Beginn der Bewegung	f während der Bewegung
Gufseisen und Gufseisen, schwach gefettet . .	0,16	0,15
Gufseisen und Gufseisen, mit Wasser angefeuchtet	—	0,31
Eisen und Gufseisen, trocken	0,19	0,18
Bronze und Gufseisen, trocken	—	0,22
Bronze und Eisen, schwach gefettet	—	0,16
Bronze und Bronze	—	0,20
Gufseisen und Eichenholz, trocken	—	0,49
" " " mit Wasser	0,65	0,22
" " " mit trockener Seife	—	0,19
Messing und Eichenholz, trocken	0,62	—
Eichenholz und Eichenholz, Fasern ‖, trocken	0,62	0,48
Eichenholz und Eichenholz, Fasern ‖, mit trockener Seife	0,44	0,16
Eichenholz und Eichenholz, Fasern ⊥, trocken	0,54	0,34
Eichenholz und Eichenholz, mit Wasser angefeuchtet	0,71	0,25

Für die gleitende Reibung von Eisen am Eise (Schlittschuhe) fand Müller die Werte $f = 0,016$ bis $0,032$. Die von Coulomb gefundenen sogenannten Reibungsgesetze sind zweifellos nur angenähert richtig und stellen nicht die wirklichen Gesetze dar. So fand z. B. Rennie, dafs der Koeffizient f mit Zunahme des Drucks P, den die Körper aufeinander beim Gleiten ausüben, selbst zunimmt. Er fand unter anderem

$P \frac{kg}{qcm}$	Gufseisen auf Gufseisen	Eisen auf Gufseisen	Stahl auf Gufseisen	Messing auf Gufseisen
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
47,25	—	0,376	0,403	0,233
49,92	—	0,434	—	0,234
57,65	—	—	—	0,273

Wenn sich der Körper M (Fig. 410) längs der Oberfläche AB eines anderen Körpers hinbewegt, so wirken seitens dieses Körpers auf ihn zwei Kräfte ein: der Widerstand P in der Richtung der Senkrechten zur Oberfläche und die Kraft der Reibung F in tangentialer Richtung; die Resultante derselben R bildet mit der Senkrechten einen Winkel φ, dessen Tangente gleich $F:P$ ist,

Fig. 410.



$$tg\varphi = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Liegt der Körper auf einer schiefen Ebene, welche den Winkel α mit der Horizontalebene einschliefst, so beginnt das Gleiten für

$$\alpha > \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ist $\alpha < \varphi$, so bleibt der Körper in Ruhe. Um den Körper auf der schiefen Ebene am Herabgleiten zu verhindern, während $\alpha > \varphi$ ist, hat man an demselben eine Kraft Q angreifen zu lassen, welche parallel zur schiefen Ebene ist und, wie man sich leicht überzeugen kann, zwischen den Grenzen

$$P\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi} > Q > P\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

liegt.

Schon längst war es von Technikern bemerkt worden, dafs die zwischen gut gefetteten Maschinenteilen auftretende Reibung durchaus nicht die Coulombschen Gesetze befolgt. N. P. Petrow hat (1883) zuerst die Gesetze der Reibung für diesen Fall untersucht, wobei es sich herausstellte, dafs die innere Reibung in der aufgetragenen Schicht des Schmiermaterials die Hauptrolle spielt. Die wichtigsten Ergebnisse seiner Untersuchungen bestehen im Folgenden:

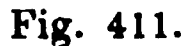
Die Gröfse der Reibung gefetteter Maschinenteile ist unter sonst gleichen Verhältnissen proportional der Oberfläche der sich reibenden Teile.

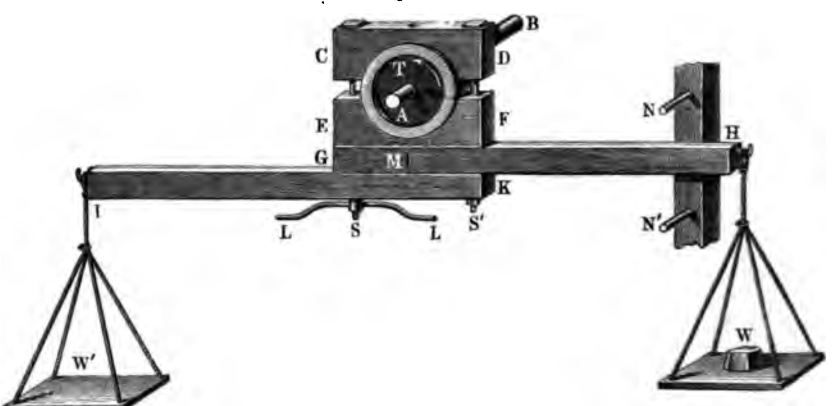
Die Gröfse der Reibung ist proportional der Geschwindigkeit, mit der die relative Bewegung der Maschinenteile erfolgt.

Die Gröfse der Reibung ist indirekt proportional der mittleren Dicke der Schmierschicht.

Die Gröfse der Reibung ist proportional der Quadratwurzel aus dem gesamten zwischen den sich aneinander reibenden Oberflächen vorhandenen Drucke.

§ 3. **Der Pronysche Zaum.** Dieser Apparat dient dazu, die Arbeitsfähigkeit T (S. 117) einer in Bewegung befindlichen Maschine zu bestimmen. Dieselbe wird hierbei durch diejenige Arbeit gemessen, welche eine rotierende Welle in je einer Sekunde zu liefern vermag. Der in Fig. 411 dargestellte Apparat besteht aus zwei Holzklötzen FE und CD, zwischen denen in entsprechenden Ausschnitten die auf die Achse AB befestigte eiserne Trommel T eingeklemmt ist. Unterhalb EF ist der Hebel GH angebracht, welcher die Wagschale W trägt. Der Hebel KJ und die Wagschale W' dienen dazu, GH und W zu äquilibrieren. Dreht sich die Achse AB und die Scheibe T in der Richtung des Pfeiles, so wird auf W ein Gewicht aufgelegt, welches wir mit P bezeichnen wollen. Die Gröfse dieses Gewichts und der Druck von EF und CD auf T werden (letzterer durch die Schrauben S' und S) so reguliert, dafs das Ende H zwischen den Anschlägen N


Fig. 411.



und N' in Ruhe bleibt. Ist F die Kraft der Reibung, r der Radius der Welle und ω ihre Winkelgeschwindigkeit, so ist die gesuchte Arbeitsfähigkeit T gleich $F\omega r$. Das Moment der Belastung P ist gleich Pl, wo l die Länge des Hebels L bedeutet. In diesem Falle ist die Gleichgewichtsbedingung des Hebels $Fr = Pl$ und unter Berücksichtigung des Ausdrucks $T = Fr\omega$

$$T = Pl\omega.$$

Ist n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute, so ist $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ und man findet die gesuchte Arbeitsfähigkeit in Pferdekräften (S. 117) nach der Formel

$$T = 2n\pi \frac{Pl}{60 \times 75} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wo P und p in Kilogrammen, l in Metern ausgedrückt sein mufs.

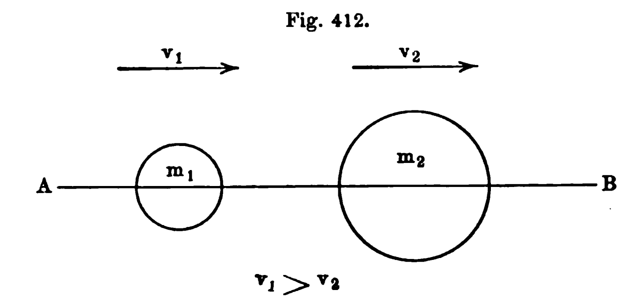
§ 4. Rollende Reibung. Wenn ein Körper über die Oberfläche eines anderen hinrollt, so tritt ebenfalls Reibung auf, deren Gröſse F_1 nach Coulomb durch die Formel

$$F_1 = \alpha \frac{P}{r} \quad \text{. . . . .} \quad (7)$$

bestimmt wird, wobei P das Gewicht, r der Radius des rollenden Körpers (Cylinders) ist, α aber der Koeffizient für die rollende Reibung. Die rollende Reibung ist beträchtlich geringer als die gleitende.

§ 5. Stoſs der Körper; allgemeine Bemerkungen. Wenn die Oberflächen zweier sich mit nach Gröſse oder Richtung verschiedenen Geschwindigkeiten bewegender Körper zur Berührung gelangen, so tritt die Erscheinung ein, die man Stoſs nennt. Die Richtung der im Berührungspunkte zu den Oberflächen errichteten Senkrechten wird die Stoſsrichtung genannt. Der Stoſs heiſst central, wenn diese Richtung durch die Schwerpunkte der Körper hindurchführt; der Stoſs ist bei Kugeln immer ein centraler; trifft obige Bedingung nicht zu, so heiſst der Stoſs excentrisch. Der Stoſs heiſst

Fig. 412.



gerade oder schief, je nachdem die Bewegungsrichtung der Körper vor dem Stoſse mit der Stoſsrichtung zusammenfällt oder nicht. Die auftretenden Erscheinungen werden komplizierter, wenn die zusammenstoſsenden Körper nicht frei sind, oder wenn sie auſser ihrer fortschreitenden Bewegung auch noch eine rotierende Bewegung besitzen. Wir wollen den einfachsten Fall, nämlich den geraden Zusammenstoſs von Kugeln betrachten. Wir nehmen zu dem Zwecke an, daſs sich zwei homogene Kugeln, deren Massen m_1 und m_2 sind (Fig. 412), längs der Geraden AB, welche durch ihre Mittelpunkte hindurchführt, bewegen. Sie mögen hierbei die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben, die wir in der Richtung von A nach B positiv rechnen. Offenbar ist für das Zustandekommen des Stoſses erforderlich, daſs $v_1 > v_2$ ist. Die Zeit t möge von dem Momente an gezählt werden,

wo die erste Berührung der Körperoberflächen stattfindet. Von diesem Augenblicke an beginnt die Deformation beider Oberflächen, welche eine Abplattung erfahren; hierbei üben die Körper in jedem gegebenen Augenblicke einen gewissen Druck f aufeinander aus. Dieser Druck wirkt auf die Masse m_1 in der Richtung von B nach A und verzögert deren Bewegung, auf die Masse m_2 dagegen in der Richtung von A nach B, vergröfsert also die Geschwindigkeit der letzteren. Es seien nun u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten beider Körper zur Zeit t nach dem ersten Kontakt. Da die Körper während der Zeit t unter Einwirkung zweier, wenn auch kontinuierlich sich ändernder, so doch in jedem Zeitelement untereinander gleicher Kräfte standen, so müssen offenbar die totalen Kraftimpulse (S. 84), denen die Körper während der Zeit t ausgesetzt waren, auch einander gleich sein. Hieraus folgt aber (S. 85), dafs die Änderungen, welche die Bewegungsmengen der Kugeln während der Zeit t erfahren haben, ebenfalls einander gleich sein müssen. Hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2$$

oder

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

d. h. die Summe der Bewegungsmengen beider Kugeln ändert sich nicht während des Stofses. Will man die Erscheinung des Stofses genauer verfolgen, so hat man auch die elastischen Eigenschaften der zusammenstofsenden Körper zu beachten. Wir wollen uns indes auf die Betrachtung der beiden idealen Grenzfälle beschränken, auf den Stofs vollkommen unelastischer und völlig elastischer Kugeln. Alle anderen hierher gehörigen Fragen, wie auch die interessante und noch umstrittene Frage nach dem Stofse absolut fester, d. h. gänzlich undeformierbarer Körper, werden wir dabei übergehen.

§ 6. **Stofs unelastischer Kugeln.** Es sind hier unter unelastischen Kugeln solche Körper gemeint, deren Elastizitätsgrenze bei der geringsten Deformation erreicht wird und bei denen die restierende Deformation vollkommen gleich der überhaupt hervorgerufenen ist, so dafs in ihnen ein Bestreben, die ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen, überhaupt nicht existiert. Beim Stofse derartiger Körper mufs die Deformation so lange zunehmen, bis ihre Geschwindigkeiten u_1 und u_2 einander gleich werden, was unbedingt eintreten mufs, da, wie wir sehen, v_1 während des Stofses zunimmt, v_2 dagegen abnimmt. Nehmen wir an, während der Zeitdauer t_1 seien die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln einander gleich geworden und es seien nun $u_1 = u_2 = u$. Sobald dies eingetreten ist, werden die Kugeln aufhören aufeinander zu drücken und werden sich mit ihrer gemeinsamen Geschwindigkeit u

weiterbewegen, für welche man nach (8) folgenden Ausdruck findet

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In dieser Formel ist die vollständige Lösung der Aufgabe vom Stofse **unelastischer** Kugeln enthalten.

Wir wollen nun die Bewegungsmenge K bestimmen, welche die Kugeln untereinander ausgetauscht haben. Es ist $K = m_1 v_1 - m_1 u = m_2 u - m_2 v_2$. Setzt man in einen dieser Ausdrücke den Wert u aus Formel (9) ein, so ergiebt sich

$$K = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

K ist gleich der Bewegungsmenge der Masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, welche sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die gleich der Differenz der Geschwindigkeiten beider Körper vor erfolgtem Stofse ist.

Wir wollen ferner den Verlust J an Wucht bestimmen, den die unelastischen Körper beim Stofse erlitten haben. Derselbe ist gleich

$$J = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2\right).$$

Setzt man hier für u seinen Wert ein, so ergiebt sich

$$J = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Der Verlust an Wucht ist gleich der Wucht einer Masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, welche sich mit einer Geschwindigkeit, gleich der Geschwindigkeitsdifferenz vor dem Stofse der Körper, bewegt. Obiger Verlust wird zur Deformationsarbeit verbraucht und geht gröfstenteils in Wärme über. In dem besonderen Falle, wo $m_1 = m_2$ und $v_2 = v_1$ ist, erhält man $u = 0$, $J = 2 . \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, d. h. die Körper bleiben stehen und ihre ganze Wucht geht verloren.

§ 7. Stofs elastischer Kugeln. Es wird hier vorausgesetzt, dafs während des Stofses die Elastizitätsgrenze nicht erreicht worden ist, und dafs eine vollständige Rückkehr der Körper zu ihrer früheren Gestalt eintritt. Man hat in diesem Falle den gesamten Stofsvorgang in zwei Perioden einzuteilen: die **erste Periode** beginnt mit dem Momente, wo sich die Oberflächen berühren und endet im Augenblicke der gröfsten Deformation, wo die Geschwindigkeiten der Kugeln einander gleich geworden sind, also den in (9) gegebenen Wert von u

angenommen haben. Hierauf folgt die zweite Periode, die Rückkehr zur ursprünglichen Form, wo also die abgeplatteten Teile wieder ihre ursprüngliche konvexe Form annehmen; diese Periode und zugleich der ganze Stofsvorgang erreicht sein Ende im Augenblicke des letzten Kontakts der Oberflächen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten der Körper für diesen Moment mit V_1 und V_2; es sind dies gleichzeitig diejenigen Geschwindigkeiten, mit denen die Körper sich nach dem Stofse weiterbewegen.

Die erste zur Bestimmung von V_1 und V_2 erforderliche Gleichung erhält man auf Grund der Thatsache, dafs auch während der zweiten Periode die Drucke der Körper gegeneinander gleich sind; es sind danach auch die Kraftimpulse, denen sie im Verlaufe der zweiten Periode ausgesetzt sind, einander gleich. Hieraus folgt, dafs während der zweiten wie auch während der ersten Periode die von der Masse m_2 erworbene Bewegungsmenge gleich der von der Masse m_1 verlorenen Bewegungsmenge ist, d. h.

$$m_1 v_1 - m_1 V_1 = m_2 V_2 - m_2 v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die zweite erforderliche Gleichung kann man auf zwei verschiedenen Wegen erhalten:

A. Nach beendetem Stofse haben die Körper die gleiche Form wie vor dem Stofse, die ganze während des Stofses geleistete Arbeit ist also gleich Null, mithin mufs die Wucht vor und nach dem Stofse denselben Wert haben:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) kann man auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} m_1 (v_1 - V_1) &= m_2 (V_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - V_1^2) &= m_2 (V_2^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13, a)$$

Dividiert man hier die zweite Gleichung durch die erste, so wird

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit m_2 und subtrahiert sie von (12), so erhält man V_1 und darauf V_2:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese beiden Formeln bestimmen die Geschwindigkeiten der Körper nach erfolgtem Stofse. Wir wollen nun einige Spezialfälle betrachten:

1. Die Kugeln sind einander gleich: $m_1 = m_2 = m$. Dann ist $V_1 = v_2$ und $V_2 = v_1$, d. h. die Kugeln vertauschen ihre Geschwindigkeiten. Hat der eine Körper den anderen eingeholt, so bewegt sich der erste nach dem Stofse langsamer als der zweite, der zweite schneller als der erste weiter. Sind sich die Kugeln begegnet, so prallen sie voneinander ab, und jede von ihnen erwirbt die Geschwindigkeit der anderen. War $v_2 = 0$, so wird nach dem Stofse $V_1 = 0$ und $V_2 = v_1$, d. h. die anfänglich in Bewegung befindliche Kugel bleibt stehen, die ruhende aber erhält die Geschwindigkeit der ersteren.

2. Die zweite Kugel besitze eine unendlich grofse Masse; es entspricht dies dem Stofse gegen eine Wand, die sich ebenfalls und zwar mit der Geschwindigkeit v_2 bewegen möge. Dividiert man Zähler und Nenner beider Brüche in (14) durch m_2 und setzt darauf $m_2 = \infty$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -(v_1 - 2v_2) \\ V_2 &= v_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Die Geschwindigkeit der Wand ist also unverändert geblieben, die Geschwindigkeit der Kugel hat in Bezug auf die Wand ihr Vorzeichen gewechselt, denn sie war vor dem Stofse gleich $v_1 - v_2$ und ist nun nach demselben $V_1 - V_2 = -(v_1 - 2v_2) - v_2 = -(v_1 - v_2)$. Ist $v_2 = 0$, so kommt $V_1 = -v_1$, d. h. die Geschwindigkeit der Kugel ändert ihr Vorzeichen. Für den Fall $v_1 = 2v_2$ ist $V_1 = 0$, d. h. die Kugel gelangt zur Ruhe.

Wir haben jetzt noch die Bewegungsmenge K_1 zu bestimmen, welche die Kugeln während des Stofses austauschen, d. h. während der beiden Perioden, in welche die Stofsdauer zerfällt. Wir hatten bereits gefunden, dafs die Kugeln während der ersten Periode die Bewegungsmenge K austauschen, welche uns Formel (10) angiebt. Es ist

$$K_1 = m_1 (v_1 - V_1) \text{ oder } K_1 = m_2 (V_2 - v_2).$$

Setzt man in einen dieser Ausdrücke V_1 oder V_2 ein, so wird

$$K_1 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) = 2K \quad . \; . \; . \quad (16)$$

Der Umsatz an Bewegungsmenge ist beim Stofse elastischer Kugeln zweimal gröfser als beim Stofse unelastischer Kugeln, oder aber der Umsatz während der zweiten Stofsperiode ist gleich dem Umsatze während der ersten Periode.

B. Die Gleichungen (14) kann man auch noch auf anderem Wege ableiten, wenn man nämlich das soeben gewonnene Resultat als a priori verständlich ansieht. Während der zweiten Periode müssen sich — in umgekehrter Reihenfolge — alle diejenigen Drucke wiederholen, welche auf die Körper während der ersten Periode gewirkt

haben. Hieraus folgt (wenn auch nicht mit greifbarer Evidenz), daſs die Kraftimpulse, also auch die verlorenen resp. erworbenen Bewegungsmengen in beiden Perioden einander gleich sein müssen.

Während der ersten Periode hat die Masse m_1 die Geschwindigkeit $v_1 - u$ eingebüſst, während der zweiten Periode vermindert sich ihre Geschwindigkeit nochmals um denselben Betrag, folglich ist

$$V_1 = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1 \quad . \quad . \quad . \quad (17, a)$$

Der zweite Körper hatte während der ersten Periode die Geschwindigkeit $u - v_2$ erworben, während der zweiten Periode erwirbt er nochmals dieselbe Geschwindigkeit, mithin ist

$$V_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2 \quad . \quad . \quad . \quad (17, b)$$

Setzt man (9) in (17, a) und (17, b) ein, so erhält man wiederum Formel (14). Hierauf läſst sich leicht beweisen, daſs die Wucht der Bewegung während des Stoſses absolut elastischer Körper sich nicht geändert hat.

Trifft eine Kugel auf eine unbewegliche Wand und bildet ihre Bewegungsrichtung mit der auf die Wand gefällten Senkrechten einen gewissen Winkel α, so bleibt die zur Wand parallele Geschwindigkeitskomponente ungeändert, während die senkrechte Komponente ihr Zeichen wechselt. Hieraus folgt, daſs die Geschwindigkeit nach dem Stoſse in einer durch die Richtung der ursprünglichen Bewegung und die Senkrechte gelegten Ebene liegt und mit der Senkrechten ebenfalls den Winkel α einschlieſst. Es ist mithin der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

§ 8. **Stoſsdauer.** Die Zeit, welche vom Momente des ersten bis zum Moment des letzten Kontakts zweier aufeinanderstoſsenden Körper verflieſst, wollen wir als Stoſsdauer bezeichnen und für dieselbe den Buchstaben T gebrauchen. Diese Zeitdauer ist, wenn es sich um den Stoſs von Körpern mit gewöhnlichen Dimensionen handelt, auſserordentlich gering. Für den Stoſs von Stahlcylindern von einer Länge zwischen 1 bis 4 Decimetern fand Hamburger im Mittel $T = 0{,}0006$ Sek. Der berühmte Hertz hat (1882) eine vollständige Theorie des Stoſses von Kugeln entwickelt. Seine für gleich groſse Kugeln geltende Formel für T (in Sekunden) lautet folgendermaſsen;

$$T = 2{,}9432\, R \sqrt[5]{\frac{25\,\pi^2 s^2 (1 - \sigma^2)^2}{8\,c\,E^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Hierbei bedeutet R den Radius der Kugeln (in Millimetern), s ihre Dichte, σ den Poissonschen Koeffizienten, E den Youngschen Modul für die Substanz, aus welcher die Kugeln bestehen und c die in Millimetern pro Sekunde ausgedrückte relative Geschwindigkeit vor

dem Stofse. Die Dichte s mufs in Einheiten ausgedrückt sein, denen das Kilogramm als Krafteinheit, das Millimeter als Längeneinheit und die Sekunde als Zeiteinheit zu Grunde liegt. Die Masseneinheit beträgt in diesem System 1000×9810 g und ist $s = s_0 \cdot 10^{-6} \cdot (9810)^{-1}$, wo s_0 die tabellarische Dichte bedeutet (C. G. S.-System). Nimmt man $\sigma = \frac{1}{3}$ an, so ist für Kugeln aus Stahl ($s_0 = 7{,}7$, $E = 20\,000$)

$$T = 0{,}000\,024\ R c^{-\frac{1}{5}}\ \text{Sek.}$$

Für Kugeln aus Messing ist ($s_0 = 8{,}39$, $E = 10\,000$)

$$T = 0{,}000\,03\ R c^{-\frac{1}{5}}\ \text{Sek.}$$

$R = 13$ mm giebt $T = 0{,}000\,181$ Sek. für $c = 73{,}7 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$ und $T = 0{,}000\,138$ für $c = 295 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$. Die Beobachtungen von Hamburger haben Resultate ergeben, welche mit diesen Zahlen in guter Übereinstimmung stehen. Als Kuriosum sei noch folgende von Hertz stammende Berechnung angeführt: Wenn zwei Stahlkugeln von der Gröfse der Erde sich mit der relativen Geschwindigkeit von $c = 10 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$ aufeinander zu bewegen würden, so würde die Stofsdauer für sie gegen 27 Stunden betragen.

Litteratur.

Barus: Phil. Mag. (5) **29**, 337, 1890.

Voigt: Wied. Ann. **47**, 671, 1892.

Heydweiller, Wied. Ann. **63**, 56, 1897.

Reiger, Physik. Zeitschr. **2**, 213, 1901. Diss. Erlangen.

Coulomb: Théorie des machines simples, 1781. Mém. des savants étrangers **10**, 254, 1785.

Warburg und Babo: Wied. Ann. **2**, 406, 1877.

Margot: Arch. sc. phys. **32**, 138, 1894; **33**, 161, 1895.

Morin: Nouvelles expériences sur le frottement, Paris 1833; Mém. de l'Acad. française, **2**, **3**, 1834, 1835; Doves Repertorium **1**.

J. Müller: Pogg. Ann. **139**, 505, 1870.

Rennie: Dingl. Journ. **34**, 165, 1829; Phil. Trans. 1829; Hann. Archit. 1861, S. 346.

N. P. Petrow: Beschreibung und Resultate von Versuchen über die Reibung von Flüssigkeiten und Maschinen (russ.). Mitt. des St. Petersburger technolog. Instituts 1885, St. Petersbug 1886.

N. N. Schiller: Gleichgewicht eines festen Körpers bei Einwirkung der Reibung u. s. w. (russ.). Arb. d. phys. Sekt. d. Moskauer Naturf.-Ges. 5. Lief. **1**, 17, 1892.

Zu § 3.

Prony: Ann. chim. phys. (2) **19**, 165, 1822.

Zu § 5.

Über den Stofs von Körpern:

N. E. Shukowski: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **16**, 388, 1884; **17**, 47, 1885.
N. N. Schiller: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **17**, 5, 200, 1885.
B. Stankiewitsch: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **22**, 118, 1890.

Zu § 8.

Hamburger: Wied. Ann. **28**, 653, 1886.
Hertz: Crelles Journ. **92**, 156, 1882; Ges. Werke **1**, 155.

Tabelle

über die gesetzlich festgesetzten Verhältnisse der russischen Maſse zu den internationalen und den metrischen. (Zusammengestellt von der Hauptanstalt (Palata) der Maſse und Gewichte in St. Petersburg.)

1. Gewichtsmaſse (Massen).

1 Pud = 40 Pfund = 3840 Solotnik	16,380 496 Kilogramm
1 Pfund = 32 Lot = 96 Solotnik	409,512 41 Gramm
1 Lot = 3 Solotnik	12,797 263 „
1 Solotnik = 96 Doli	4,265 754 3 „
1 Dolja = 0,000 108 506 94 Pfund	44,434 940 „
1 Tonne (metrisches System) = 1000 kg . . .	61,048 211 Pud
1 Kilogramm	0,061 018 211 „
	2,441 928 4 Pfund
1 Gramm	0,234 425 13 Solotnik
1 Decigramm	2,250 481 2 Doli
1 Centigramm	0,225 048 12 „
1 Milligramm	0,022 504 812 „

2. Längenmaſse.

1 Werst = 500 Sashen	1,066 80 Kilometer
1 Sashen = 3 Arschin = 7 Fuſs	2,133 60 Meter
1 Arschin = 16 Werschok = 28 Zoll	71,120 0 Centimeter
1 Werschok = 17,5 Linien	44,450 0 Millimeter
1 Fuſs = 12 Zoll = 6,857 14 Werschok . . .	304,800 „
1 Zoll = 10 Linien	25,400 0 „
1 Linie = 10 Punkten	2,540 00 „
1 Punkt = 0,000 833 333 Fuſs	0 254 000 „
1 Kilometer	0,937 383 Werst
1 Meter	0,468 691 Sashen
	1,406 07 Arschin
	22,497 2 Werschok
	3,280 84 Fuſs
	39,370 1 Zoll
1 Decimeter	3,937 01 „
1 Centimeter	0,393 701 „
1 Millimeter	0,393 701 Linien
1 Mikron = 0,000 001 Meter	0,003 937 01 Punkte

3. Flächenmafse.

1 Quadratwerst = 250 000 Quadratsashen	1,138 06 Qu.-Kilometer 113,806 Hektar
1 Desjatine = 2400 Quadratsashen	1,092 54 " 10 925,4 Qu.-Meter
1 Quadratsashen	4,552 25 " 0,045 522 5 Ar
1 Qu.-Arschin = 256 Qu.-Wersch. = 784 Qu.-Zoll	0,505 805 Qu.-Meter
1 Qu.-Werschok = 3,062 5 Qu.-Zoll	19,758 0 Qu.-Centimet.
1 Qu.-Fufs = 144 Qu.-Zoll = 47,020 Qu.-Wersch.	0,092 903 0 Qu.-Meter
1 Qu.-Zoll = 0,006 944 44 Qu.-Fufs	6,451 60 Qu.-Centimet.
1 Qu.-Kilometer	91,529 9 Desjatinen 0,878 687 Qu.-Werst
1 Hektar = 100 Ar	2196,72 Qu.-Sashen 0,915 299 Desjatinen
1 Qu.-Meter	1,977 04 Qu.-Arschin 10,763 9 Qu.-Fufs
1 Qu.-Decimeter	15,500 0 Qu.-Zoll 5,061 23 Qu.-Wersch.
1 Qu.-Millimeter	0,155 000 Qu.-Linien 0,000 506 123 Qu.-Wsch.

4. Kubische Mafse.

1 Kubiksashen	9,712 68 Kubikmeter
1 Kubikarschin	359,729 Kubikdecimeter
1 Kubikwerschok	87,824 4 Kubikcentimeter
1 Kubikfufs	28,316 8 Kubikdecimeter
1 Kubikzoll	16,387 1 Kubikcentimeter
1 Tschetwert	2,099 1 Hektoliter 209,91 Liter
1 Tschetwerik	26,239 "
1 Wedro	0,122 99 Hektoliter 12,299 Liter
1 Dekaster = 10 Ster	1,029 58 Kb.-Sashen 27,798 7 Kb.-Arschin
1 Ster = 1 Kubikmeter	2,779 87 " 0,102 958 Kb.-Sashen
1 Kubikdecimeter	0,002 779 87 Kb.-Arschin 0,035 314 7 Kb.-Fufs
1 Kubikcentimeter	0,011 386 4 Kb.-Werschok 0,061 023 7 Kb.-Zoll
1 Kubikmillimeter	0,000 011 386 4 Kb.-Wersch. 0,000 061 023 7 Kb.-Zoll
1 Kiloliter	4,763 9 Tschetwert 81,305 Wedro
1 Hektoliter	0,476 39 Tschetwert 8,103 5 Wedro
1 Dekaliter	0,381 12 Tschetwerik 0,813 05 Wedro
1 Liter	0,038 112 Tschetwerik 0.081 305 Wedro.

Ein Liter ist das Volumen von einem Kilogramm reinen Wassers von 4° C.; hierbei ist angenommen, dafs 1 Liter = 1,000 11 Kubikdecimeter ist und dafs das Gewicht eines Kubikdecimeters reinen Wassers 999,89 Gramm beträgt.

NAMENREGISTER

der im Text zitierten Autoren.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Y.

Z.

SACHREGISTER.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.

Berichtigungen.

Seite 176, Zeile 2 von unten: statt $\beta = 4\pi \frac{\lambda}{x}$ lies $\beta = 4\pi \frac{x}{\lambda}$.

Seite 184, Zeile 20 bis 22 von oben: statt eine Schwingungsbewegung, welche sich längs einer Geraden ausbreitet lies eine Gerade, längs welcher sich eine Schwingungsbewegung ausbreitet.

Seite 253, Zeile 15 und 16 von unten; Seite 254, Zeile 3 von oben: statt Schwingungszeit lies Schwingungsdauer.

Seite 392, Zeile 25 von oben muss, entsprechend den vorhergehenden Formeln (22) und (22, a),

$$g = 980{,}597$$

stehen. Nach den neuesten, während des Druckes veröffentlichten Feststellungen ist $g = 980{,}665$ für $h = 0$ und $\varphi = 45^{\circ}$.



